Petrus van Galen

OVER HET BEPALEN VAN DE VORM VAN DE AARDE MET BEHULP VAN SLINGERS

Vertaald door Marius Goossens en bewerkt door Bart Root
met begeleidende teksten van Peter Laarakker, Marieke Klip,
Leen Aardoom en Ramon Hanssen

TU Delft OPEN
Publishing

Petrus van Galen. Over het bepalen van de vorm van de aarde met behulp van slingers

Vertaald door Marius Goossens en bewerkt door Bart Root

met begeleidende teksten van Peter Laarakker, Marieke Klip, Leen Aardoom en Ramon Hanssen

Opgedragen aan

Joop Gravesteijn

1944 - 2023

Inhoudsopgave

Abstract

De dissertatie van Petrus van Galen van zijn promotieonderzoek aan de Universiteit Utrecht uit 1830 is een vergeten vondst in de geschiedenis van het zwaartekracht onderzoek naar de aarde. In de vertaling van het Latijn naar het Nederlands geeft deze dissertatie ons een inzicht in de wetenschappelijke ontdekkingen rond de tijd van zijn publicatie. Petrus van Galen geeft in zijn dissertatie een volledig beeld van alle slingermetingen die gedaan waren met betrekking tot het bepalen van de vorm van de aarde. Deze unieke metingen werden gedaan door verschillende ontdekkingsreizigers en wetenschappers, van Noord-Rusland tot in de Vuurland-archipel in het verre zuiden van Zuid-Amerika, allemaal om zo een beter beeld te krijgen van de afplatting van onze planeet. In zijn tweede hoofdstuk presenteert Van Galen in een wiskundige uiteenzetting hoe een slingermeting gecorrigeerd moet worden om zo nauwkeurig mogelijk de zwaartekracht te kunnen bepalen, hierbij verder bouwend aan de theorie van Christiaan Huygens. Hierbij selecteert hij ook de apparatuur en experimenten die precies genoeg zijn voor de bepaling van de vorm. In zijn laatste hoofdstuk werkt hij de wiskundige theorie uit hoe de vorm van de aarde bepaald kan worden door de verschillende zwaartekracht-metingen. Hij gebruikt daarbij de net bedachte kleinste kwadratenmethode, om zo tot een waarde voor de afplatting te komen van 1/286.23. Deze waarde ligt dicht bij de huidige berekende waarde, een bijzondere prestatie zo'n tweehonderd jaar geleden. Dit boek presenteert zo een nieuw puzzelstukje in de fascinerende geschiedenis van de Nederlandse wetenschap.

English summary

Petrus van Galen's 1830 dissertation from his doctoral research at Utrecht University is a forgotten chapter in the history of earth gravity research. Translated from Latin into Dutch, this dissertation gives us an insight into the scientific discoveries around the time of his publication. In his dissertation, Petrus van Galen gives a complete picture of all the pendulum measurements that had been made with regard to determining the shape of the earth. These unique measurements were made by various explorers and scientists, from northern Russia to the Tierra del Fuego archipelago in the far south of South America, all to get a better picture of the flattening of our planet. In his second chapter, Van Galen presents in a mathematical account how a pendulum measurement should be corrected to determine gravity as accurately as possible, building further on Christiaan Huygens' theory. In doing so, he also selects the equipment and experiments that are precise enough to determine the shape. In his final chapter, he elaborates the mathematical theory of how the shape of the earth can be determined by the various gravity measurements. He uses the just-conceived least squares method to arrive at a value for the oblateness of 1/286.23. This value is close to the current calculated value, an extraordinary achievement some two hundred years ago. This book thus presents a new piece of the puzzle in the fascinating history of Dutch science.

1 Voorwoord - De Hollandse Cirkel

— door Peter Laarakker, voorzitter van De Hollandse Cirkel

De Stichting de Hollandse Cirkel is ruim 25 jaar geleden opgericht om de belangstelling in de geschiedenis van de geodesie en geo-informatie te bevorderen. De Nederlandse geodetische geschiedenis kent een sterke betrokkenheid bij de zwaartekrachtmeting. De schietloodrichtingen voor het primaire RD-net rond 1910, de legendarische metingen op zee door Prof. Vening Meines in de jaren '30, het speciaal voor de bewaking van de bodemdaling in Groningen ingerichte net van 1978, de landelijke verdichtingsnetten van TU Delft en Rijkswaterstaat in de jaren '80 en '90, de Nederlandse Geoide rond 2000 en de jaarlijkse absolute zwaartekrachtmetingen sinds 2005. Het tijdschrift heeft daarom al verschillende malen aandacht besteed aan de geschiedenis van de zwaartekracht, via artikelen van met name Prof. Aardoom en Strang van Hees. Daarnaast is de serie Geodetisch-Historische Monografieën in 2012 afgetrapt met de publicatie van "Satelliet-Geodesie in Nederland 1960-2000" door Prof. Aardoom waarin de geschiedenis van de zwaartekrachtmetingen uitgebreid aan de orde komt. Tenslotte bevat de collectie instrumenten van de Hollandse Cirkel de nodige apparatuur voor zwaartekrachtmetingen zoals de Worden gravimeter, een instrument waar Vening Meinesz in zijn bijdrage aan het Snellius Lustrumboek van 1960 nog aandacht besteedde en waar verschillende generaties studenten in de 70-er jaren zwaartekrachtonderzoek mee deden.

De ontdekking van het 19-eeuwse proefschrift van Petrus van Galen en de artikelen die rondom dat werk in dit boek zijn opgenomen, geven een mooie en zeer interessante verdieping van die nu 500 jaar bestrijkende geschiedschrijving. Wij juichen dit initiatief zeer toe. De Hollandse Cirkel is zeer blij met het resultaat en feliciteert de schrijvers en uitgever met deze publicatie.

2 Petrus van Galen zijn invloed op het huidige zeevaartonderwijs in Rotterdam

— door Marieke Klip, directeur Rotterdam Mainport Institute

Op een steenworp afstand van het gebouw waar in 1916 het nautisch zeevaartonderwijs gedoceerd werd worden er nog dagelijks studenten opgeleid voor dit beroep. Vandaag de dag studeren er in Rotterdam een kleine 250 studenten aan de hogere zeevaartschool. De opleiding heet vandaag de dag Maritiem Officier en is onderdeel van Hogeschool Rotterdam.

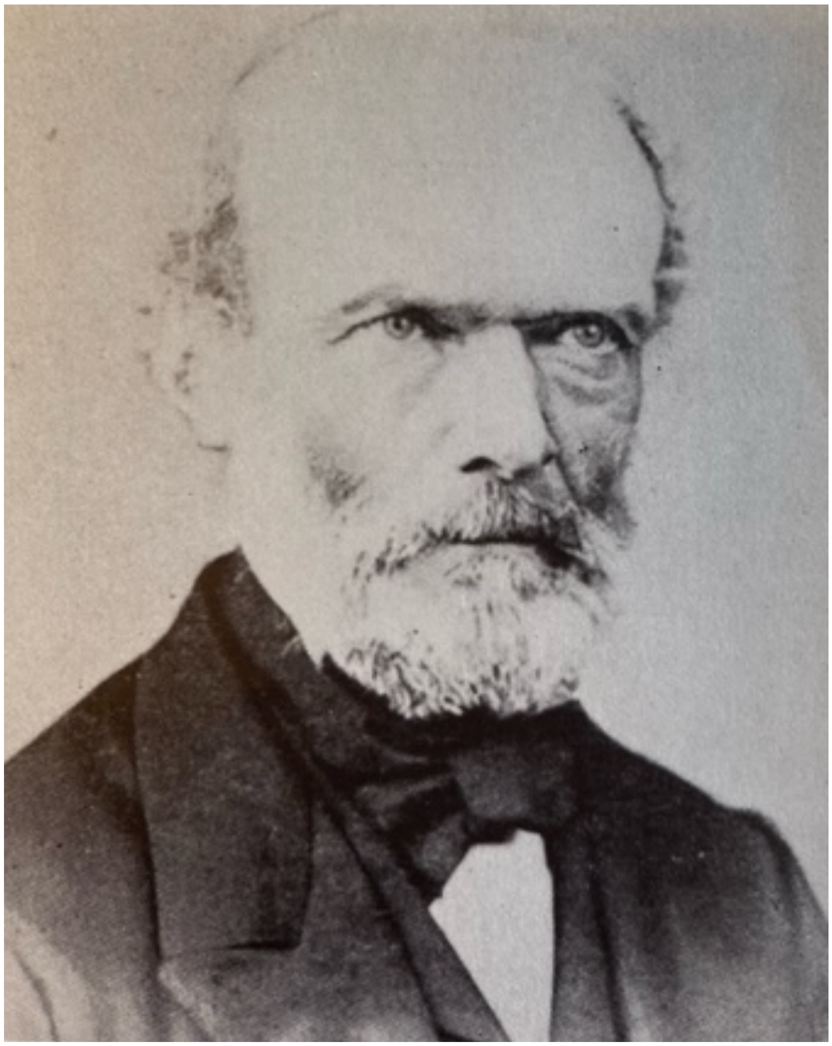
Met enige trots wordt regelmatig verteld dat het zeevaartonderwijs in Rotterdam al sinds 1833 bestaat, dit is mogelijk gemaakt door Petrus van Galen.

Petrus zijn dissertatie gaat over de zwaartekracht, van huis uit was hij een wiskundige. De huidige opleiding Maritiem Officier kent nog steeds veel wiskunde in haar programma, van hard-core zwaartekracht berekeningen is geen sprake, maar zwaartekracht speelt nog wel altijd een rol in het leven van een zeevarende.

Schepen komen dankzij het bestaan van zwaartekracht veilig op hun plek van bestemming aan. Dit lijkt tegenstrijdig maar stabiliteit ontstaat vanuit de zwaartekracht. De zwaartekracht maakt ook dat het gyrokompas altijd naar het noorden wijst, wat navigeren op zee mogelijk maakt. En denk ook aan het getij: door de zwaartekracht in samenspel met de aardrotatie ontstaat eb en vloed. Belangrijke gegevens die nodig zijn om uit te rekenen of een schip genoeg water onder de kiel heeft om een haven binnen te varen.

Toen ik gevraagd werd dit voorwoord te schrijven ben ik mij wat verder gaan verdiepen in hoe een wiskundige de liefde voor de zeevaart zo hoog had zitten dat hij een zeevaartschool gestart is. Gelukkig zijn zeevarenden een trotse gemeenschap en zo is er in 1983 een boek verschenen over 150 gemeentelijk zeevaartonderwijs in Rotterdam. In deze uitgave is te lezen dat Petrus mogelijk schoonfamilie is van mevrouw Janet Taylor de vrouw die in 1833 de George Taylor Nautical Academy startte in London en die veel nautische werken op haar naam heeft staan.

Voor mij, als directeur van het instituut waar de opleiding Maritiem Officier deel van uit maakt, is het bijzonder om een voorwoord te mogen schrijven voor de vertaling van de dissertatie van de stichter van de opleiding.



Figuur 1: Portret van Petrus van Galen

3 Historisch Nederlands zwaartekracht onderzoek

— door Prof.dr.ir. L. Aardoom, hoogleraar-emeritus TU Delft

Voor de in 1564 te Pisa geboren Galileo Galileï bood de plaatselijke scheve toren een unieke gelegenheid voor experimenten inzake de vrije val. Daarvan gebruik makend, kwam hij in het bijzonder op het voordien niet opgemerkte verschijnsel van het isoschronisme: bij een ongestoorde slingerbeweging hangt de periode uitsluitend af van de lengte van de slinger. Daardoor is Galileo's naam onverbrekelijk verbonden met 'de lengte van de secondeslinger', bij een overal (aarde-breed) meetbare seconde, een veronderstelde aarde-brede lengtemaat; zoals de Dortse wis- en natuurkundige Isaac Beeckman (1588-1637) omstreeks 1610 schreef: "de maat waarmee alle dingen worden gemeten". Bij de later niettemin geconstateerde van plaats tot plaats verschillende 'lengte van de secondeslinger' - omgekeerd - een maat voor de plaatselijke 'versnelling van de zwaartekracht'.

Problematiek, waarmee in de loop der volgende eeuwen en jaren toonaangevende wetenschappers, waaronder Christiaan Huygens, zich inlieten. Weliswaar, was de seconde in principe overal en altijd precies meetbaar en lag de bijbehorende lengte van de slinger daarmee vast, maar bij de nauwkeurige meting van deze lengte kwam meer kijken: de reversieslinger, omkeerbaar met twee slingerassen, waarvan Christiaan Huygens in 1673 het principe beschreef en dat, eind 18de eeuw ten behoeve van de zwaartekrachtmeting door de Franse baron de Prony (1755-1839) werd opgepakt. In 1800 leidde dit tot de eerste - zij het te ingewikkeld en onpraktisch - werkende reversieslinger; in 1811 in meer praktische vorm uitgebracht door de Duitse sterrenkundige Johann G.F. von Bohnenberger (1765-1831). Het werd echter 1817 vóórdat de eerste praktisch bruikbare reversieslinger door de Engelse natuurkundige Henry Kater (1777-1835) werd gepresenteerd. Bruikbaar, maar nadat de Duitse wis- en sterrenkundige Friedrich W. Bessel (1784-1846) in Katers reversieslinger technische onvolkomenheden had ontdekt, besloot hij om - onverlet zijn aandacht voor het reversieconcept - voorlopig ook nog te gaan werken aan verbetering van de bestaande werkwijze met de 'gewone' enkelvoudige slinger. Dit alles ten dienste van de meting van de zwaartekracht, want als universele standaard was de lengte van de secondeslinger intussen overgenomen door de breed aanvaarde en gekopieerd beschikbare standaardmeter.

Dit was de situatie met 'de lengte van de seconde'-problematiek, toen de 18-jarige in Tiel wonende Peter van Galen in oktober 1823 te Utrecht als student bij de universiteit werd ingeschreven. Als eersteling van mr. Hendrik Jan van Galen en Anna Catharina Weijll was hij op 20 september 1805 te Arnhem geboren. Bij zijn in Tiel wonende ouders opgegroeid, doorliep hij daar de plaatselijke Latijnse School en was hij - passend bij de maatschappelijke positie van zijn vader (Rijks-ontvanger en directeur plaatselijke postkantoor) - voorbestemd voor een hogere, zo mogelijk, wetenschappelijke opleiding. In Utrecht kreeg Peter daartoe de gelegenheid, onder de hoede van professor G. Moll (wis- en sterrenkunde) in 1830 leidend tot verdediging van voorliggend (uit het Latijn vertaalde) proefschrift: “Over de slinger en de toepassing ervan ter bepaling van de vorm van de aarde”. Verwijzend naar enkele hierboven opgevoerde (en deels destijds nog levende en actieve!) buitenlandse onderzoekers, besprak Peter dit alles uitvoerig en kritisch; een actueel onderwerp, dat in Nederland nog niet op de wetenschappelijke agenda stond.

Anders dan wellicht verwacht, zou dat wat initiatieven van de jonge doctor betreft, voorlopig zo blijven. Naast de onderwerpen van zijn leeropdracht had promotor Moll nadrukkelijk ook aandacht getoond voor de zeevaartkunde; al dan niet in samenspraak met zijn collega J.F.L Schröder, die vóór zijn benoeming te Utrecht in 1816, te Hellevoetsluis, Fijenoord en Enkhuizen hoofd van ‘s-lands zeevaartkundige school was geweest en in Utrecht een werkzaam aandeel in de begeleiding van promovendus Van Galen had gehad. Daarbij zal hij bij zijn pupil ook een gewillig oor hebben gevonden voor een zeevaartkundig gesprekje.

Te gewillig, want nauwelijks twee jaar na zijn promotie nodigde dr. P. van Galen, leraar in de zuivere en toegepaste wiskunde te Rotterdam, belangstellenden uit voor een particuliere cursus in de toepassingen van de wiskunde; niet in de aardwetenschappen, maar in werktuig -, sterre- en zeevaartkunde! Intussen door de Gemeente Rotterdam erkend, ging de Cursus in de Zeevaartkunde in november 1833 van start; opmaat voor de tegenwoordige Hogere Zeevaartschool Rotterdam. In Rotterdam schreef Peter van Galen diverse op de zeevaartkunde afgestemde wiskundige boeken; voor aan zijn Utrechtse studie en promotie gerelateerd aardwetenschappelijk werk was hij verloren.

In enkele noten verwijzend naar Peter van Galen in 1830, zou die draad in Groningen weer worden opgepakt door Geert Noording, die daar in 1870 promoveerde op “De bepaling van de gedaante der aarde uit slingerproeven”; een onderwerp dat - werkend in Europees samenwerkingsverband - tegen de eeuwwisseling daadwerkelijk werd aangepakt en waarmee, in 1910, ir. F.A. Vening Meinesz zijn entree zou maken.

Wat betreft een gelegenheid voor dr. Noording om met het door hem in Groningen behandelde onderwerp daadwerkelijk aan de slag te gaan, kwam deze ontwikkeling te laat. Na zijn promotie ging hij in Groningen naar de kweekschool en was leraar ‘wis- en natuurlijke historie’ aan de HBS te Sappemeer toen hij in 1876 - tijdens de kerstvakantie thuis in Noordbroek - overleed. In Rotterdam werd dr. Van Galen na 33 jaar lectoraat in de zeevaartkunde per 1 maart 1871 - op eigen verzoek - om gezondheidsredenen vervroegd gepensioneerd. Teleurstelling vanwege het, vooral sinds 1870, drastisch teruglopende aantal nieuwe leerlingen voor ‘zijn’ school, zal de niet te negeren belangrijkste aanleiding tot zijn verzoek zijn geweest. Met zijn echtgenote Emily A. Taylor Jane, met wie hij in 1840 te Londen was getrouwd en hun drie nog thuiswonende dochters en jongste zoon, vertrok hij in mei 1873 naar Drumpt bij Tiel. Daar - ontevreden vertrokken uit Rotterdam - met Emily en kinderen te hebben gewoond in hun Huize Weltevreden, overleed dr. P. van Galen op 29 december 1891. De weduwe Van Galen - Taylor Jane overleed in februari 1903.

Vóór zijn vertrek uit Rotterdam had Van Galen zijn bibliotheek overgedaan

aan boekhandel "De Slegte", aldaar; zonder, misschien, het persoonlijk exemplaar van zijn door C.G Sulpke te Amsterdam in 1830 uitgegeven proefschrift. Bij enkele wetenschappelijke bibliotheken, her en der in het land, staat het in Latijn gedrukte proefschrift nog in de catalogus; ook bij de TUDelft in de Trésorcollectie. Op de hoogte met zijn belangstelling voor alles de geschiedenis van zijn vakgebied betreffende, was er in 2018 voor conservatrice drs. Marietje G. Ruigrok aanleiding om Joop T. Gravesteijn (voormalige faculteit Geodesie) te informeren over de aanwezigheid van Peter van Galens proefschrijft, afkomstig uit de bibliotheek van het in 1843 opgeheven Athenaeum te Franeker.

Een verrassing voor Joop en dr.ir. Bart C. Root (faculteit Luchtvaart- & Ruimtevaarttechniek), die sinds 2014 samenwerkten om het Nederlandse zwaartekrachtonderzoek van weleer - wat zij noemden - 'in de publieke ruimte' te brengen. Nogmaals getipt door mevrouw Ruigrok, vonden zij in drs. Marius G. Goossens zelfs nog een classicus bereid om de in het Latijn gestelde, hem qua onderwerp geheel vreemde tekst, belangeloos in het Nederlands te vertalen.

Voor de bovengenoemde Delftse 'bi-facultaire' historisch-gravimetrische samenwerking was deze vertaling een dermate waardevolle aanvullende bron dat, met Marius Goossens instemming en medewerking, werd besloten om Peter van Galens volledige tekst, Nederlandstalig in boekvorm te doen uitgeven en aldus 'in de publieke ruimte' te brengen. Dáár zal deze uitgave belangstellende lezers vinden, in het bijzonder onder niet-klassiek gevormde aardwetenschappers, die nu uit de eerste hand kennis kunnen nemen van de vroegste Nederlandse 'aanpak' van het zwaartekrachtveld bij de bepaling van de vorm van de aarde; een onderwerp waarmee professor F.A. Vening Meinesz een eeuw later wereldfaam zou verwerven door als 'passagier' van de Koninklijke Marine, 'onderzees' zwaartekrachtmetingen (gravimetrie) te verrichten; een baanbrekende stap op de weg naar een aarde-omspannende geodesie. Evenals de geodetische benutting van de ophanden zijnde lancering van kunstmatige satellieten, die lector ir. G.J. Bruins voorzag toen hij in 1955 de Utrechtse prof. Vening Meinesz te Delft opvolgde als hoogleraar in de fysische geodesie; om twee jaar later - naast voortgezette beoefening van het door zijn voorganger eigentijds bestreken veld - de gravi- en geometrische aspecten en toepassingen van de satellietgeodesie - in zijn portefeuille kreeg. Al met al, met die uitbreiding door professor Bruins en zijn opvolgers aandachtig gevolgd, geactualiseerd en waarnemingstechnisch ook toegepast - de aanzet tot het wetenschapsgebied zoals thans door prof.dr.ir. R.F. Hanssen bestreken.

4 De zwaartekracht als onderzoeksthema in Delft

— door Prof.dr.ir. Ramon Hanssen, Hoogleraar Geodesie en Satelliet-aardobservatie, TU Delft

Delft heeft een zeer lange historie op het vlak van het zwaartekrachtsonderzoek. De geschiedenis gaat in elk geval terug tot de jaren kort voor 1586, toen Simon Stevin, samen met Jan Cornets de Groot (de vader van Hugo de Groot) de nu zo beroemde valproef uitvoerde vanaf de Nieuwe Kerk aan de markt in Delft. Stevin's beschrijving van deze proef in zijn boek *De Beghinselen der Weeghconst*, in 1586 uitgegeven, luidt:

> Laet nemen (soo den hoochgheleerden H. IAN CORNETS DE GROOT vlietichste ondersoucker der Naturens verborghentheden, ende ick ghedaen hebben) twee loyen clooten d'een thienmael grooter en swaerder als d'ander, die laet t'samen vallen van 30 voeten hooch, op een bart oft yet daer sy merckelick gheluyt tegen gheven, ende sal blijcken, dat de lichste gheen thienmael langher op wech en blijft dan de swaerste, maer datse t'samen so ghelijck opt bart vallen, dat haer beyde gheluyden een selve clop schijnt te wesen. S'ghelijcx bevint hem daetlick oock also, met twee evegroote lichamen in thienvoudighe reden der swaerheyt, daerom Aristoteles voornomde everedenheyt is onrecht.

Deze prachtige oud-Nederlandse tekst is weergaloos, om verschillende redenen. Om te beginnen moet je überhaupt maar geïnteresseerd zijn in de zwaartekracht; waarom zou je? Het leven in de late 16$^{\mathrm{e}}$ eeuw was waarschijnlijk al gecompliceerd genoeg. Vervolgens maakt de tekst duidelijk dat Stevin teruggrijpt op Aristoteles, bijna 2000 jaar eerder; hij kende zijn klassieken. Dan moet je ook nog maar durven dit soort fundamenten, geadopteert door de machtige katholieke kerk, aan kritische ondervraging te willen blootstellen. Vervolgens moet je een empirisch experiment bedenken waarvan de conclusies uitsluitsel kunnen geven, en dat experiment ook nog eens goed uitvoeren. Ten slotte moet je het experiment precies documenteren, en er daarna een conclusie uit trekken, waardoor een 2000 jaar oude 'waarheid', de officiële doctrine van de katholieke kerk, omvergeworpen wordt. Al deze elementen op een rij geven blijk van een uitzonderlijke begaafdheid en moed van de twee heren in de roerige tijd rond 1584 waarin ook nog eens de prins van Oranje in Delft werd vermoord.

Stevin en De Groot namen dus twee ballen (clooten) van lood, waarbij de ene tien maal groter en zwaarder was dan de andere. Deze twee ballen lieten ze tegelijkertijd vallen van 30 voet hoogte. De destijds gebruikte Rijnlandse voet was 31.4 centimeter, hetgeen een hoogte van 9.42 meter oplevert: de hoogte van de balustrade boven de ingang van de Nieuwe Kerk. De ballen vielen op een houten plank (bart), zodanig dat de klap waarmee ze aankwamen goed te horen was. Het bleek dat er sprake was van één samenvallende klap. Met andere woorden; ze kwamen tegelijkertijd aan, en het was dus niet zo dat de lichtste bal er tien keer zo lang over deed. Dat was ook zo wanneer de twee ballen even groot waren, maar wel een verschillend gewicht (swaerheyt) hadden. Om deze reden is de door Aristoteles veronderstelde evenredigheid tussen gewicht en valsnelheid onjuist.

Slechts een korte tijd later stond dezelfde Simon Stevin, in mijn ogen, aan de wieg van wat nu de TU Delft is, inclusief het vakgebied van de geodesie. Zijn studievriend Prins Maurits, zoon van Willem van Oranje, vroeg hem om het curriculum te ontwerpen voor de eerste Nederlandse ingenieursschool, de *Duytsche Mathematique*. Dat moest volgens hem bestaan uit rekenen en meetkunde en landmeetkunde zo schrijft hij in zijn instructie:

> De meyninghe is dat men den toehoorders soo haest als mogelijck is sal brenghen om met der daet het Landt als Ingenieurs te connen dienen. Hier toe sal men leeren de Arithmeticque ofte het tellen en het landtmeten

In 1600 ging deze opleiding van start, de eerste ingenieursschool, toegevoegd aan de universiteit Leiden, met colleges in het Nederlands (Nederduytsch). De ingenieursopleiding heeft (met een onderbreking tussen 1681 en 1701) bestaan tot 1842, toen in Delft de Koninklijke Akademie werd gestart. Het jaar 1842 wordt nu gezien als het oprichtingsjaar van de huidige TU Delft.

De dissertatie van Peter van Galen van 1830 moet dus geplaatst worden in de tijd dat de opleiding in Delft nog niet was gestart. De landmeetkunde heeft wellicht wel een rol gespeeld bij het zwaartekrachtsonderzoek van Van Galen (zie voorwoord in dit werk van Bart Root).

In Delft heeft het zwaartekrachtsonderzoek na Stevin's beroemde proef andere vormen aangenomen. Nadat Christiaan Huygens in 1679 een verbeterd waterpasinstrument had ontwikkeld, werd het zwaartekrachtveld impliciet gebruikt om hoogten over te brengen tussen punten. De eerste directeur van de Polytechnische School in Delft (de opvolger van de Koninklijke Akademie) was de geodeet Dr. Lewis Cohen Stuart. Deze kreeg in 1875 de leiding over de eerste nauwkeurigheidswaterpassing, en ontwikkelde daarvoor een nauwkeurige methodiek. Bij Koninklijk Besluit werd er in 1879 een *Rijkscommissie voor Graadmeting en Waterpassing* opgericht, waaruit blijkt dat de waterpassing als belangrijk werd gezien. Zijn werk werd voortgezet door zijn opvolger, prof. Charles Schols, *hoogleeraar* in de landmeetkunde, het waterpassen en de geodesie. Schols wordt in 1900 opgevolgd door prof. Hendrik Jan Heuvelink, en in 1926 door prof. Willem Schermerhorn, ook belast met de tweede nauwkeurigheidswaterpassing van Nederland.

De echte latere 'rockstar' van het Nederlandse zwaartekrachtsonderzoek was natuurlijk prof. Felix Vening Meinesz, die in 1910 in dienst kwam van de bovengenoemde Rijkscommissie voor het doen van slingerproeven ter bepaling van de zwaartekracht, resulterend in zijn proefschrift over slingertoestellen in 1915. Tussen 1913 en 1921 doet hij zwaartekrachtmetingen in Nederland, en in 1923 vaart hij met onderzeeboot K-II uit om zwaartekracht te meten op zee. Uiteindelijk leidt dit tot zijn beroemde reis rond de wereld in 1934 met onderzeeboot K-XVIII. Zijn werk werd voortgezet door Gerard Bruins, later ook hoogleraar in

Delft op het vlak van driehoeksmeting, astronomische waarnemingen en zwaartekrachtswaarnemingen. Prof. Bruins kreeg sinds 1960 de verantwoordelijkheid over de net opgekomen satellietgeodesie, en zag direct haar gravimetrische potentie. Bruins nam in 1976 afscheid met een rede over *Onderwijs en onderzoek in de geodesie, in het bijzonder in relatie tot de zwaartekracht*, maar in afwachting van zijn opvolger aanvaardde hij nog voor enige tijd een leeropdracht in de fysische geodesie. In 1980 werd Reiner Rummel to zijn opvolger benoemd tot hoogleraar Fysische Geodesie, de discipline die zich met name richt op het zwaartekrachtsonderzoek. In 1993 werd Rummel in deze discipline opgevolgd door prof. Roland Klees.

Het leidt geen twijfel dat in een terugblik op het zwaartekrachtsonderzoek in Nederland, in het bijzonder in Delft, de nieuw 'ontdekte' dissertatie van Peter van Galen van 1830 een speciale plek verdient. Het toont aan dat het huidige geodetisch onderzoek binnen de TU Delft, met geavanceerde meetsystemen zowel in de ruimte als in en op de aarde, schatplichtig is aan vele voorgangers.

5 Nederlands zwaartekracht onderzoek vergeten door de tijd

— door dr.ir. B.C. Root, universitair docent TU Delft

De Franeker Universiteit sloot in 1811 onder het bewind van Napoleon. Dit betekende echter niet het einde van het academische onderwijs in Franeker. Bij de totstandkoming van het Koninkrijk der Nederlanden in 1815 werd een Atheneum opgericht om het onderwijs te continueren. Het jaar daarna werd er in het kloostergebouw van het Atheneum een leeskamer ingericht met op de bovenste etage boeken afkomstig van de opgeheven universiteit. Het Atheneum verschilde van de universiteit van Franeker; er werd wel academisch onderwijs gegeven, maar op een lager niveau. Er was geen examenbevoegdheid en promotierecht. Wel mochten de docenten zich professor blijven noemen. Voor het afsluiten van hun studie moesten de studenten zich overschrijven naar een universiteit. Vanuit Franeker was dat meestal Groningen.

Het Franeker Atheneum werd uiteindelijk in 1843 opgeheven door bezuinigingen. Een deel van de boeken en het instrumentarium moest worden afgestaan aan de voorloper van de Technische Universiteit (TU), de 'Koninklijke Academie ter opleiding van burgerlijke ingenieurs', te Delft opgericht in 1842. Ongeveer 200 boeken met een stempel van Franeker bevinden zich vandaag nog in de collectie van de TU Delft bibliotheek. Onder deze collectie bevond zich een dissertatie uit 1830 door Petrus van Galen genaamd "DISPUTATIO MATHEMATICA INAUGURALIS DE PENDULO EJUSQUE ADPLICATIONE AD TELLURIS FIGURAM DETERMINANDAM". Een Nederlandse contributie aan het geodetische zwaartekracht onderzoek in tijden van grote tumult. Het jaar 1830 luidde de Belgische Revolutie in. Die omwenteling resulteerde in de afscheiding van België waarbij de zuidelijke Nederlandse provincies voor onafhankelijkheid streden om uiteindelijk het land België te worden. In tijden van grote politieke veranderingen werd er in het midden van het land zwaartekracht onderzoek gedaan. Wat voor onderzoek was dit en hoe stond dit Nederlands onderzoek ten opzichte van de rest van de wereld?

Sinds 2014 loopt er een project bij de TU Delft om het Nederlandse onderzoek over zwaartekracht meer naar de publieke ruimte te brengen. In dit project werkten medewekers van de bibliotheek van de TU Delft samen met aardwetenschappers, erfgoed instituten, musea, de Nederlandse Marine, andere universiteiten en studenten. Er werd vooral gekeken naar het werk van prof. Vening Meinesz en zijn slingerwaarnemingen in en buiten Nederland. Dit leidde tot een interactieve website[1] en andere werken die aandacht gaven aan het zwaartekrachtsonderzoek in Nederland (door Prof. dr. ir. Leen Aardoom). Ook zijn er tijdelijke en vaste exposities op verschillende plekken verschenen over het werk van professor Vening Meinesz (bv. Marine Museum Den Helder en het Science center in Delft). In 2018 merkte de curator van de Tresorcollectie TU Delft, M. Ruijgrok, de dissertatie van Petrus van Galen op. Dankzij de grote interesse

[1] `https://www.expeditiewikipedia/nl/#vening-meinesz`

voor het Vening Meinesz-project, bracht zij de dissertatie onder de aandacht van leden van het erfgoed project uit 2014. De woorden pendulo en Telluris figuram verklapte haar dat het hier ging om een Nederlandse studie naar de bepaling van de vorm van de aarde met behulp van slingers; het levenswerk van prof. Vening Meinesz. Er was alleen een uitdaging: de gehele dissertatie was geschreven in het Latijn, wat in de tijd van Petrus van Galen de gebruikelijke academische voertaal was. Deze vondst gaf nieuwe aanleiding voor verschillende projectleden om weer bij elkaar te komen. Vooral door het aanhoudende enthousiasme van Joop Gravesteijn werd besloten om deze dissertatie verder te bestuderen. Dankzij de hulp van Ruijgrok vonden wij een vertaler die in zijn eigen tijd de tekst wilde vertalen naar het Nederlands. We zijn Marius Goossens zeer dankbaar voor dit ongelooflijk secure werk. De dissertatie is nu beschikbaar in de (moderne) Nederlandse taal, zodat u en ik het werk van Petrus van Galen op waarde kunnen bepalen.

Petrus van Galen deed zijn promotieonderzoek onder Prof. Moll bij het Aca-demi Rheno-Trajectina; nu wel bekend als Universiteit Utrecht. Gerard (Gerrit) Moll (Amsterdam, 18 januari 1785 - Amsterdam, 17 januari 1838) was een Nederlands wis-, natuur- en sterrenkundige en hoogleraar en rector magnificus (1818-1819) aan de Universiteit Utrecht. De wiskundige achtergrond van Prof. Moll is duidelijk zichtbaar in het werk van van Galen. De thesis zelf is geschreven in het Latijn, maar gecombineerd met vele wiskundige ontwikkelingen. In 1806 was promotor Moll gevraagd om mee te werken aan een nauwkeurige bepaling van de afstand in geografische lengte tussen Amsterdam en Utrecht. Deze geodetische ervaring kan de reden zijn voor het latere onderwerp van de thesis van Petrus van Galen. De DISPUTATIO werd uiteindelijk verdedigd op 10 Februari 1830, 12:00 door Petrus van Galen, onder de Rector Magnificus Herman Bouman.

De dissertatie bestaat uit drie delen: een historisch overzicht van zwaartekrachtonderzoek, gevolgd door een wiskundige uiteenzetting van het modeleren van de mathematische slinger en eindigt met een wiskundige beschrijving van het gebruik van zwaartekracht om de afplatting van de Aarde te bepalen. Aan het eind van het document zijn nog verschillende stellingen geplaatst en talloze tabellen met slingerwaarnemingen die door Van Galen zijn verzameld. Vooral dat laatste kan gezien worden als een groot werk, want Van Galen heeft bijna alle slingerwaarnemingen uit die tijd verzameld. In totaal heeft Van Galen 94 aantal slingerwaarnemingen van lage kwaliteit (Tab 1) en 49 aantal slingerwaarnemingen van hoge kwaliteit (Tab 2 en 3) verzameld en gedocumenteerd. Torge (1989) schrijft in zijn boek dat rond 1830 er ongeveer tussen de 10-100 waarnemingen wereldwijd zijn. Petrus van Galen heeft dus tijdens zijn promotieonderzoek alle metingen die er in die tijd zijn gemaakt bij elkaar gevonden, om een zo'n compleet beeld van de vorm van de Aarde te krijgen.

Petrus van Galen start in zijn introductie met het toekennen van de eerste studie van de slinger aan Galileo Galilei (1564-1642), een Italiaans filosoof uit Pisa. Hij reflecteert op een brief van Edward Bernard aan Huntington over de toepassing van slingers voor tijdsbepaling door Arabische Astronomen, maar concludeert dat Galileo heel waarschijnlijk zijn ideeën zelf heeft bedacht zonder kennis van deze werken. Waar Galileo nog in de isochrone cirkelvormige beweging geloofde, liet Huygens zien dat dit alleen van toepassing is voor zeer kleine uitwijkingen van de slinger. In zijn publicatie "HOROLOGIUM ASCILLATORUM" in 1673 presenteert Huygens dan ook de beroemde slingervergelijking voor slingers met een kleine afwijking. Huygens ging er hierbij vanuit dat zwaartekracht overal constant is. Na de experimenten van Richer in 1672 op het eiland van Cayenne, oordeelt Huygens dat "de verschillen in slingertijd niet door de ijle lucht komen, maar doordat de pendule lichter is nabijer de evenaar." Ook Newton merkt dit op en verwerkt dit in zijn beschrijving van de zwaartekracht, welke de mogelijkheid geeft om de vorm van de Aarde te bepalen. Dit kan gezien worden als het startschot van de fysische geodesie. Want vanaf dat punt in de geschiedenis zijn er verschillende wetenschappers die de vorm van de Aarde proberen te bepalen aan de hand van slingerbewegingen. Van 1672 tot de tijd van Petrus van Galen zijn namen als Cassinis, Bouguer, Maupertuis, Clairault, Godin, Picard, Borda, Kater, Bessel, Celsius, Lulofs en vele andere bezig om de afplatting van de aarde te berekenen.

Petrus beschrijft al deze studies en stelt vast dat niet alle apparaten of experimenten tot dan toe resulteren in nauwkeurige observaties waarmee de vorm van de Aarde correct te bepalen is. Hij geeft aan dat verstoringen op de slinger van groot belang zijn welke moeten meegenomen worden in de berekeningen. In de dissertatie selecteert hij experimenten die wel kunnen worden gebruikt op basis van hoe die verstoringen werden meegnomen. Vooral de proeven van Borda en Biot, Kater en Bessel waren nauwkeurig genoeg. Verder weerlegt hij in het eerste hoofdstuk de hypothese van Laplace: de Aarde bestaat niet uit een homogene substantie, maar is opgebouwd uit elliptische lagen, gecentreerd rond het massamiddelpunt met een toenemende dichtheid naarmate de diepte groter wordt. Iets wat we nu als vanzelfsprekend aannemen in de geofysica.

In Hoofdstuk 2 gaat Van Galen verder met het gebruik van de mathematische slinger om de zwaartekracht te meten. Hij beschrijft de verschillen tussen de mathematische slinger (van Huygens) en een "fysische"slinger (in de echte wereld) en hoe die aan elkaar te relateren. Dit hoofdstuk bestaat uit drie delen: Hij begint met een wiskundige afleiding van de Huygens slingerformule en de toepasbaarheid in een medium. Vervolgens bespreekt hij de meest nauwkeurige methodes van slingermetingen uit die tijd. Als laatst beschrijft hij vier correcties die moeten worden bepaald om de fysische slinger resultaten aan de mathematische slinger theorie te relateren en zo een nauwkeurige bepaling van de zwaartekracht te krijgen.

Met Euler's theorie van draaiende bewegingen van vaste voorwerpen komt Van Galen uiteindelijk tot een tweede orde differentiaal vergelijking voor een slinger. Deze wordt opgelost voor een slinger met een kleine uitwijking tot de beroemde vergelijking van Christiaan Huygens:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

In die tijd werd waarschijnlijk een andere definitie voor T (de periode van de slingerbeweging) gebruikt. Waar in onze tijd T voor een volledige beweging staat, werd er toen een halve slinger beweging beschreven. Dit omdat tegenwoordige formule (1) met 2π wordt aangeduid. In de dissertatie zelf worden verschillende woorden gebruikt voor de slingerbeweging. Het was dus een hele puzzel voor Marius en mij om uit te zoeken wat Petrus van Galen bedoelde. Maar we zijn er van overtuigd dat de tekst nu begrijpbaar is voor Nederlandse lezers. Toch blijft het lastig om dit zeker te weten. We zijn benieuwd naar uw bevindingen. Van Galen eindigt deze sectie met een bewijs dat de formule ook werkt in een medium (zoals lucht) zolang de uitwijking van de slinger gering is. Hierdoor is het dus mogelijk om de lokale zwaartekracht te bepalen door de periode van een fysieke slinger te meten met een bekende lengte en dit te relateren tot de enkelvoudige (of mathematische) slinger.

Van Galen geeft correct aan dat het bepalen van de lengte van de mathematische (of enkelvoudige) slinger a priori moeilijk tot onmogelijk is. Daarom "hebben de natuurkundigen geprobeerd om die [lengte] a posteriori te bepalen", schrijft hij. Om zwaartekrachtsmetingen enige waarde te geven is het noodzakelijk om niet alleen de tijdsmeting zo nauwkeurig uit te voeren, maar ook de lengte van de slinger te bepalen. Van Galen verklaarde dat drie verschillende methode en instrumenten nauwkeurig genoeg waren om de vorm van de aarde te bepalen: de methode van Borda en Biot, de methode van Kater, en de methode van Bessel.

Borda en Biot passen de techniek van een co-slinger toe om de meetfout van de tijdsperiode te verkleinen. Deze techniek wordt ook wel de coincidentie methode (1735) genoemd en werd hierna de meest nauwkeurige methode voor het bepalen van de slingertijd. Uiteindelijk zou bijna 300 jaar later, Vening Meinesz deze methode vervangen door het gebruik van een zee-chronometer, de Nardin 212, die een electronische aanpassing kreeg. De coincidentiemethode werkt als volgt. Om de slingertijd van de meetslinger te bepalen, wordt een tweede slinger opgelijnd met de eerste slinger. Deze tweede slinger is meestal van een klok die door astronomische waarnemingen geijkt was met een bekende slingertijd. Ze worden zo achter elkaar gezet, dat wanneer er door een (telescopische) kijker naar de twee slingers gekeken wordt, beide in rust exact achter elkaar staan. Deze uitlijning werd met een papiere embleem achter de slingers voltooid. Op dit papier staat bijvoorbeeld een kruis of blokkenschema om de uitlijning zo nauwkeurig mogelijk te maken. Deze situatie wordt de beginstand genoemd. Dan worden beide slingers in beweging gezet en kijkt men wanneer de twee slingers weer op het zelfde moment in de beginstand komen. Op dat moment wordt de tijdsmeting gestart. De wetenschapper begint met tellen van het aantal slingeringen. De slingerbewegingen zullen afwijken door de verschillende lengtes van de slingers. Na precies een slingerbeweging van de kortere slinger zullen beide slingers weer op hetzelfde moment in de beginstand komen; ofwel er is coincidentie. Op dat moment heeft de kortere slinger een slingerbeweging meer gemaakt en kan uit de bekende slingertijd van de tweede slinger en de ratio van de aantal slingeringen, de slingertijd van de eerste slinger worden bepaald. Hierdoor werder de tijdsmetingen veel nauwkeuriger en daarmee ook de zwaartekrachtbepalingen. De precissie van de meting werd bepaald door hoe goed de onderzoeker de coincidentie kon bepalen.

Het was erg moeilijk om de lengte van de slinger nauwkeurig te bepalen: de afstand tussen het draaipunt en het massamiddelpunt van de slinger. De slinger van Kater, de tweede methode die van Galen beschrijft, is een reversie slinger. Huygens liet al zien dat de slingerbeweging van een slinger om zijn rotatiepunt en om zijn massamiddelpunt een gelijke periode moest hebben. Door een stijve stang te gebruiken die op twee punten kon worden opgehangen waarvan een punt kon verschuiven, kon de onderzoeker de afstand van het rotatiepunt en het massamiddelpunt veel beter bepalen dan de klassieke bol aan een touwtje. Verder gebruikte Kater ook de coincidentietechniek om de tijdsperiode te bepalen. Hierdoor werd de slinger van Kater een van de nauwkeurigste opstellingen die er in die tijd bestond. De opstelling is nog steeds te bewonderen in het Teyler Museum in Haarlem.

De derde methode die van Galen beschreef is die van Bessel. Bessel gebruikte niet een reversieslinger maar twee verschillende slingers met een vaste bekende lengte er tussen. Bij beide voerde hij de coincidentiemethode toe. Om de vaste afstand tussen de twee slingers te bewerkstelligen, gebruikte hij een metalen koker die geijkt was met een Peruveaanse vadem; een bekende afstand bij een bepaalde temperatuur. Bij elke meting observeerde Bessel de totale lengte van twee slingers, de twee slingertijden en het feit dat de total slingerlengte gelijk moest zijn aan de andere slingerlengte plus de Peruaanse vadem. Hierdoor had Bessel vijf onbekende en vijf vergelijkingen, waarmee hij de zwaartekracht kon bepalen zonder de slingerlengte van de mathematische slinger te meten. Een voordeel, want het gebruik van de reversieslinger vereiste een sterke leercurve en alleen ervaren onderzoekers maakten nauwkeurige metingen.

Alleen metingen die gebruik maakte van deze drie methodes werden door Van Galen als goed genoeg beschouwd om de vorm van de Aarde te bepalen.

Het tweede hoofdstuk wordt afgesloten met een opsomming van correcties op de fysische slinger. Hiermee worden de resultaten gereduceerd tot een mathematische slinger waarmee dan de zwaartekracht bepaald kan worden. Allerlei verschillende mathematische correcties zijn ontwikkeld om het effect van luchtdruk, temperatuur en andere verstoringen op de meetslinger te verkleinen. Dit zijn cruciale verbeteringen om de vorm van de aarde te bepalen. Anders zouden de preciese metingen te afhankelijk zijn van omgevingsfactoren. Hierdoor moet de wetenschapper, naast zwaartekracht metingen, extra waarnemingen noteren, zoals de temperatuur, luchtdruk, en hoogte. Veel van die extra informatie mist bij historische metingen (vermeld in Tabel 1 van de dissertatie van Petrus van Galen) en maakt de meting dus onbruikbaar.

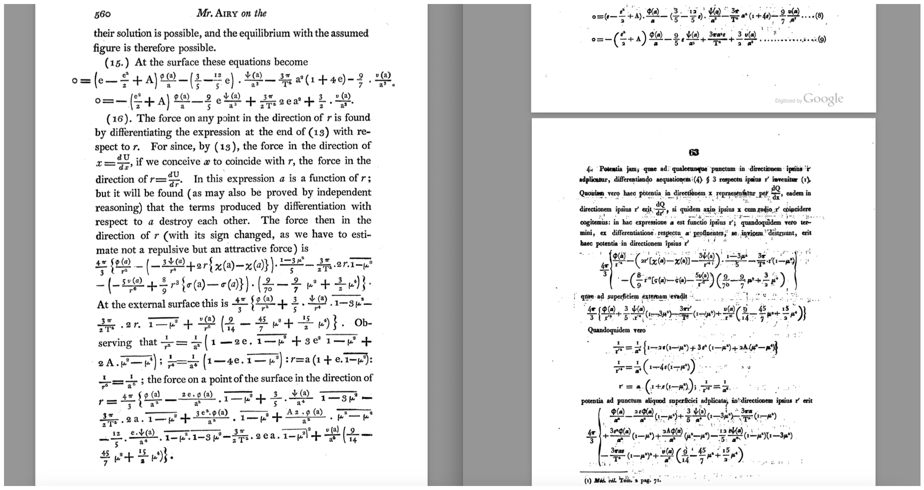
Correcties werden al besproken door Huygens in zijn *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum* uit 1673. Deze schreef dat de observatieslinger gecorrigeerd moest worden voor de niet oneindig-kleine-afwijking en de uiteenzetting van de slinger door temperatuurverschillen. Lulof voegt (in 1756) nog de reductie tot een vacuüm toe in zijn onderzoek, beschreven in *Proefnemingen over de langte van den enkelen slinger te Leiden*. Lulof deed verschillende metingen met een thermometer en een barometer. Van Galen noemt in zijn thesis uit 1830 dat er een vierde correctie nodig is om observaties van de zwaartekracht gelijk te stellen aan elkaar: de reductie tot zeeniveau. Het laat zien dat Van Galen gemotiveerd was om de gelijkwaardigheid van de zwaartekrachtmetingen en zich goed bewust was van dat de hoogte van de meting effect heeft op de bepaling van de vorm van de aarde. Geert Noording (een Nederlandse promotieonderzoeker) beschrijft in 1870 over gelijkwaardige correcties in zijn dissertatie. Later, in 1929 publiceert Vening Meinesz in zijn "Theory and practice of pendulum observations at sea", ook een lijst van correcties:

- Correctie van de niet-oneindig kleine afwijking (Huygens)
- Correctie van de uitzetting van de slinger door temperatuur (Huygens)
- Reductie tot een vacuüm (Lulofs)
- Reductie naar het zeeniveau (van Galen)
- Effecten van horizontale, verticale, en rotaties op het meetapparaat
- Correctie van de drift in de chronometer
- Reductie van het Eötvös effect

Vening Meinesz laat zien dat er, behalve de correcties van Huygens en de reducties van Lulofs en Van Galen nog meer correcties moet worden toegepast als men de meting van de zwaartekracht zeer nauwkeuriger wilt krijgen. Dit illu-streert perfect hoe de wetenschapstechniek werkt en hoe vooruitgang betekent dat men het meetproces beter begrijpt en steeds meer verstorende elementen kan verwijderen of corrigeren. Ik heb hier alleen gekeken naar de Nederlandse publicaties over zwaartekracht onderzoek, maar natuurlijk gebeurde dit overal in de wereld. Wie wat uitvond of wie-wie beïnvloedde is moeilijk te achterhalen. Desalnietemin, door deze correcties en verbeteringen in techniek worden de slingerwaarnemingen steeds waardevoller, iets wat Van Galen ook sterk benadrukt in zijn dissertatie.

In hoofdstuk 3 beschrijft Van Galen de wiskunde die nodig is om met slingerwaarnemingen de afplatting van de Aarde te bepalen. Hier is een controversieelste aspect te vinden in de dissertatie. Van Galen begint bij de Poisson vergelijkingen van een fluïde ellipsoïde onder zijn eigen aantrekkingskracht en rotatie. Na veel mathematische handelingen volgt hoe de slingerexperimenten gebruikt kunnen worden om de afplatting van de Aarde te bepalen. En juist deze mathematische bepalingen zijn een exacte kopie van een eerder verschenen publicatie van de Engelse wetenschapper George Biddell Airy (1801-1892). Deze Fellow of Trinity werd aan het eind van 1826 tot Lucacian "professor of Mathematics"benoemd. In datzelfde jaar publiseerde Airy (in het Engels) het werk "On the Figure of the Earth", waarin een wiskundige afleiding wordt gegeven die op verschillende punten overeen komt met Van Galens hoofdstuk 3 uit zijn dissertatie.

Figuur 2 vergelijkt pagina 68 uit de dissertatie met het werk van Airy. De vergelijkingen laten een goede gelijkenis zien. Er is een grappig verschil te zien in



Figuur 2: Een vergelijking uit de publicatie van Airy en de dissertatie van Petrus van Galen, halverwege de afleiding om de zwaartekracht van een ellipsoide aarde te bepalen. Links een pagina in het engels van Airy en rechts het Latijn uit de dissertatie.

de wijze waarop de twee wetenschappers variabelen opschrijven die ze bij elkaar willen laten horen. Van Galen gebruikt hier ronde haakjes, iets wat tegenwoordige ook wordt gebruikt. Airy gebruikt, waarschijnlijk voor leesbaarheid, een streep boven de variabelen. Deze notatie wordt tegenwoordig toegepast om het gemiddelde van een variabele aan te geven. Verder lijken de vergelijkingen erg op elkaar. En zo is hoofdstuk drie in het werk van Petrus van Galen bijna stap voor stap te volgen in de publicatie van Airy.

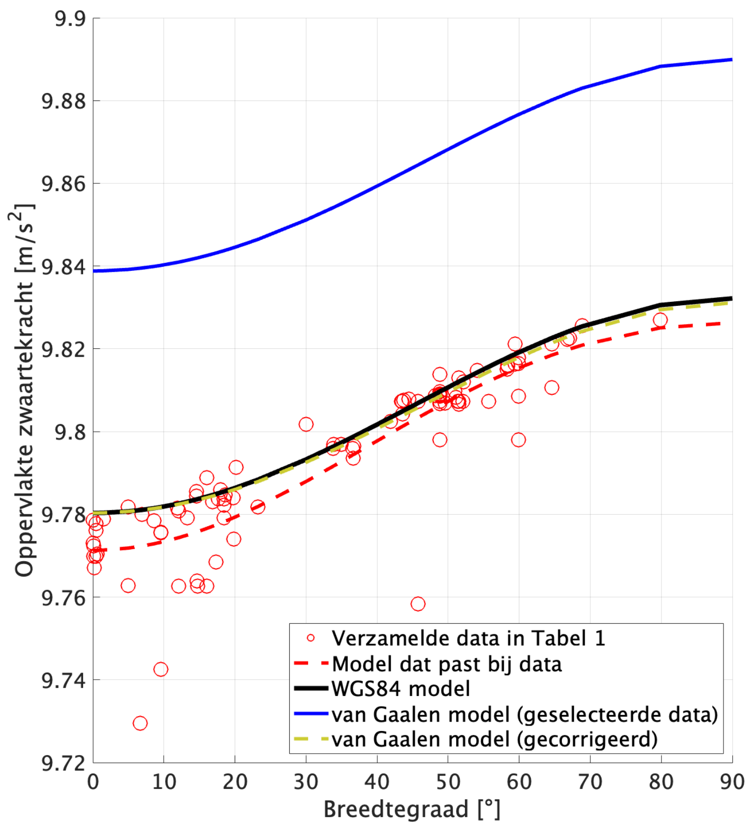
Deze niet onbelangrijke gelijkenissen laten zien dat beide heren op een of andere manier contact hebben gehad; op persoonlijke titel of via de academische literatuur. Algemeen was het in de negentiende eeuw gebruikelijk dat academici en universiteitsbibliotheken proefschriften uitwisselden met als doel verspreiding van nieuwe wetenschappelijke kennis en het bevorderen van academische samen-werking. Het is dus niet onwaarschijnlijk dat Petrus van Galen toegang had to de publicatie van Airy welke in de Philosophical Transactions of the Royal Society of London was gepubliceerd. Gezien de jaartallen is het meest waar-schijnlijke dat Van Galen de publicatie van Airy heeft gezien en de methode in zijn thesis heeft ondergebracht. In onze tijd zou dat een vorm van plagiaat zijn, zeker omdat er niet gerefereerd wordt naar Airy of de publicatie, maar ook in die tijd zal men er ook met gefronste wenkbrauwen naar gekeken zullen hebben. Was promotor Moll niet op de hoogte van het werk van Airy, of was het juist de aanleiding voor de start van het promotieonderzoek? Niettemin laat het onderzoek van Petrus van Galen enorm veel waarde zien door de hoe-veelheid observaties die hij heeft verzameld. Die collectie was waarschijnlijk de meest complete lijst van waarnemingen van het zwaartekrachtveld van de Aarde.

Petrus van Galen heeft toch metingen verzameld van Engelse, Franse, Duitse, Russische, Spaanse en andere Europese wetenschappers om zo een duidelijk en volledig beeld te krijgen van de vorm van de aarde.

Een ander interessant wiskundig detail is dat Van Galen de kleinste kwadraten methode gebruikt om al die data samen te voegen tot een waarde van de afplatting van de Aarde. Deze methode was 25 tot 30 jaar eerder onafhankelijk ontwikkeld door zowel Carl Friedrich Gauss als Adrien Marie Legendre, twee briljante Franse wiskundige, een techniekdie tegenwoordig nog veelvuldig in dataanalyse wordt gebruikt. Dit liet wederom zien dat Van Galen bekend was met de meest up-to-date wiskundige technieken in de wetenschap. Hier zullen goede academische relaties in Nederland zeker geholpen hebben.

De meest gebruikte waarde voor de afplatting van de Aarde is tegenwoordig 1/298.257223563 (gebruikt in het GPS referentie model WGS84). Van Galen bepaalde de waarde van de afplatting op 1/286.32 welke binnen de onzekerheden van die tijd vielen. Figuur 3 laat de veschillende modellen van de vorm van de zwaartkracht van de aarde zien. We vergelijken ons huidige model (zwarte lijn), ook wel WGS84 genoemd, welke wordt gebruikt in onze GPS-systemen, met de kennis van toen. De rode rondjes laten de zwaartekrachtmetingen zien die van Galen in Tabel 1 heeft opgenomen. Dit zijn metingen die hij niet goed genoeg achtte. De rode gestreepte lijn zou de vorm aangeven als deze metingen werden gebruikt. We zien een kleine afwijking met betrekking tot de zwarte lijn, maar vooral zien we dat de vorm anders is. De blauwe lijn geeft het uiteindelijke model in de dissertatie van Petrus van Galen aan. Op het eerste gezicht is dit model erg verschillend met een vrij grote afwijking naar boven. Dit is gek en zou van Galen ook zijn opgevallen. Als we er vanuitgaan dat er een typefout staat en ter correctie de juiste waarde gebruiken, zien we dat het gecorrigeerde model (geel gestreept) veel beter op het WGS84 model lijkt. Dit wordt tevens onderstreept door de afplattingswaarde uit de dissertatie. Door alleen de meetgegevens te gebruiken van hoge precissie en die op de correcte manier te corrigeren heeft Van Galen in 1830 de vorm van de Aarde met een hoge nauwkeurigheid kunnen bepalen. In een tijd van loutere brief-correspondentie en politieke tumult in de Lage landen, is dit een werk van groot aanzien. Ondanks het gebruik van wiskundig technieken die waarschijnlijk elders zijn ontwikkeld, laat het werk zien dat de toegepaste geodesie belangrijk genoeg was om een persoon tot doctor van de filosofie te verheffen.

Petrus van Galen bleef niet in de geodetische onderzoekswereld. Er zijn verschillende nautische werken te vinden in historische archieven met een schrijver genaamd P. van Galen (of soms van Gaalen). Zo, is zijn publicatie *Verzameling van vraagstukken uit de zeevaartkunde* uit 1836 het eerste werk wat er te vinden is na zijn dissertatie uit 1830. Dit werk behoort te worden gebruikt bij de cursus in de zeevaartkunde te Rotterdam. Een compleet ander onderwerp dan zijn geodetisch onderzoek met slingers. De wiskunde blijft een belangrijk thema in de publicaties van Petrus van Galen. Zijn publicaties zijn vooral wiskundige uiteenzettingen van navigatie op zee, zoals de "Wis- en natuurkundige Zeevaartkunde uit 1858, *Zeil-, Wind-, en Stroomkaarten en Routetabellen* uit 1859 en *Zeevaart- en Sterrekundige tafelen* uit 1863. Deze werken laten zien dat



Figuur 3: Vorm van de zwaartekracht van de Aarde ten opzichte van de breedtegraad. Het huidige model (WGS84) die bijvoorbeeld in GPS-systemen wordt gebruikt (zwarte lijn), wordt vergeleken met modellen van voor Van Galen (rood gestreept, rode rondjes zijn de data), Van Galen's model (blauw), en gecorrigeerd voor een absoluut verschil (geel gestreept).

van Galen het gravimetrisch onderzoek heeft losgelaten, en zich geheel gestort heeft op de zeevaartkunde.

Verder onderzoek liet ons zien dat Petrus van Galen de oprichter is van een maritime officiers opleiding aan de hogeschool van Rotterdam. Hij heeft op 20 juli 1832 een brief geschreven aan de toenmalige burgermeester en wethouders van Rotterdam om het nut van zo'n opleiding te bepleiten.

> ...: eenen opentlijken cursus te geven in de wiskunde en derzelver toepassingen; werktuig-, sterren- en zeevaartkunde, dat hij daartoe Rotterdam heeft gekozen uit hoofde van de bijzondere belangstelling, welke men aldaar bij steeds toenemenden bloei en welvaart terecht mag vooronderstellen in al hetgeen op de bevordering van kunsten en wetenschappen eenigen invloed kan uitoefenen,...

Tijdens zijn tijd in Rotterdam heeft van Galen de fysische geodesie achter zich gelaten en zich volledige gericht op de maritieme officiers opleiding voor koopvaardij. Hij kon zijn wiskundige kennis goed gebruiken om de Nederlandse koopvaardijofficieren te trainen in het navigeren op zee.

Zo op het eerste oog wordt het werk van Petrus van Galen niet als een baanbrekende ontdekking gezien, maar nader inspectie toont aan dat Petrus van Galen toendertijd een voortreffelijke dissertatie heeft geschreven. Een dissertatie, welke alle aspecten van de fysische geodesie zo mooi laat zien: de wiskunde, de meettechniek en correcties, dataacquisitie en het vermogen te denken over de planeet als één systeem. Bijna tweehonderd jaar later, zijn we nog steeds bezig om het zwaartekrachtveld van onze Aarde en andere planeten te begrijpen. Er blijven Nederlandse wetenschappers nog altijd in de voetsporen treden van Petrus van Galen.

6 Voorwoord van de vertaler

— door Marius Goossens

In 2018 ben ik, een classicus, in contact gebracht met de Delftse geodeet Bart Root. Hij is geïnteresseerd in de geschiedenis van zijn wetenschap en zijn aandacht was getrokken door een proefschrift uit 1830, Disputatio mathematica inauguralis de pendulo ejusque adplicatione ad telluris figuram determinandam (Over het gebruik van de slinger tot het bepalen van de vorm van de aarde), het proefschrift waarop een zekere Petrus van Galen toen aan de Universiteit van Utrecht tot doctor in de Natuurlijke Wijsbegeerte gepromoveerd is, en dat, zoals toen in sommige delen van de wetenschap hier en daar nog gebruikelijk was, in het Latijn was geschreven. Geïnteresseerd in eigenlijk alle geschiedenis als ik ben, heb ik, minstens zo overmoedig als bereidwillig, mijn kennis van Latijn aangeboden om dat proefschrift in het Nederlands te vertalen.

Het Latijn van Van Galen is het Neo-Latijn van wis- en natuurkunde. Dat is een ander domein dan dat van de antieke Latijnse teksten waar ik thuis ben. Zonder hulp had ik de vertaling van deze Disputatio inauguralis niet voor elkaar gekregen.

Ten eerste zijn er vertalingen van Huygens' Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum en Newtons Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Van Galen hanteert het Latijn waarin die teksten zijn geschreven. De online beschikbare vertalingen van die teksten hielpen mij te begrijpen waar Van Galen het over heeft als hij de mij bekende Latijnse woorden op een technische of wiskundige, mij onbekende, wijze gebruikt. Ducere is bijvoorbeeld een doodgewoon Latijns woord, maar in de betekenis vermenigvuldigen had ik het niet verwacht: ducere a in b bleek a vermenigvuldigen met b te betekenen.

Ten tweede: Waar Van Galen in het Latijn bevindingen, methodes en technieken weergeeft uit de Duitse, Engelse of Franse wetenschappelijke literatuur van zijn tijd, had ik zonder de oorspronkelijke Duitse, Engelse of Franse tekst het Latijn van Van Galen niet kunnen begrijpen, laat staan vertalen. Heel bruikbaar was op vergelijkbare wijze het proefschrift van Geert Noording uit 1870: Bepaling van de gedaante der aarde uit slingerproeven (akademisch proefschrift ter verkrijging van den graad van doctor in de wis- en natuurkunde, aan de Hoogeschool te Groningen). In zijn Geschiedkundig overzicht bespreekt Noording dezelfde materie en dezelfde literatuur en dezelfde onderzoekers als Van Galen in diens Historische inleiding, maar dan in het Nederlands. Daar heb ik heel veel aan gehad. Als ik het eerder had gevonden, had het me veel tijd en vruchteloos hoofdbreken bespaard.

Ten derde heeft Bart me geholpen mijn vertaling te begrijpen en er een zinnige vertaling van te maken. Dat was een interessante samenwerking: Ik wist te weinig van Natuurkunde, hij wist te weinig van Latijn, samen zijn we verder gekomen.

En toen, we schrijven inmiddels 2023, heb ik toegezegd mee te werken aan een publicatie van de vertaling. Tot dan toe had ik mijn vertaling kunnen toelichten en erover kunnen praten met Bart. Maar als gepubliceerde tekst zou de vertaling op zijn eigen benen moeten kunnen staan. Dat stelde heel andere eisen aan de vertaling en bracht mij in een heel andere positie. Mijn verantwoordelijkheid werd groter, evenals het ongemakkelijke besef van mijn gebrek aan de voor deze speciale tekst benodigde expertise.

Gravitas is het centrale begrip in dit proefschrift. Dat heb ik overal vertaald met zwaarte. Gezien het feit dat Van Galen naast gravitas ook van massa (= massa) en vis gravitatis (= zwaartekracht) spreekt, kreeg ik het niet over mijn philologische hart om gravitas af en toe, waar dat volgens Bart een natuurkundig adequate interpretatie was, met massa of met zwaartekracht te vertalen. Ik werd daarbij ook gehinderd door de mogelijkheid dat Van Galen zelf in het Nederlands zwaarte zou hebben gezegd waar hij in het Latijn gravitas schrijft. Door Franse en Duitse vakgenoten die wel in hun eigen taal schreven, werden toentertijd immers ook de woorden pesanteur en Schwere in de betekenis van gravitas gebruikt. Waar de theorie van een vak zich ontwikkelt, ontwikkelen zich vervolgens de bijbehorende terminologie en het gebruik daarvan. Terminologische precisie en theoretisch inzicht zijn samenhangende maar verschillende verschijnselen in de geschiedenis van de wetenschap. Of niet dan!? Misschien doet de vertaling van gravitas met zwaarte wel recht aan het feit dat Van Galen zijn proefschrift in 1830 schreef. Kortom: aan de hedendaagse, natuurkundig gequalificeerde lezer laat ik het over om bij zwaarte aan zwaartekracht of gravitatie of massa of versnelling of wat dan ook te denken.

Quantitas daarentegen heb ik niet overal met hoeveelheid vertaald. 'Cum parva stanni quantitate commixtam' bijvoorbeeld kan niet anders dan door 'met een kleine hoeveelheid tin vermengd' (pagina 17) vertaald worden; maar elders heb ik quantitas, de uitleg van Bart volgend, vertaald met grootte of waarde of grootheid. Hier heb ik aan het feit dat Van Galen naast quantitas (hoeveelheid, grootte/waarde, grootheid) ook gebruik maakt van de termen magnitudo (grootte, grootheid), valor (waarde) en dignitas (waarde), niet zo zwaar willen tillen. Om te bepalen of de relatie tussen quantitas en magnitudo en valor en dignitas bij Van Galen echt anders is dan die tussen gravitas en massa en vis gravitatis, had ik meer onderzoek moeten doen.

Voor zover de vorm van de tekst niet door de inhoud bepaald wordt, heb ik het karakter ervan zoveel mogelijk intact gelaten. Bewust heb ik niet geprobeerd om de Nederlandse vertaling vlotter, frisser, sprankelender, leesbaarder te maken dan het academische Latijn van Van Galen.

Het waren Bart Root en Joop Gravesteijn die mij op 20 september 2018 in Delft in de hal van de bibliotheek van de TU opwachtten en die mij door het tresoor hebben rondgeleid en met wie ik in de kamer waar de zwaartekrachtmeter van Vening Meinesz staat, heb zitten praten. Joop Gravesteijn was een innemende man. Zijn interesse en enthousiasme hebben mij zeker gestimuleerd om aan de vertaling van de Disputatio mathematica inauguralis de pendulo ejusque adplicatione ad telluris figuram determinandam te willen beginnen.

—

Vertaling van Petrus van Galen's

Disputatio mathematica inauguralis de pendulo ejusque adplicatione ad telluris figuram determinandam

1830

—

INAUGURELE WISKUNDIGE DISCUSSIE
OVER
DE TOEPASSING VAN DE SLINGER OM DE VORM VAN DE AARDE TE BEPALEN,
WELKE
Met toestemming van de Allerhoogste God,
op gezag van de Rector Magnificus
HERMAN BOUMAN,
Theol. dr. en Hoogleraar
MET DE GROTE TOESTEMMING VAN DE ACADEMISCHE SENAAT,
EN BIJ DECREET
VAN DE MEEST NOBELE ORDE VAN DE NATUURFILOSOFIE
VOOR MASTER- EN DOCTORGRAAD
DE HOOGSTE EER EN VOORRECHT VAN WISKUNDE EN NATUURFILOSOFIE,
IN DE ACADEMIE VAN UTRECHT
CORRECT EN JURIDISCH GEVOLGD
ONDERWORPEN AAN EEN OPENBAAR EN PLECHTIG ONDERZOEK
PETRUS VAN GALEN,
ARENACO-GELRUS.
OP DE DAG VAN 10 FEBRUARI 1830, om 12 UUR.

Motto

(Lucius Annaeus Seneca, naturales quaestiones liber 7, cap. 24-25)

Maar denk je dat in dit lichaam, dat van een enorme omvang en schoonheid is, tussen de ontelbare sterren die distinctie verlenen aan de nacht met hun gevarieerde bekoorlijkheid, er slechts vijf zijn die zich mogen roeren en dat de overige stilstaan als een vaste en onbeweeglijke menigte? Als iemand mij hier zou vragen: *Waarom is dan niet net als bij die vijf sterren, ook bij deze een baan waargenomen?*, dan zal ik hem zo antwoorden: veel is er waarvan we het bestaan erkennen, maar waarvan we de aard niet weten. Dat we een geest hebben, op wiens bevel wij voortgedreven en ingetoomd worden, zal iedereen toegeven; wat evenwel die geest is, die ons bestuurt en beheerst, zal niemand je uiteen kunnen zetten, net zo min als waar die zich bevindt. – dus kan de geest geen helder inzicht in andere zaken hebben zolang als hij nog naar zich zelf zoekt.

Voorwoord

Niets is er dat ons mensen in dit leven dichter raakt en meer in stand houdt, dan de door ons bewerkte en bewoonde aarde. Dat is zó waar en dat is door de instemming van zóveel eeuwen bevestigd, dat het niet in twijfel getrokken kan worden; vooral als we bedenken dat er sinds de oudheid vele en verschillende zogenaamde kosmogoniën zijn ontwikkeld, en dat het onderzoek naar de vorm van de aarde in de probleemstellingen van de Astronomie de eerste plaats innam en ook nu nog inneemt. Niet ten onrechte: een correcte kennis van de vorm van de aarde moet uiteraard als van het grootste gewicht beschouwd worden, aangezien die in zeer vele en wel zeer belangrijke kwesties van de astronomie een rol speelt, en ook bij het vaststellen van de maten van het oppervlak en bij het bepalen van de afmetingen van de aarde door niemand te onderschat mag worden. En des te minder lijkt zij te verwaarlozen, omdat uit haar alleen de kwantiteit is op te maken, die de grondslag moet verschaffen aan een voor alle volkeren van de aarde gemeenschappelijke maat, die tevergeefs tot op de dag van vandaag in de meter en in de lengte van de slinger is gezocht. Maar juist deze lengte van de slinger, die bij verschillende streken van de aarde is bepaald, kan vanuit alle tot nu gekende redeneringen, heel goed gebruikt worden voor het onderzoek naar de vorm van de aarde. En daarom is deze materie als onderwerp voor een disputatie volstrekt niet ongepast, dacht ik.

Maar voordat ik tot de disputatie zelf overga, wil ik met dankbaarheid herdenken en publiekelijk getuigen van de menslievendheid waarmee ik ben opgenomen door de leermeesters wier scholen ik heb bezocht, en wier voortreffelijke onderwijs ik heb mogen genieten. Of ik onder dezen aan U, hoogedele MOLL zeer geëerde Promotor!, de eerste plaats moet toekennen, daaraan twijfel ik in het geheel niet. Want onder uw aanvoering en leiding leek er niets om over te wanhopen: en uw bijzondere welwillendheid tegenover mij en de levenswijsheid die ermee gepaard ging, hadden op mij het effect dat ik de inspanningen waardoor de scherpte van de geest heel gemakkelijk op het ware wordt gericht, zowel graag begon als ook naar vermogen voortzette. – En niet minder voel ik me tegenover u verplicht, hoogedele SCHRÖDER!, omdat u geenszins geweigerd heeft om mij altijd met raad en adviezen te onderrichten. – Ontvangt voor dit wat ik u beiden verschuldigd ben, de dank waartoe ik in staat ben, en wees ervan overtuigd dat de weldaden die u mij in zo bijzondere mate heeft bewezen, en waarmee u mij niet minder dan met uw vriendelijke omgang heeft onderscheiden, nooit zal vergeten.

Maar ook u hoogedele SIMONS! herinner ik mij dankbaar en zal ik me altijd herinneren. Want vanaf de tijd dat u mij in uw huis opnam, was uw houding tegenover mij zodanig dat ik mij gelukkig prees niet alleen een bewonderenswaardige leermeester, maar, en wat ik nog meer waardeer, een vriend zoals velen zich wensen, te hebben gekregen; ik zal mijn best doen, om ervoor te zorgen dat de woorden van Ennius, "weldaden die slecht zijn geplaatst, beschouw ik als slechte daden", nooit met betrekking tot mij gezegd kunnen worden.

God geve dat jullie tot heil van de Academie en van het vaderland lang leven in gezondheid en geluk.

En tenslotte wil ik bij deze gelegenheid mijn vrienden, die met weinigen zijn in aantal, maar zich bewezen hebben in trouw, nadrukkelijk vragen om mij met dezelfde liefde als die ik tot nu toe van hen ervaren heb, te blijven bejegenen.

——<>——

Eerste hoofdstuk - Historische inleiding

Pagina 1
Iets wonderbaarlijks valt in de natuurlijke verschijnselen op: dat de alleringewikkeldste op eenvoudige principes berusten: de natuur schijnt alles in het werk te hebben gesteld, om de veelheid aan verschijnselen tegelijkertijd te verbinden met de eenvoud van de verschijnselen zelf, in die mate dat het een uit het ander afgeleid kan worden, en het ander tot het een herleid.

Onder de verschillende verschijnselen, die de waarheid hiervan bevestigen, hoort vooral de beschouwing van de slinger, waarover ik het hier wil hebben.

Een lichaam van welke aard dan ook, dat met een draad is opgehangen, waaraan een beweging wordt bezorgd, ziedaar een idee dat niet lang verborgen kon blijven voor het menselijk vernuft, dat voor observatie als het ware voorbestemd is, aangezien de mens dagelijks omgeven wordt door zulke zaken als waarmee hij op een zeer makkelijke manier zich van iets dergelijks een mentale voorstelling kon maken: en dit eenvoudige apparaat verschaft een handvat, niet alleen om zo nauwkeurig mogelijk de tijd te meten, maar, wat op het eerste gezicht heel wonderlijk lijkt, ook om de vorm van onze aarde te bepalen.

Pagina 2

Het eerste idee van een slinger wordt meestal aan GALILEI toegeschreven. EDWARD BERNARD echter vermeldt in een brief aan HUNTINGTON (1)[2], dat Arabische astronomen de deeltjes van de tijd met de slingerbewegingen[3] van de draad van een slinger hebben onderscheiden en gemeten. Hoewel het niet onze bedoeling is om te ontkennen dat de Arabieren de slinger gebruikten, zijn we toch van mening dat dit getuigenis niet genoeg is om aan hen zomaar en zonder meer de eerste notie van de slinger toe te schrijven. Het volgende lijkt daarentegen echter zeker: dat GALILEI niet van hen de slinger heeft overgenomen, maar uit eigen beweging een dergelijk apparaat heeft toegepast, en dat hij verder de eerste is geweest die de wetten van de beweging van de slinger heeft onderzocht. Vanaf zijn eerste kindsheid was hij gewoon om de verschijnselen van de natuur ijverig te observeren, en in het jaar 1583 neemt hij het isochronisme van de slinger waar in de luchters die in de kerk van Pisa hingen en die toevallig sterk bewogen werden (2)[4]; en doorgrondt hij de verhouding, die bestaat tussen de lengte van verschillende slingers en de tijd die ze nemen om de verschillende slingerbewegingen te volbrengen, namelijk dat de tijd in een wortelverhouding staat met de lengte (3)[5]: deze wet past hij vervolgens toe om de hoogte te bepalen van de plafonds van de kerk, door namelijk de slingerbewegingen van de zo even genoemde luchters te vergelijken met die welke in de zelfde tijd door een slinger van een bekende lengte volbracht worden.

Hoewel de zo even aangevoerde verhouding tussen de lengte van slingers en de tijd, door GALILEI niet wordt bewezen, aangezien die door hem uit de ervaring wordt afgeleid, kan toch uit de theoremata die bij hem bestaan over de natuurlijk versnelde beweging, het bewijs gemakkelijk gevonden worden; want twee slingers van ongelijke lengte die gelijke bogen beschrijven, zijn te beschouwen als twee vlakken die een ver-

[2] (1) Philosophical Transactions, Tom. 14 (1684) n° 158. pag. 567. Cff. WEIDLERI Historia Astronomiae pag. 220. Dutens Recherches sur l'origine des découvertes attribuées aux modernes. Tom. 2 pag. 117. BAILLY Histoire de l'Astronomie moderne. Tom. I pag. 246. DELAMBRE Histoire de l'aestronomie du moyen age pag.8.

[3] Noot van de vertaler: vibratio is vertaald met slingerbeweging, oscillatio met slingering, motus oscillatorius met slingerbeweging, oscillare met slingeren.

[4] (2) GALILEO GALILEI discorsi e demostrazione matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla Mecanica ed i muovimenti locali. Discorso 1. in ≫ ejus Operibus" ed. Florent. 1718. Tom. 2 pag. 538. 539. Cf. Tom. 3 pag. 171. 419. VIVIANI IN VITA GALILEI, quae exstat in ejus Oper. Tom. 1 pag. 63. praef.'

[5] (3) GALILEI Oper. Tom. 2 pag. 538.

pagina 3
schillende maar gelijkvormige helling hebben: verder zijn de tijden van de afdalingen door gelijke vlakken als de halve waarden van de hoogte van de vlakken (1)[6]: de tijden die deze twee slingers gebruiken om een halve slingering te volbrengen, zullen dus zijn als de halve waarden uit de afwijkingen van de bogen, of omdat deze bogen gelijk zijn aan elkaar, als de halve waarden van de stralen oftewel de lengtes van de slingers; maar het aantal van de slingerbewegingen in dezelfde tijd staat in omgekeerde verhouding tot de duur van de afzonderlijke slingeringen: dus zullen de lengtes van de slingers zijn als het kwadraat van het aantal van de slingeringen.

2. Het isochronisme van de slingerbewegingen, waarop dit hele bewijs rust, heeft GALILEI afgeleid uit het door hem zelf bewezen theorema (2)[7] "dat iets beweeglijks dat afdaalt aan koorden die wat voor hoek dan ook maken, alle in gelijke tijden doorloopt", vanwaaruit hij op basis van de ervaring concludeert, dat ook de bogen die bij de koorden horen in dezelfde tijd worden afgelegd, hoewel de tijd van de verplaatsing een beetje korter is over de bogen dan over de koorden; en daaraan scheen hem verder verbonden te moeten worden dat de snelste verplaatsing van alle van eindpunt naar eindpunt niet gebeurt via de kortste lijn, wat natuurlijk de rechte is, maar via een deel van een cirkel (3)[8]. Hoewel het theorema waarop deze conclusies worden gebaseerd, volstrekt waar is, en alle slingeringen van een slinger isochroon zijn, als de slinger niet over de bogen van een cirkel beweegt maar over de koorden hiervan, bevatten toch twee corollaria die daarvandaan geleid worden, slechts een vermeende vorm van waarheid. Wat de laatste namelijk betreft is al lange tijd bekend dat de snelste afdaling geen cirkel maar een cycloïde lijn volgt: maar dat van de eerste de onjuistheid aan GALILEI onbekend is gebleven, lijkt niet verwonderlijk, omdat aan zelfs de scherpste waarnemer die alleen op zijn waarneming afgaat, vanwege dat de scherpte van zijn blik beperkt is door zo nauwe begrenzingen, gemakkelijk kan ontgaan dat van een en dezelfde slinger de bredere uitslagen langzamer zijn dan de smallere.

HUYGENS was de eerste die met een experiment vaststelde dat de slingeringen van een slinger niet even langdurig zijn, maar

[6](1) GALILEI Dialog. 3 de motu naturaliter accelerato prop. 4. 5. in Oper. Tom. 2 pag. 593. 594

[7](2) Ibid.prop. 6. in Op. Tom. 2 pag 594. Cf. Dial. 1 in Op. Tom. 2 pag. 538.

[8](3) Dial. 1 Op. Tom. 2 pag. 538. Dial. 3 in Op. Tom. 2 pag. 627.

pagina 4
dat de slingeringen die over een kleinere boog geschieden, van een kortere tijd zijn. Maar als echter de breedte van alle slingerbewegingen volkomen constant dezelfde bleef, zou de ongelijkheid die we noemden van geen enkel gewicht zijn; maar omdat hij telkens een beetje meer of minder is, meende HUYGENS dat uit vele zeer kleine verschilletjes tenslotte een voldoende grote werd gevormd. Daarom zocht hij een oplossing waardoor de tijden van de bredere en de smallere heen en weer bewegingen van de slinger mathematisch altijd gelijk zouden uitkomen: hij nam het probleem op zich om een curve te onderzoeken, waarin de tijden van de afdaling waarin een beweeglijk iets, dat losgelaten wordt van een willekeurig punt op die curve, op het onderste punt is aangekomen, onderling gelijk zijn, en hij vond dat de cycloïde aan deze voorwaarde voldeed (1)[9]. Niet anders moest dus te werk gegaan worden, dan dat hij een slinger construeerde, die met zijn beweging de boog van een cycloïde beschreef: wat hij bereikte door hem verticaal op te hangen tussen twee dunne plaatjes, die volgens een semicycloïde gebogen waren, aangezien vanuit de theorie van de evolutie van krommen (2)[10] vaststond dat in de evolutie van een semicycloïde een andere beschreven werd die even groot als en gelijkvormig was aan de ontwondene. Maar die constructie hebben ze later verlaten: 1. omdat het door HUYGENS gevonden tautochronisme van de cycloïde, als men de zaak nauwkeuriger beschouwt, alleen in een vacuüm plaats heeft; 2. omdat in de praktijk de constructie van een perfecte cycloïde niet gemakkelijk is; 3. omdat een grote hoeveelheid wrijving niet te vermijden is, die voortkomt uit de steeds weer herhaalde bewegingen tegen de plaatjes; 4. omdat de beweging in een cycloïde tot slechts één wijze van ophanging is beperkt, natuurlijk die, waarbij de slinger aan een buigbare draad wordt opgehangen; 5. omdat een cirkelvormige slinger in alle praktische omstandigheden een zeer hoge nauwkeurigheid vertoont, zolang als de afwijking van de bogen, voor zover dat kan gebeuren, maar zeer klein is.

3. Wat tot dusver in het midden is gebracht, betreft slingers, die werkelijk in de natuur bestaan, ook al gaat de verhouding tussen de tijden en de lengtes slechts op voor slingers, waarvan de draden als onbuigbaar en als vrij van zwaarte, en de hele massa als in één punt samengevat

[9](1) HUGENII Horologii oscillatorii Part. 2. prop. 25, in ejus Operibus variis ed. 'SGRAVENSANDE 1724. Tom. 1 pag. 87.
[10](2) Ibid part. 3 prop. 6, in Op. var. Tom. 1 pag. 96.

pagina 5
beschouwd kunnen worden. Hoewel deze soort van slinger slechts een wiskundige voorstelling is, zou het volstrekt niet ongerijmd zijn dat alle andere daarop teruggevoerd kunnen worden, aangezien dan pas een punt van vergelijking beschikbaar was, waaraan alle eigenschappen ervan gerelateerd kunnen worden.

Dus iedere concrete slinger oftewel zo een als de natuur voortbrengt, kan worden beschouwd als bestaande uit ontelbare mathematische oftewel enkelvoudige slingers, als men deze beschouwt als opgehangen aan draden die een verschillende afstand hebben tot het punt van ophanging, en als de beweging van deze concrete slinger als het ware het midden houdt tussen alle bewegingen van de enkelvoudige slingers, die ontstaan als elk van deze op zich alleen aan een draad was opgehangen. Want twee krachten zijn hier bij aanwezig, die samen deze compensatie en distributie van de beweging voortbrengen: van de ene kant namelijk dalen alle gewichten, waaruit een concrete slinger gedacht wordt te bestaan, door de kracht van de zwaarte in dezelfde tijd af; maar van de andere kant worden ze door de onbuigbaarheid van de draden gedwongen om in de zelfde tijd de bogen te beschrijven, die proportioneel zijn tot de afstand vanaf het punt van ophanging. En daardoor worden door de (gewichten/massa's die) zich dichter bij het punt van ophanging bevindende (bogen) de zich er verder van bevindende (bogen) versneld, en deze (bogen) behouden op hun beurt de slingerbewegingen van de dichtstbijzijnde (gewichten). Er zal dus op de draad een punt zijn waarvan de beweging door de overige niet wordt vertraagd noch versneld, maar altijd dezelfde blijft, alsof het in zijn eentje aan de draad was opgehangen: dit punt wordt het middelpunt van de slingering oftewel van de beweging genoemd, en wordt noodzakelijkerwijs gevonden in alle vaste lichamen die rond een horizontale as slingeren. Met de echte navorsing van dit middelpunt is als eerste onze landgenoot HUYGENS begonnen, en zijn algemene theorie over dit middelpunt steunt op twee hypothesen: 1. dat als een willekeurig aantal gewichten door de kracht van de zwaarte begint te bewegen, het middelpunt van hun gezamenlijke zwaarte niet hoger kan stijgen dan waar het zich bevond toen het begon (1)[11]; 2. dat als iedere tastbare weerstand van lucht of iets anders verwijderd wordt, het middelpunt van de zwaarte van een bewogen slinger gelijke bogen doorloopt bij het dalen en bij het stijgen (2)[12].

De eerste hypothese wil niets anders, verklaart HUYGENS zelf, dan dat niemand ooit zou ontkennen, dat dingen die zwaarte hebben[13] uiteraard niet omhoog gaan (3)[14], en daarom

[11](1) Ibid Part. 4 Hyp. I in Op. Var. Tom. 1 pag.121. (nvdv: = Huygens Horol. osc. Deel 4 Hypothese I

[12](2) Ibid Hyp. 2 in Op. Var. Tom. 1 pag.123.

[13]Noot van de vertaler: dingen die zwaarte hebben is vertaling van gravia (zware dingen).

[14](3) Ibid pag. 121.

pagina 6

lijken mensen een ernstige vergissing te begaan als ze beweren dat HUYGENS de ratio van deze hypothese heeft afgeleid uit het feit dat anders een perpetuum mobile niet meer onmogelijk was (1)[15].

Die zo even aangevoerde hypothesen past HUYGENS toe met de bedoeling dat de aan GALILEI reeds welbekende waarheid (2)[16], namelijk dat "iets dat zwaarte[17] heeft, als het van zijn afdaling zijn beweging weer omhoog wendt, zal stijgen tot dezelfde hoogte als waarvan het kwam, door wat voor vlakke en op wat voor hellende aangrenzende oppervlakken het ook maar is gegaan", op algemene wijze ook op het middelpunt van de zwaarte kan worden toegepast, en daarvan dan ontneemt hij het volgende principe:

"Als een slinger die uit meerdere gewichten is samengesteld en vanuit rust is losgelaten, een willekeurig deel van een volledige slingering heeft volbracht, en men zich vervolgens verder voorstelt dat de afzonderlijke gewichten, als de band die hen samen houdt is verlaten, de snelheid die ze hebben gekregen naar boven omkeren, en stijgen zover als ze kunnen: dan zal als dit gebeurd is het middelpunt van de uit alle (gewichten) samengestelde zwaarte naar dezelfde hoogte zijn teruggekeerd, als die het had voor het begin van de slingering" (3)[18].

Laten we nu kijken, met welke redenering HUYGENS, waarschijnlijk door dit principe geleid, de afstand heeft bepaald tussen het middelpunt van de slingering en de as van de ophanging. Uit het principe zelf volgt onmiddellijk de vergelijking tussen de hoogte waarop het massamiddelpunt stijgt, en de hoogte waarop hetzelfde punt afdaalt, beide vermenigvuldigd met de som van de gewichten waaruit de slinger is samengesteld: het is volstrekt niet onterzake dergelijke verbanden te vinden tussen de bekende en onbekende grootheden waar het hier om gaat,

[15](1) MONTUCLA Histoire des mathematiques Tom. 2 pag. 427. Lagrange Mecanique analytique Tom. I pag. 233. De woorden van Huygens die een aanknopingspunt voor deze vergissing schijnen te hebben verschaft, zijn de volgende: "En inderdaad, als de makers van nieuwe machines, die vergeefs moeite doen om een eeuwige beweging te maken, deze (hypothese) zouden weten te gebruiken, zouden ze gemakkelijk zelf hun vergissing vaststellen, en zouden ze begrijpen dat iets dergelijks om mechanische redenen volstrekt niet mogelijk is". Hug. 1. 1. pag. 123.

[16](2) GALILEI Oper. Tom. 2 pag. 537. 583. Cf. HUG.. Horol. osc. Part. 2. prop. 9 in Op. var. Tom. 1 pag. 65.

[17]Noot van de vertaler: iets dat zwaarte heeft is vertaling van grave (iets zwaars)

[18](3) Horol. osc. Part. 4. prop. 4 in Op. Var. Tom. 1 pag. 126. Dit zelfde principe heeft later onder de naam van "behoud van levende krachten" (conservatinis potentiarum vivarum) de hoogste bekendheid gekregen in de mechanica.

pagina 7
waardoor met een andere redenering deze gelijkheid wordt uitgedrukt. Aan de ene kant had Huygens, volgend wat uit de theorie voortkwam was, afgeleid dat "Als enige grootheden allemaal dalen, of stijgen, ook al is het met ongelijke intervallen, de hoogtes van dalen of stijgen van elk, vermenigvuldigd met de grootheid zelf, een som van producten zullen geven gelijk aan die, welke ontstaat uit de hoogte van dalen of stijgen van het middelpunt van zwaarte van alle grootheden, vermenigvuldigd met alle grootheden."[19] (1)[20]: en als men dat toepast, is het ene lid van de vergelijking gelijk aan de som van de vermenigvuldigde hoogtes vermenigvuldigd met zijn gewichten. Voor het bepalen van het andere lid van de vergelijking dient de relatie die bestaat tussen (enerzijds) de afstand van het middelpunt van de zwaarte vanaf het punt van ophanging en (anderzijds) de onbekende afstand van het middelpunt van de slingering en de onbekende hoogte, tot waar een onbepaald punt als het snelheid heeft gekregen kan stijgen, en wordt dientengevolge de afdaling van het middlepunt van de zwaarte door deze grootheden als uitgedrukt beschouwd. En verder zijn de snelheden van de verschillende punten van een samengestelde slinger, wanneer ze door dezelfde band bijeengehouden worden, proportioneel met de verschillende afstanden vanaf het punt van ophanging: dientengevolge wordt tezamen met de bekende verhouding (2)[21] tussen de snelheden en de hoogtes bereikt dat de som van de met hun gewichten vermenigvuldigde hoogtes wordt uitgedrukt door middel van de functies van de afstanden van deze gewichten vanaf het punt van ophanging, en door middel van de functies van de onbekende grooteheden, die we zo-even hebben genoemd. En dan, wanneer elk van deze beide, tot dezelfde macht verhoogd, in beide leden van de vergelijking voorkomt, is het duidelijk dat de vergelijking slechts één onbekende bevat, en dat is de afstand van het middelpunt van de slingering vanaf het punt van ophanging, oftewel de lengte van de enkelvoudige slinger die isochroon is met de concrete, en gelijk is aan de hoeveelheid die men krijgt, als de afzonderlijke gewichten van de slinger vermenigvuldigd worden met de kwadraten van hun afstand van de as van de slingering, en de som van de producten wordt gedeeld door dat wat men krijgt door de som van de gewichten te vermenigvuldigen met de afstand van het gemeenschappelijke massamiddelpunt van alle vanaf dezelfde as van de slingering (3)[22]. En dat theorema levert het fundament voor de redenering die HUYGENS gebruikt om het middelpunt van de slingering van verschillende

[19] Noot van de vertaler: de vertaling van dit Huygens citaat (Horol. osc. IV. Prop. III) is van Ad Davidse. Zie de website van Ad Davidse (`https://adcs.home.xs4all.nl/Huygens/18/243-Horol.html`).

[20] (1) Ibid Part. 4 prop. 3 in Op. var. Tom. 1 pag. 125.

[21] (2) Horol. osc. Part. 2 prop. 3. 4 in op.var.Tom. 1 pag. 55. 77. GALILEI de motu naturaliter accelerato prop. 3.

[22] (3) Horol. osc. Part. 4 prop. 5. 6 in Op. var. Tom. 1 pag. 127—131.

pagina 8
figuren en lichamen te bepalen (1)[23]: en als die gevonden is kunnen alle slingers van welke soort ook herleid worden tot de mathematische, en op die manier alle met elkaar onderling vergeleken worden.

4. Tot hiertoe had HUYGENS de theorie van de slinger afgehandeld, en omdat hij aannam dat in alle streken van de aarde de lengte ervan gelijk zou zijn, heeft hij die voorgesteld als de modulus van een universele en eeuwige maat, waarvan hij het derde deel met de naam van urenvoet aanduidde. (2)[24]. Maar in dezelfde tijd als waarin hij in Paris de uitgave van zijn onsterfelijke werk HOROLOGIUM OSCILLATORIUM verzorgde, zond de Académie royale des sciences RICHER uit naar de gebieden die vlak bij de evenaar liggen met de opdracht, om daar astronomische en natuurkundige observaties uit te voeren. Toen die op het eiland Cayenne in augustus 1672 de overgang van de vaste sterren door de meridiaan observeerde, merkte hij proefondervindelijk dat zijn klok per dag 2'28"langzamer bewoog dan te verwachten was van de gemiddelde beweging van de zon. Vervolgens heeft hij de lengte van de enkelvoudige slinger die zijn slingerbewegingen in seconden volbracht, opgetekend, en die heeft hij toen hij weer in Frankrijk was, vergeleken met de lengte van de Parijse slinger, en hij vond dat die één en een kwart Parijse lijn korter was (3)[25]. Zodra HUYGENS dat nieuwe verschijnsel vernam, oordeelde hij dat dat verschil niet toegeschreven kon worden aan de grotere ijlheid van de lucht in een droge aardzone, maar dat het lichaam zelf lichter was aan de evenaar dan in de daarvan verwijderde streken, en daaruit concludeerde hij dat lichamen die zwaarte hebben[26] daar langzamer dalen dan in Frankrijk, en hij nam aan dat de reden hiervan kon voortkomen uit de dagelijkse beweging van de aarde, die omdat hij groter is een gebied naarmate het dichter bij de evenaar is, een evenredige impuls moet opleveren om lichamen uit het middelpunt weg te werpen, en om zo een deel van de zwaarte af te nemen (4)[27]. Aangezien echter, als de aarde zeventien maal sneller

[23](1) Ibid prop. 21. 22 Op. var. Tom. 1 pag. 154—171.

[24](2) Ibid Part. I. Op. var. Tom. 1 p. 36. part. 4. prop. 25. Op. var. Tom.I pag. 17. PICARD Mesure de la Terre Paris 1671. fol. art. 4. Cf. Histoire de l'Academie. Tom. 7 pag. 141.

[25](3) RICHER Observations astronomiques faites à Cayenne, in Hist. de l'Acad. Tom. 1 pag. 177. Tom. 7 pag. 320. Cff. NEWTONI Phil. nat. Princ. math. lib. 3 prop. 20. ed. HORSLEY Tom. 3 pag. 46. MOSTUCLA Hist. des math. Tom. 2 pag. 576. Tom. 4 p. 138. DELAMBRE Hist. de l'Astr. moderne Tom. 2 pag. 738.

[26]Noot van de vertaler: lichamen die zwaarte hebben is vertaling van corpora gravia (zware lichamen)

[27](4) HUYGENS Discours sur la cause de la pesanteur, in Opp. reliq. ed. 'S GRAVESANDE Vol. 1 pag. 111. Cf. DELAMBRE Hist. de 'Astr. mod. Tom. 2. pag. 557.

pagina 9
zou draaien dan nu, de centrifugale kracht aan de evenaar zou gelijk zijn aan de zwaarte (1)[28], en (aangezien) de krachten waardoor de lichamen van het middelpunt, waaromheen ze draaien, zich verwijderen, onderling zijn als de kwadraten van de zelfde snelheden (2)[29], is het noodzakelijk dat de dagelijkse beweging van de aarde $\frac{1}{289}$ deel af zou trekken van de zwaarte. Waaruit Huygens, rekening gehouden met de vermindering van de zwaarte, die de ratio volgt van de vierkante sinussen van de breedte (3)[30], en met de experimenten van RICHER, de lengte concludeerde van een enkele slinger op de pool en aan de evenaar. Maar hij beweert zelf dat op de eerdere experimenten, waarop deze berekening steunt, niet verder te vertrouwen is, en hij hoopt dat we in de loop van de tijd op nauwkeurige wijze zekerder zullen worden over die verschillende lengtes, zowel aan de evenaar als in andere hemelstreken; dat de zaak het immers stellig waard is dat zij met de grootste ijver wordt onderzocht, ook al plukken we er geen andere vruchten van dan dat we vanuit die theorie de bewegingen van de slingeruurwerken kunnen corrigeren en accommoderen aan het meten van de breedtes op zee. Verder: dat als gevolg van de ronddraaiende beweging van de aarde een slinger die in rust is aan een schietlood, zich moet verwijderen, en met de verticale een hoek maken; en hij vond uit dat die voor Parijs 5'44"was. Dat die afbuiging veruit tegengesteld is aan de mening, die altijd voor waar was gehouden, nl. dat een koord waaraan een lood hangt, recht naar het middelpunt van de aarde is gericht; dat die hoek echter van een dergelijk grootte is dat hij makkelijk kan worden waargenomen, nu eens door middel van astronomische waarnemingen, dan weer door middel van (waarnemingen) die met een libel worden uitgevoerd. Waarvan ik, zegt hij, als reden aanvoer, wat als een paradox beschouwd kan worden, nl. dat de aarde niet volkomen bolvormig is, maar de figuur heeft van een bol die naar beide polen afhelt, zoals het ongeveer een Ellips zou doen, die rond zijn kleinste as rondgetrokken is. Maar dat het geloofwaardig is, dat de aarde in een dergelijke vorm uitkomt, daar haar delen bijeengebracht zijn door de kracht van de zwaarte (4)[31].

5. De experimenten van RICHER rond tot de slinger, en in het verlengde daarvan rond de vermindering van de zwaarte die zich voordeed richting evenaar, hebben na HUYGENS ook aan NEWTON

[28](1) HUYGENS l. l. pag. 109.
[29](2) Ejusd. de vi centrifuga Theor. 3 in Op. var. Tom. 1 pag. 188.
[30](3) Op. rel. Vol. I pag. 114.
[31](4) HUGENII Oper. reliq. Tom. 1 pag. 115. 116.

pagina 10
een handvat verschaft om op theoretische wijze de vorm van de aarde te bepalen. Tot welk doel hij zich in het begin een vloeibare aarde met een sferoïde vorm voorstelde met een kanaal dat gaat van de pool naar het middelpunt en vandaar doorloopt naar de equator, en daarvan de evenwichtsvoorwaarden onderzocht (1)[32]. Vervolgens ontdekte hij dat voor een homogene en zich in rust bevindende aarde met assen volgens de verhouding 100 : 101, de zwaarte aan de pool zich verhoudt tot de zwaarte op een bol met een diameter van 100, als 126 tot 125: en dat volgens de zelfde redenering de zwaarte aan de evenaar op een sferoïde (zich verhoudt) tot de zwaarte op een bol met een diameter van 101, als 125 tot 126. Dus zal de zwaarte aan de evenaar het proportionele midden zijn tussen de zwaartes op de genoemde sferoïde en op de bol: dus zal de zwaarte aan de evenaar op een bol met een diameter van 100 zich verhouden tot de zwaarte aan de evenaar op de aarde, als 126 : $125\frac{1}{2}$; waaruit volgt dat de zwaarte aan de evenaar op het uiteinde van een langere as zal staan tot de zwaarte aan de pool in de verhouding van 500 : 501.

Dezelfde had NEWTON al bewezen dat de aantrekkingskracht van willekeurig welk punt op een straal van een homogene sferoïde, in dezelfde verhouding afneemt, als waarin de afstand van dat punt vanaf het middelpunt minder wordt (2)[33]; waaruit duidelijk wordt opgemaakt dat het hele gewicht van een willekeurige zuil die op de polen of aan de evenaar begint en zich tot aan het middelpunt van de aarde uitstrekt, gelijk moet zijn aan het product van die zuil en van de halve zwaarte die op de polen of aan de evenaar plaats heeft. De gewichten van deze zuilen zullen staan in de verhouding $\frac{1}{2}$. 101 . 500 : $\frac{1}{2}$. 100 . 501 = 505 : 501, waaruit duidelijk blijkt dat deze sferoïde als hij in rust is op geen enkele wijze in evenwicht kan zijn. Maar als die sferoïde rond zijn kleinere as is rondgedraaid, ontstaat aan de evenaar een centrifugale kracht, die recht tegengesteld is aan de aantrekkingskracht, die dus $\frac{4}{505}^{e}$e delen van de zwaarte moet aftrekken, om het fluïdum in evenwicht te brengen, waarvan de assen op hun beurt zijn als 100 : 101. Omdat zodoende de centrifugale kracht slechts $\frac{1}{289}^{e}$ deel van de zwaarte aan de evenaar aftrekt, wordt daaruit opgemaakt, dat daardoor een verschil tussen de assen wordt geproduceerd van $\frac{1}{229}$, en dat dus de aardassen zich verhouden als 229 : 230.

[32](1) NEWTONI Princ. lib. 3. prop. 19. ed. HORSLEY Tom. 3 pag. 35. Cff. HUBE de Telluris forma liber sing. Varsoviae 1780. pag. 4. LAPLACE Mécanique céleste. Tom. 5 pag. 3. DELAMBRE Hist. de 'Astr. du dix huitiéme siècle. pag. 17. GEHLER'S Phys. Wörterbuch. Leipzig 1827. Tom. 3 pag. 921.

[33](2) NEWTONI Princ. lib. 1. prop. 91. Corr. 3.

pagina 11

In de toevoeging bij zijn uiteenzetting over de oorzaak van de zwaarte, heeft HUYGENS, nadat de Principia Phil. nat. math. uitgegeven waren, het definiëren van de verhouding tussen de assen van aarde ter hand genomen. Daartoe gebruikt hij dezelfde beschouwing van een kanaal als NEWTON, maar hij heeft het beroemde principe van NEWTON, "dat de krachten van de aantrekking van volstrekt alle deeltjes naar verhouding zijn samengesteld uit het recht omgekeerde van de gekwadrateerde afstanden van de massa's", niet durven gebruiken, maar voert daarentegen aan dat de zwaarte dezelfde is in het midden van de aarde als op het oppervlak ervan (1)[34]. En op basis van die aanname ontdekte hij dat de diameter van de aarde tot de as die door de pool gaat, in een verhouding staat van 578 : 577.

Maar als we dan beide theorieën met elkaar vergelijken, waarbij κ staat voor de verhouding tussen de zwaarte en de centrifugale kracht aan de evenaar, dan is de verhouding van de assen en de zwaartes volgens de theorie van NEWTON bij benadering als $1 : 1 + \frac{5}{4}\kappa$; volgens de theorie van HUYGENS echter is de verhouding van de assen als $1 : 1 + \frac{1}{2}\kappa$, de verhouding van de zwaartes als $1 : 1 + 2\kappa$.

Hoezeer dus deze theorieën van elkaar verschillen, toch lijkt het het waard om te observeren (2)[35] dat in elk van beide de hoeveelheid van ellipticiteit en het verschil tussen de vermindering van de zwaarte vanaf de pool naar de evenaar, bij elkaar opgeteld, dezelfde is, namelijk gelijk is aan $\frac{5}{2}\kappa$.

6. Hoewel HUYGENS en NEWTON gezorgd hebben de theorie van de vorm van de aarde daarop te construeren, werd de waarneming van RICHER, nog lange tijd in twijfel getrokken, omdat door de experimenten die PICARD in Uraniborg (3)[36] en ROEMER in Londen in 1679 uitvoerden, bewezen leek te worden dat de lengte van een slinger altijd dezelfde bleef op het oppervlak van de aarde. Nadat echter VARIN, DES HAYES en DE GLOS (4)[37], toen ze bij het eiland Gorée voeren, tussen de secondenslinger daar, en de Parijse slinger, een verschil van twee lijnen vonden, en ze hetzelfde verschil bij Guadeloupe hebben bevestigd, kon de waarheid van deze zaak niet meer betwijfeld worden, hoewel de discrepantie die uit deze experimenten oprees,

[34](1) HUGENII Oper. reliq. Vol. 1. pag. 119.
[35](2) Mécanique celeste Tom. 5 pag. 5.
[36](3) PICARD Voyage d'Uranibourg art. 6. Mém. de l' Acad. Tom. 7 pag. 2o8.
[37](4) Mém. de l'Acad. Tom. 7 pag. 451. 456.

pagina 12

als ze met die van RICHER vergeleken werden, scheen aan te geven, dat de gevonden lengte van de enkelvoudige slinger nog altijd helemaal niet weinig afweek van de ware. Hierna berichtte (1)[38] COUPLET toen hij in 1682 naar Lissabon voer, dat zijn slingeruurwerk, dat hij in Parijs met de gemiddelde beweging der zon had gelijk gezet, daar per dag 2' 13" langzamer bewoog, en bij Paraiba 4'12" in 24 uur: daaruit volgt, dat een secondenslinger, in Lissabon 1 $\frac{1}{3}$ lijn, en in Paraiba 2 $\frac{5}{9}$ lijn korter was dan in Parijs. In de jaren 1699 en 1700 heeft DES HAYES toen hij weer naar America voer, op de eilanden Cayenne en Grenada de lengte van de slinger bepaald op 438^{lin},5, op het eiland Christophorus op 438,75, en op het eiland St Dominique 439^{lin}. En in het jaar 1704 heeft FEUILLÉE in Porto-bello in America vastgesteld dat de lengte van de secondenslinger, 437 $\frac{5}{12}$ was, en op het eiland Martinique 437 $\frac{10}{12}$ lijnen. Vervolgens heeft DE L'ISLE DE LA CROYERE in het jaar 1728 gemeld dat de lengte van de slinger in Archangelsk (2)[39] 440^{lin}, 653 was.

Hoewel de eerdere en grovere experimenten in het algemeen een zekere vermindering van de zwaarte als men van de pool naar de evenaar ging, bevestigden, was hun absolute accuraatheid allerminst te vertrouwen, aangezien er bijna geen enkele omstandigheid van vermeld wordt, en sommige, die op de zelfde plaatsen gedaan waren, onderling zo verschilden, dat ze vaak eerder het tegendeel leken te bewijzen.

7. In het begin van het jaar 1735 begon zich een nieuwe periode te ontwikkelen in het bepalen van de lengte van de slinger. De Académie royale des sciences zond BOUGUER, GODIN, CONDAMINE naar het gebied bij de evenaar, en MAUPERTUIS en CLAIRAULT en anderen naar de noordpool, om eindelijk de kwestie van de vorm van de aarde op te lossen, die zoveel hoofdbrekens had opgeleverd, sinds CASSINIS (3)[40], bij het opmeten van de meridiaan in het gebied van Parijs en van Straatsburg, had laten weten dat de vorm van de aarde bij de polen niet platter, maar integendeel bij de polen hoger was, maar bij de evenaar ingedrukter. Daarom is naar het tegenovergestelde deel van de aarde een nieuwe missie uitgevoerd, om daar tegelijk met de maat van de meridiaan, de lengte van de slinger te verkennen.

[38] (1) Ibid 1700. pag. 116.
[39] (2) Comm. Acad. Petrop. Tom. 4 (1729) pag. 328.
[40] (3) JACQUES CASSINI de la grandeur et de la figure de la Terre Paris 1720. Cf. MONTUCLA Hist. des math. Tom. 2 pag. 572.

Pagina 13
Voordat deze expeditie zich echter naar de genoemde gebieden begaf, heeft DE MAIRAN zich voorgenomen om zo exact mogelijk de lengte van de slinger in Parijs op te sporen, zodat een vergelijking gemaakt kon worden met de door de académiciens te ondernemen waarnemingen (1)[41].

Aangezien nog lange tijd de meesten die de lengte van de slinger onderzochten, dezelfde methode als DE MAIRAN gebruikten, wil ik graag met weinige woorden aangeven waarin zijn manier van waarnemen bestaat. Hij heeft er voor gezorgd dat de proefslinger de enkelvoudige slinger zo dicht mogelijk benaderde: daartoe gebruikt hij een bol, van lood of van messing, die aan een zeer dunne draad, van Amerikaanse agave, hangt; en die ophanging vindt bij de loden bol plaats door met behulp van een mes een deel van het oppervlak op te lichten zonder het te verwijderen; en bij de bol uit messing, door het aanbrengen van een schijf die is gefabriceerd van fijn geweven stof, door het midden waarvan, waar een opening zit, een draad van agave getrokken wordt, die aan het oppervlak wordt bevestigd met lijm, die aan de bol wordt geplakt. Het bovenste deel van de draad hangt aan een stalen klem, die uit twee plaatjes is samengesteld, die het bovenste uiteinde van de draad strak vasthouden, en die de draad met behulp van schroeven, al naargelang het inzicht het eist, omklemmen. – De methode waarmee de vergelijking van de slingerbewegingen van een slinger met die van een uurwerk wordt uitgevoerd door het tellen van de afzonderlijke slingeringen, een methode die schuld moet zijn aan zeer veel fouten, is door DE MAIRAN als eerste vervangen door een andere manier van aanpak. Hij brengt namelijk een slinger waarvan de lengte niet veel verschilt van een secondeslinger, eerst in overeenstemming met de slinger van het uurwerk waarmee het vergeleken wordt: vervolgens verdwijnt deze overeenstemming, totdat beide in een geheel tegengestelde beweging staan, zodanig dat als de een het linker uiteinde van de slingering bereikt, de ander bij het rechter uiteinde aankomt: dan herkrijgen ze geleidelijk hun overeenkomende beweging, totdat ze tenslotte op het zelfde tijdsmoment het hoogste punt van de slingering aan een en dezelfde kant bereiken. Tussen de eerste en tweede samenloop, wint of verliest de proefslinger ten opzichte van het uurwerk twee slingeringen, al naargelang hij korter of langer is dan de secondeslinger; en zo is voor het vin-

[41] (1)DE MAIRAN Experiences sur la longueur du Pendule à secondes à Paris in >> Mem de l' Acad. 1735. pag. 153—220.

pagina 14
den van het aantal slingeringen, dat de slinger aflegt, niets anders nodig dan dat precies het tijdsmoment wordt waargenomen waarop dergelijke samenvallingen[42] plaats hebben: en als dat gedaan is, als de beweging van het uurwerk bekend is, heeft men door een eenvoudige verhouding het aantal slingerbewegingen dat de proefslinger in een bepaalde tijdsruimte volbrengt.

Ongeveer deze manier van aanpak om de lengte van de slinger te bepalen, hebben de Académiciens in de tropische streken toegepast. GODIN (1)[43] heeft bovendien een machine gebruikt waarmee GRAHAM al in Londen en CAMPBELL op het eiland Jamaica waarnemingen hadden gedaan (2)[44], bij welke machine de slinger bestaat uit een koperen draad, waaraan een bol wordt vastgemaakt die ook van koper is; de ophanging aan de bovenkant wordt gemaakt met behulp van een stuk staal dat lijkt op een mes, en dat staat op twee stalen steuntjes, op twee punten, die de as van de beweging van de slinger vormen.

BOUGUER gebruikt in plaats van een bol een gewicht dat samengesteld is uit twee afgehakte kegels die aan de kant van de grootste basis verbonden zijn: hij heeft als eerste het idee geopperd van een invariabele slinger (3)[45]; als eenmaal de lengte van de proefslinger is bepaald, gebruikt hij die op verschillende plaatsen op zodanige wijze, dat hij zonder dat de lengte ook maar enigszins is veranderd, slechts het verschil waarneemt dat optreedt in het aantal slingeringen. En daardoor wordt ook vermeden dat de maat anders iedere keer, hetzij aan het begin hetzij aan het eind van de proef, ingesteld moet wordt: dus als de maat van de slinger eenmaal genomen is, verdwijnen ook de fouten die aan eenmalige experimenten kunnen kleven.

LA CONDAMINE heeft behalve de slinger die volgens de regel van DE MAIRAN was geconstrueerd, ook, in navolging van BOUGUER, de invariabele slinger genomen, die bestaat uit een eenvoudige staaf van staal, aan het uiteinde waarvan een loden lens is vastgemaakt; maar aan het bovenste uiteinde kruisgewijs een mesvormig stuk is vastgemaakt, waarvan het scherp rust op twee stalen steuntjes, die met een cilindrische vorm de slinger ondersteunen (4)[46].

---

[42] Nvdv: samenvallingen < coincidentiae

[43] (1) Mem. de l'Acad. 1735. pag. 5o6.

[44] (2) Philosophical Transactions 1734 pag. 302.

[45] (3) Mem. de l' Acad. 1735 pag. 527 ;1736 Hist. pag. 116. BOUGUER figure de la Terre pag. 338.

[46] (4) Mem. de l' Acad. 1735 pag. 530; 1745 pag. 476; 1747 pag. 409. CONDAMINE Journal du Voyage fait à l' Equateur Paris 1751. pag. 144.

pagina 15
De plaatsen waar door deze drie Académiciens buiten Parijs, waar elk van hen voor het begin van de reis de lengte van de slinger had bepaald, hun experimenten hebben uitgevoerd, zijn Petit-Goâve op het eiland St Dominique en Panama. In Portobello zijn door BOUGUER en CONDAMINE waarnemingen gedaan, in Quito en bij de rivier Jama door BOUGUER en CONDAMINE; en bovendien door LA CONDAMINE alleen in Para en Cayenne. De lengte van de enkelvoudige slinger, die deze drie Académiciens, tot op de honderdste van een lijn overeenstemmend, aan de evenaar hebben gevonden (gelijk aan 439^{lin},21), die lengte is ter eeuwige nagedachtenis eraan, op een piramide, opgericht bij de stad Quito, gegraveerd (1)[47].

Maar als we dan hun experimenten onder elkaar en met de hoogte van de pool, waarop zij betrekking hebben, vergelijken, is behoorlijk duidelijk dat de zwaarte van aardse lichamen, bij het naderen van de evenaar en bij het zich verwijderen van het aardoppervlak, minder wordt.

MAUPERTUIS, die naar de noordpool afgevaardigd was, heeft bemerkt dat de Parijse slinger hetzelfde aantal slingeringen in Pello in Lapland 59",1 sneller aflegde dan in Paris per 24 gemiddelde zonne-uren. (2)[48], waaruit weer te concluderen is dat de zwaarte richting polen groter wordt.

In ongeveer dezelfde tijd (1738) heeft JAQUIER (3)[49] in Rome de lengte van een secondeslinger in de lucht gedefinieerd als gelijk aan 39,0974 Engelse duimen.

8. In het jaar 1738 heeft de Académie royale des sciences een prijsvraag georganiseerd over het wijken en opkomen van de zee (4)[50]. Van de ingezonden verhandelingen won ook die van MACLAURIN een prijs (5)[51] Daarin bewijst de auteur, dat als de aarde elliptisch is en homogeen, er in haar overal een evenwicht heerst, en dat de richting van de zwaarte overal haaks staat op het oppervlak, als slechts de assen ervan in omgekeerde verhouding zijn van de zwaartes, die er zijn bij de uiteinden van de assen.

[47](1) Mém. de l'Acad. 1747. pag. 515. CONDAMINE Journal du Voyage etc. pag. 99. 162.

[48](2) Mém. de l'Acad. 1737. pag. 465.

[49](3) NEWTONI Princ. ed. JAQUIER et LE SEUR pag. 115.

[50](4) Zie LAPLACE Mécanique celeste Tom. 5 pag. 6. 149. over de vier verhandelingen van BERNOULLI, EULER, MACL.AURIN, CAVALLERI mb.t. deze zeer gewichtige kwestie.

[51](5) Mém. de l' Acad. 174). Prix Tom. 4 pag. 195. MACLAURIN Treatise of fluxions §686.

Pagina 16
CLAIRAULT toont eerst met een synthetische redenering aan dat de hypotheses die NEWTON aangenomen had om de vorm van de aarde op te sporen, alleszins met de waarheid overeenstemmen (1)[52]. Vervolgens bewijst hij, volgens een analytische methode, vanuit algemene vergelijkingen over het evenwicht van vloeistoffen, dat de elliptische vorm van een vloeibare aarde voldoet aan een evenwicht, zolang als die niet veel van een bol verschilt; en dat dezelfde waarheid bevestigd wordt, door te stellen dat de aarde bestaat uit een elliptische kern met een of meerdere vloeistoffen bedekt, waarvan de dichtheid vanaf het oppervlak naar de kern toeneemt: vervolgens concludeert hij bij dit theorema (2)[53], dat de ellipticiteit van de aarde samen met het exces aan zwaarte op de pool ten opzichte van de zwaarte aan de evenaar, bij elkaar opgeteld, gelijk is aan de dubbele ellipticiteit van een homogene aarde (3)[54].

DON JORGE JUAN die samen met GODIN en DON ANTONIO DE ULLOA naar de tropische streken uitgezonden was om de grootte en de vorm van aarde te onderzoeken, heeft als eerste dit theorema van CLAIRAULT toegepast op de experimenten die ondernomen zijn met betrekking tot de lengte van de slinger, om vervolgens de afplatting van de aarde bij de polen met een berekening uit te rekenen (4)[55]. Het exces van de zwaarte op de pool ten opzichte van de zwaarte aan de evenaar, wordt gegeven uit het verschil tussen de lengte van de slinger aan de evenaar en op de pool: die neemt hij evenwel aan als bekend uit de waarnemingen van BOUGUER, LA CONDAMINE, GODIN en hemzelf in Quito; deze echter wordt na vergelijking van de experimenten die bij Guarico door hemzelf, in Parijs door GODIN, en in Pello door MAUPERTUIS zijn uitgevoerd, aangetoond door berekening met behulp van het theorema, dat al aan HUYGENS bekend was, volgens hetwelk de vermeerderingen van de zwaarte als men van de evenaar in de richting van de polen gaat, in de verhouding staan van het kwadraat van de sinussen van de breedte. En op basis daarvan concludeert hij uit het theorema van CLAIRAULT dat de ellipticiteit van een heterogene aarde 1/203 zal zijn.

9. In de reeks experimenten rond de lengte van de slinger, volgen nu die volgens de methode van DE MAIRAN werden gedaan door LA CAILLE bij Kaap

[52](1) Phil. Trans. 1737. pag. 19.

[53](2) CLAIRAUT Théorie de la figure de la Terre tirée des principes de l' Hydrostatique Paris 1743. pag. 250.

[54](3) De Ellipticiteit van een homogene aarde is gelijk aan 1/230 uitgaande van de theorie van Newton.

[55](4) DON J. JUAN y A. DE ULLOA Observaciones Astronomicas hechas de orden de S. Mag. en las reynos del Peru. En Madrid 1748. pag. 334.

pagina 17
de Goede Hoop, op het eiland Mauritius en in Parijs (1)[56]; door LE GENTIL in Parijs, Foulpointe, Manilla, Pondicherry (2)[57], en door LULOFS in Leiden (3)[58]. Wat betreft die eerste twee is op te merken dat het gewicht van die slingers bestaat uit twee afgehakte kegels die aan de kant van de grootste basis verbonden zijn: de experimenten zijn zo genomen dat de draad van agave steeds gelijk gemaakt werd aan een ijzeren maatstaf, waarvan de afmetingen met de Peruaanse vadem werden vergeleken, zodanig dat de lengte van de proefslinger op alle plaatsen de zelfde bleef (4)[59]. LULOFS wendde een bol aan, van lood met een kleine hoeveelheid tin vermengd: de slinger daarvan is variabel, zodat uit de waargenomen lengte die van de enkele secondeslinger moet worden afgeleid. Na vergelijking van de lengte, die hij als gemiddelde uit 14 experimenten had opgemaakt, met de lengte die BOUGUER aan de evenaar had gevonden, schat LULOFS dat de verhouding van de doorsneden van de aarde zal zijn als 439,07 : 441,7 ofwel als 177,3 : 178,36 (5)[60] Nu moeten de observaties rond de lengte van de slinger gememoreerd worden, die in

[56](1) LA CAILLE Mém. de l' Acad. 1751. pag. 436; 1754. pag. 108.

[57](2) LE GENTIL. Voyage dans les mers de l' Inde Paris 1751. Tom. 1 pag. 453. Tom. 2 pag. 327. 332. 592.

[58](3) LULOFS Proefnemingen over de langte van dem enkelen slinger te Leiden 1756 in >> Verhand. der Haarl. Maatsch. Tom. 3 pag. 419—508."

[59](4) MATHIEU heeft het op zich genomen om de experimenten van LA CAILLE en LE GENTIL, voor zover mogelijk, tot dezelfde fysieke omstandigheden te herleiden. En door beide volgens de methode van de gekwadrateerde minima met elkaar te vergelijken, heeft hij volgens het theorema van CLAIRAULT op basis van de observaties van LA CAILLE gevonden dat de de afplatting van de aarde $\frac{1}{284,4}$ zal zijn, dat echter op basis van de experimenten van LE GENTIL dezelfde afplatting $\frac{1}{290,6}$ is. Cf. DELAMBRE Hist. de l' Astr. du 18° siècle pag. 479. 701.

[60](5) LULOFS l.l. pag. 506. Aangezien in de experimenten van LULOFS noch rekening wordt gehouden met de afwijking van de bogen noch met de druk van de lucht, zal het moeilijk zijn om die tot dezelfde fysieke omstandigheden te herleiden als die van BOUGUER; maar als we de experimenten zoals ze ter beschikking staan, vergelijken met de observaties van BOUGUER bij de evenaar, vinden we vanuit het theorema van CLAIRAULT dat de ellipticiteit van de aarde $\frac{1}{340,8}$ is.

pagina 18
verschillende Russische gebieden werden gedaan, en dan bedoel ik natuurlijk die door GRISCHOW (1)[61] in Petersburg, in Arensburg, in Perona, in Tartu, Reval; door MALLET (2)[62] in Petersburg en bij Ponoi in Lapland; door RUMOUSKY (3)[63] in Selenginsk, Archangelsk en Kola. De gebruikte instrumenten zijn 1. de invariabele slinger, door LA CONDAMINE geconstrueerd, uit een enkele stalen staaf samengesteld; 2. de proefslinger, uit Parijs aangevoerd, waarvan het gewicht bestaande uit twee afgehakte kegels, aan een draad van agave hangt: met deze twee slingers werden op al de genoemde plaatsen, behalve Archangelsk en Ponoi, experimenten uitgevoerd; 3. Het astronomisch uurwerk, aan de slinger waarvan dezelfde lengte in acht is genomen als in Parijs; 4. het slingeruurwerk, waarvan de lengte van de slinger niet veranderd werd, toen hij van Kola naar Archangelsk werd vervoerd.

KRAFT heeft de analyse van deze experimenten beschreven, en nadat hij die allemaal tot dezelfde temperatuurgraad had herleid en ze zowel met elkaar als met de enkele secondeslinger in Parijs had vergeleken, heeft hij volgens de formule van CLAIRAULT gevonden dat de afplatting van de aarde $\frac{1}{293}$ zal zijn (4)[64].

Tenslotte als laatste in deze periode moeten we melding maken van die experimenten die aan het einde van vorige eeuw door Spanjaarden zijn gedaan. ALEXANDER MALASPINA kreeg een invariabele slinger mee bestaande uit een staaf van dennenhout, aan het ondereinde waarvan een lens was bevestigd, van messing; de slingerbewegingen van die slinger vergeleek hij met elkaar in verschillende gebieden van het noordelijke en zuidelijke halfrond, te Port Mulgrave, Nootka, Monterey, Cadiz, Macau, Acapulco, Manila, Umatag, Zamboanga, bij Port Egmont, op de eilanden St Helena en Concepcion, bij Montevideo, Port Jackson, op het eiland Vava'u, en te Lima (5)[65]

[61](1) Novi Comm. Acad. Petrop. Tom. 7 pag. 449. 465. 495. 514.

[62](2) Novi Comm. Acad. Petrop. Tom 14, II (1769) pag. 28. Cf. Phil. Trans. 1770. pag. 365.

[63](3) Novi Comm. Petrop. Tom. 11 pag. 474; ibid. Tom. 16 (1771) pag. 575. 583.

[64](4) Nova Acta Petrop. Tom. 7 (1789) pag. 226.

[65](5) Beobachtungen über die Schwere, welche in den Häfen von Europa, Amerika und Asien, auf dem stillen Meere und in Neuholland, während MALASPINA'S Weltumsegelung, mit dem unveränderlichen Pendel angestellt worden sind. Mitgetheilt von OLTMANS in >> CRELLE'S Journal für die reine und angewandte Mathematik' Berlin 1829. pag. 72.

pagina 19

10. We weten nu dat de theorie van CLAIRAULT over de vorm van de aarde beperkt is tot sferoïden die rond de kleinste as ronddraaien. Recentere meetkundigen echter, vooral LAGRANGE (1)[66], LEGENDRE (2)[67], LAPLACE (3)[68], hebben de zaak breder uitgebreid, en hebben onderzocht of er niet ook andere vormen aan een evenwicht konden voldoen; en uit hun onderzoekingen wordt duidelijk bewezen, dat de aarde inderdaad, als ze een ronddraaiende beweging heeft, op geen andere wijze in een toestand van evenwicht kan blijven, dan als aangenomen wordt dat ze zich in een dergelijke vorm verheugt, die ontstaat uit de omwenteling van een ellipsoïde rond de kleinste as.

Verder heeft LAPLACE, toen het theorema van CLAIRAULT (4)[69] was bevestigd, uit alle experimenten met betrekking tot de lengte van de slinger die we tot hiertoe hebben vermeld, plus die van DARQUIER in Toulouse, die van LIESGANIG in Wenen en die van ZACH in Gotha, er vijftien geselecteerd, namelijk, behalve de zo-even vermelde: de observaties van BOUGUER aan de evenaar, te Portobelo, bij Petit-Goâve en in Parijs, die van CAMPBELL op het eiland Java, die van LA CAILLE bij Kaap de Goede Hoop, die van LE GENTIL bij Petersburg, die van GRISCHOW bij Arensburg, die van MALLET bij Petersburg en bij Ponoi in Lapland, die van MAUPERTUIS bij Pello in Lapland; en vervolgens heeft hij door een berekening getoond dat de afplatting van de aarde bij de polen $\frac{1}{335{,}78}$ zal zijn (5)[70].

Als we echter alle observaties rond de lengte van de slinger die tot nu toe naar voren zijn gebracht, slechts bekijken zonder er iets anders uit te willen putten dan wat er werkelijk in zit, zal ons behoorlijk duidelijk zijn, dat, hoewel ze op zich het vermelden alleszins waard zijn (6)[71], ze toch voor het naar behoren oplossen van de kwestie van de vorm van de aarde, allerminst kunnen worden toegepast. Want willen dergelijke observaties daarvoor

[66](1) Mém. de l' Acad. de Berlin 1773. pag. 121.

[67]2) Mém. de l' Acad. 1784. pag. 370; 1789. pag. 372.

[68](3) Ibid. 1782. pag. 176; 1783. pag. 17. Cf. Mecanique céleste Tom. 2. pag. 73.

[69]4) Mém. de l' Acad. de Paris 1782. pag. 185. Cf. Mécanique céleste Tom. 2 pag 8. 102.

[70](5) Mécanique céleste Tom. 2 pag. 150. Cf. Mém. de l' Acad. 1789. pag. 42.

[71](6) Daarom zijn we van plan om alle experimenten die tot nu toe zijn gedaan, in een tabel te verzamelen, opdat ze zodoende later nog vergeleken kunnen worden met andere op dezelfde plaatsen gedane experimenten.

pagina 20

geschikt zijn, dan is vooral vereist, dat ze allemaal niet alleen met de grootste zorg en nauwgezetheid zijn gemaakt, maar dat ook dezelfde graad van accuratesse aan alle kan worden toegekend. Wat betreft het eerste: dit kunnen we aan sommigen weliswaar niet ontzeggen, maar aan andere kan het niet worden toegekend: wat betreft het tweede, uit de aard zelf van de zaak denken we dat makkelijk bewezen wordt dat niet alle op dezelfde manier te vertrouwen zijn, aangezien fouten die door anderen zijn begaan, niet dan geleidelijk en langzamerhand worden bemerkt en vermeden.

De meeste experimenten zijn gedaan met draden van agave, waarvan men aanneemt dat ze tijdens het experiment aan geen enkele uitzetting, aan geen enkele kromming onderhevig zijn, maar dat is volgens ons niet zo makkelijk in overeenstemming met de waarheid: verder moet bij deze experimenten die op deze manier m.b.v. een in een klem geklemde agave draad zijn gedaan, de lengte van de slinger altijd langer dan de juiste[72] gemaakt worden, omdat het middelpunt van de draaiing, bij deze wijze van aanpak, te weinig onder het punt van ophanging lijkt gevormd te worden, zodat dergelijke waarnemingen weliswaar onder elkaar vergelijkbaar, maar niet vergelijkbaar met anderen gemaakt kunnen worden. Bij zeer vele moet bovendien de ophanging als zeer onvolmaakt beschouwd worden, omdat zo meestal wordt bereikt dat de slinger niet altijd in het zelfde verticale vlak blijft, zodat hij bovendien aanleiding geeft voor een hoeveelheid wrijving die groter is dan zou mogen.

Verder is het noodzakelijk dat alle waarnemingen onderling vergeleken en alle tot dezelfde fysieke omstandigheden herleid kunnen worden.

Om het eerste vereiste te vervullen, moeten alle slingerbewegingen van de slinger isochroon zijn, of tenminste aan een isochronisme te relateren. Alle proefslingers echter die tot hiertoe zijn vermeld, volgen een circulaire beweging, waarbij men dus aanneemt dat de bogen van de minste afwijking gelijk zijn aan cycloïde bogen. Maar de afwijking van de bogen wordt geleidelijk kleiner, zodat het niet kan gebeuren dat die in de hele loop van de waarneming steeds als dezelfde gehouden wordt; maar als deze gelijkheid van de afwijking weggenomen wordt, wordt ook het isochronisme opgeheven: dus is het vereist om met de afwijking rekening te houden; wat echter door de meesten zeer onvolmaakt wordt gedaan, door sommigen geheel en al wordt verwaarloosd.

Om bovendien aan het tweede vereiste te voldoen, is het noodzakelijk de lengte van de slinger of de slingerbewegingen te herleiden tot een luchtledige ruimte. De werking van de zwaarte wordt immers gehinderd door de lucht, zodat de lengtes van in de lucht isochrone slingers niet

[72] Nvdv: langer dan de juiste < justa longior

pagina 21
in dezelfde mate accuraat zijn als die van slingers die in een vacuüm met gelijke intervallen oscilleren, dat wil zeggen: in de mate van de zwaarte zelf. Maar reeds BOUGUER (1)[73] heeft opgemerkt dat de tijd van een tamelijk kleine slingering door de luchtweerstand echter op geen enkele manier wordt veranderd, aangezien de tijd van de slingering bij het afdalen van de boog met dezelfde mate groter wordt, als waarmee hij bij het bestijgen van de boog minder wordt. De atmosfeer is echter ook op een andere manier van invloed op de beweging van de slinger, omdat de slinger in de lucht een afname van zijn gewicht ondervindt: dat verlies is echter een functie van de dichtheid van de lucht, die weer variabel is al naargelang de druk en de temperatuur van de lucht; het is dus noodzakelijk dat men rekening houdt met de specifieke zwaarte van de gebruikte slinger en met de hoogte van de barometer op het tijdstip van de waarneming. Elk van beide wordt in de genoemde waarnemingen meestal verwaarloosd, of er wordt niet in duidelijke bewoordingen melding van gemaakt.

Daarom is het dus duidelijk dat er van al deze experimenten geen enkele is waaraan niet een of andere onherstelbare fout kleeft. Als gevolg waarvan de experimenten noch onderling vergeleken, noch aan dezelfde fysieke omstandigheden gerelateerd kunnen worden. De onzekerheid die hieruit moet ontstaan, is weliswaar als klein te beschouwen vanwege de geringe grootte van de correcties zelf, maar blijft altijd zeer groot als men tot zekere conclusies wil komen, aangezien het verschil dat bestaat tussen de lengte van de slinger aan de evenaar en die op de pool, van een zo geringe grootte is, dat inderdaad elk van beide lengtes zo exact mogelijk bekend moet zijn als men vandaaruit de kwesties met betrekking tot de vermindering van de zwaarte en tot de vorm van de aarde met de hele mate van zekerheid die daarbij past, adequaat wil aanpakken.

11. Dat het dus een zeer willekeurige[74] denkwijze was, dat sommigen op de aangebrachte waarnemingen, om er een conclusie uit te trekken over de vorm van de aarde, correcties hebben willen toepassen, daar hoeven we niet op te wijzen. Omdat die immers in de meeste gevallen slechts door gissing konden worden verwezenlijkt, omdat meestal de elementen ontbraken volgens dewelke ze uitgevoerd hadden moeten worden. Door de congruentie die er was tussen de afplatting van de aarde die zo uit de lengtes van de slinger was geconstrueerd, en die volgde uit de vergelijking van de graden van de Franse en de Peruaanse meridiaan,

[73](1) BOUGUER Figure de la Terre pag. 341.
[74]Nvdv: willekeurige < arbitrariam

pagina 22
leek aan deze conclusie aanvankelijk zeer groot vertrouwen toegekend te moeten worden; en zo zou toch nog lange tijd het gezag van LAPLACE in deze zaak zijn blijven bestaan, als niet andere en volmaaktere waarnemingen, ontnomen aan de onregelmatigheden van de maan, hadden aangegeven dat de hoeveelheid van de afplatting van de aarde kleiner was dan die hoorde te zijn. Daardoor is bij de beoefenaren van de Fysica en de Astronomie meer en meer het verlangen gewekt naar experimenten rond de lengte van de slinger, waaraan een groter vertrouwen en gezag kon worden toegekend, en die met grotere zorg en nauwgezetheid werden uitgevoerd, opdat eindelijk de kwestie van de vorm van de aarde, die door middel van de lengte van de slinger zeer exact bepaald leek te kunnen worden, met de hoogste verschuldigde waarschijnlijkheid, werd opgelost.

En vanaf deze tijd is het heel moeilijk om uit te maken of deze zo algemeen geuite wens, danwel de krachtsinspanning om de hoogste perfectie te bereiken waarop het karakter van alle voortbrengselenen van deze tijd berust, de inspiratie waren voor de experimenten rond de lengte van de slinger, die met zoveel zorg en nauwgezetheid zijn uitgevoerd, dat ze niet alleen een grotere onderlinge congruentie van de conclusies opleveren dan de vroegere, maar ook zeer geschikt lijken te zijn voor een oplossing van het voorliggende probleem.

Onder deze experimenten moeten als eerste vermeld worden die van de Fransen, BIOT, ARAGO en anderen, die zij bij de gelegenheid van het meten van de graad in Frankrijk, uitvoerden van Duinkerken tot aan Formentera: die zijn vervolgens gekoppeld aan de waarnemingen die gedaan zijn door BIOT bij Leith en Unst in Engeland en Schotland (1)[75]. De methode die ze bij deze aanpak van de waarneming volgden, was dezelfde als die reeds BORDA en CASSINIS toepasten, toen ze in het observatorium van Parijs (2)[76] de lengte van de slinger bepaalden. Van de proefslinger, bestaande uit een bol van platina waar een metalen draad aan wordt vastgemaakt, worden de slingeringen vergeleken met de slingeringen van het astronomisch uurwerk: als daarna de lengte ervan is genomen, wordt met een berekening de lengte uitgerekend die een enkelvoudige decimalesecondeslinger heeft.

Hierna besloten de Engelsen de door ROY uitgevoerde graadmeting, die bij elkaar een zo grote hoeveelheid van afplatting had opgeleverd, dat ze met de andere niet verzoend leek te kunnen worden, te

[75](1) BIOT Astronomie Physique Tom. 3 add. pag. 164. conn. des Tems 1816. pag. 330. Base du systême métrique Tom. 4 pag. 573.

[76](2) Base du systême métrique Tom. 3. Cf. DELAMBRE Astronomie Tom. 3 pag. 582.

pagina 23
bevestigen: en daarom te vergelijken met die hoeveelheid van samendrukking, die uit de lengte van de slinger volgde: en daarom hebben ze KATER de opdracht gegeven, om deze zaak, die zoveel hoofdbrekens opleverde, eindelijk tot het gewenste einde te brengen (1)[77]. Uit het principe, door HUYGENS (2)[78] algemeen bekend gemaakt, volgens hetwelk "het midden van de slingering en het ophangpunt verwisseld kunnen worden", had reeds BOHNENBERGER een constructie aangegeven voor een proefslinger (3)[79], die kon dienen om de lengte van de secondeslinger door middel van de afstand tussen het midden van de slingering en het ophangpunt te vinden. De slinger wordt namelijk omgekeerd, zo dat, wat in de ene positie het middelpunt van de slingering was, in de andere het punt van ophanging wordt. Maar wat de constructie van een dergelijke slinger grote voordelen boven andere verschaft, is vooral daarin te zoeken, dat niet slechts geen rekening gehouden hoeft te worden met de zeer lastige reductie tot het middelpunt van de slingering, maar er ook over de verschillende dichtheid van het lichaam waaruit de slinger bestaat, verder geen probleem hoeft te worden gemaakt. Tot eenzelfde constructie van een omkering van de slinger is vervolgens uit eigen beweging ook KATER gekomen, en daarmee heeft hij, na de lengte van de enkelvoudige secondeslinger in Londen (4)[80] met de hoogste zorg en nauwkeurigheid te hebben bepaald, de slingeringen daarvan vervolgens onderzocht (5)[81], in alle gebieden waar de Engelse graadmeting had plaats gevonden.

En nu moeten dan de waarnemingen rond de lengte van de slinger ter sprake komen die door SABINE zijn uitgevoerd, waarvan de uitgebreidheid, samen met de accurate manier van aanpak, het grootst mogelijke effect heeft gehad op het verhelderen van de kwestie van de ware vorm van de aarde. Bij drie gelegenheden zijn ze door SABINE uitgevoerd: de eerste keer, op de eerste reis van PARRY naar de noordpool, zijn de Slingerbewegingen van de slinger onderzocht bij Brassa, bij Hare-island en Melville (6)[82]: de slingers die voor dit doel dienst deden, waren uit koper

[77](1) Cf. EDWARD SABINE An Account of experiments to determine the figure of the earth, by means of the Pendulum etc. London 1825. Preface pag. XI.
[78](2) Horol. oscill. Part. 4. prop. 20. in >> Op. var. Tom. 1 pag. 154.
[79](3)BOHNENBERGER Astronomie, Tübingen 1811. pag. 448. Id. in >> Naturwissenschaftliche Abhandlungen"Tübingen 1826. pag. 12. etc.
[80](4) Phil. Trans. 1818. pag. 87.
[81](5) Ibid. 1819. pag. 330. 416.
[82](6) Phil. Trans. 1821. pag. 165. Cf. Conn. des Tems 1825. pag. 301; 1827. pag. 393.

pagina 24
gemaakt en voorzien van scherpe randen, en werden aangepast aan de uurwerken, waarvan er één door BAILY en DIXON is gebruikt in Hammerfest bij het waarnemen van de overgang van Venus vóór de zon in 1769. De waargenomen slingerbewegingen van de slingers worden vergeleken met de oscillaties van die slingers, die ze in Londen volbrachten, en zo wordt de lengte van de enkelvoudige slinger op de genoemde plaatsen door een berekening geconcludeerd uitgaande van de lengte die KATER in Londen had gevonden.

Vervolgens heeft SABINE, met zijn eigen zeeschip, op vlakbij de evenaar gelegen plaatsen (1)[83], van een slinger die volgens de methode van KATER was geconstrueerd, de slingerbewegingen onderzocht; en tenslotte heeft dezelfde man op de derde expeditie van PARRY naar de noordpool, op de kusten van Groenland, Noorwegen en Spitsbergen (2)[84], gezorgd voor het met alle verschuldigde ijver onderzoeken van wat het aantal slingerbewegingen was dat een secondenslinger volbracht.

Intussen hadden de Fransen FREYCINET erop uitgestuurd om een reis rond de wereld te maken, waarbij hem speciaal werd opgedragen om experimenten uit te voeren rond de lengte van de slinger (3)[85]. De invariabele slingers, van messing gemaakt, die voor dit doel dienst deden, waren door FORTIN geconstrueerd: de slingerbewegingen daarvan zijn vergeleken met een machine die seconden slingerde, die op een dergelijke wijze langzaam beweeglijk was gemaakt, dat hij met de proefslinger isochroon kon worden gemaakt: en die machine werd op haar beurt aan chronometers gerelateerd.

Het grootste belang van deze experimenten moet vooral gezocht worden in de omstandigheid, dat ze op zuidelijk breedtes, die zeer ver van de evenaar verwijderd waren, gedaan werden, zoals bij Kaap de Goede Hoop en bij de Malvinas, die ongeveer dezelfde breedte in het zuiden hebben als waarop Londen gelegen is naar het noorden; daarom zijn ze zeer dienstig voor het oplossen van de vraag, of de vorm van de aarde in het zuidelijk halfrond inderdaad anders is dan die die het noordelijk halfrond heeft, zoals uit meting van de graad door LA CAILLE had moeten bewezen worden.

In ongeveer dezelfde periode zijn door afzonderlijke astronomen afzonderlijke waarnemingen uitgevoerd met de slingers van KATER, en dan bedoel ik natuurlijk door GOLDINGHAM in het observatorium

[83](1) SABINE l.l. pag. 10. 239.
[84](2) Ibid. pag. 131. 263.
[85](3) FREYCINET Voyage au tour du monde Paris 1825. Observatione du Pendule 1826. pag.25.

pagina 25

van Madras (1)[86], door BASIL HALL op de Galapagos, door dezelfden samen met FOSTER bij St Blas in Mexico en bij Rio de Janeiro (2)[87]; bij Gounsah-Lout door ROBINSON en LAWRENCE (3)[88]; in het observatorium van Paramatta (4)[89] in Nova Hollandia door Brisbane.

Daarna heeft DUPEREY (5)[90] op zijn reis rond de wereld, van dezelfde slingers als die al FREYCINET gebruikte, de slingerbewegingen onderzocht in enkele gebieden van de beide halfronden, onder andere op de Malvinas en op het eiland Ascension.

FOSTER heeft vervolgens, op de laatste reis van PARRY naar de noordpool, de slingeringen van de Kateriaanse slinger bij Port Bowen (6)[91] vergeleken met de slingeringen die de zelfde slinger in het observatorium van Greenwich had afgelegd.

Tenslotte heeft BESSEL de lengte van de enkelvoudige slinger in het observatorium van Königsberg bepaald (7)[92]: de hem eigen methode, waarvan hij tot dit doel gebruik maakte, bestaat eruit dat niet van één maar van twee slingers de slingeringen onderzocht worden (8)[93], waarvan de ophangpunten zes voet van elkaar afstaan: zo dat uit het onveranderlijke verschil tussen de lengte van de twee proefslingers, door berekening geconcludeerd wordt tot de lengte van de enkelvoudige secondenslinger.

12. Wat nu de toepassing betreft die vanuit de jongste waarnemingen die tot zover naar voren zijn gebracht, toegepast is op het bepalen van de samendrukking van de aarde naar elk van beide polen, is op te merken dat BIOT uit de waarnemingen die hij rond de lengte van de slinger in Frankrijk deed, door berekening eerst heeft geconcludeerd dat de afplatting $\frac{1}{297{,}7}$ zal zijn: dat hij echter, nadat LAPLACE's nieuwe theorie over de maan deze afplatting op $\frac{1}{305}$ had gesteld, vervolgens zijn best heeft gedaan om uit al zijn eigen experimenten ongeveer dezelfde afplatting vast te stellen.

KATER vond uit al zijn waarnemingen dat de afplatting tussen de grenzen $\frac{1}{229{,}6}$ en

[86](1) Phil. Trans. 1822. pag. 127.
[87](2) Ibid. 1823. pag. 211.
[88](3) Phil. Magaz. Tom. 65 pag. 394. Cf. Almanak ten dienste der Zeelieden 1829. pag. 173.
[89](4) Phil. Trans. 1823. pag. 315. Cf. conn. des Tems 1826. pag. 307.
[90](5) Conn. des Tems 1826. pag. 280; 1830. Add. pag. 83.
[91](6) Phil. Trans. 1826. Part. IV pag. 62.
[92](7) BESSEL. Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels Berlin 1828. pag.56.
[93](8)Ibid, pag. 3. seqq.

pagina 26
1/597,5 viel: deze grote discrepantie schrijft hij toe aan de gevarieerde geologische samenstelling van de bodem op de verschillende plaatsen, die er de reden van kan zijn dat het binnenste van de aarde niet op alle plaatsen in de zelfde mate zijn aantrekking uitoefent op een slinger: nadat hij daarom de gevarieerde toestand van het oppervlak had onderzocht, heeft hij door het met elkaar verbinden van de waarnemingen die gedaan waren op plaatsen waar het geologische karakter van de aarde hetzelfde was, geconcludeerd dat de samendrukking $\frac{1}{304}$ zal zijn, wat dus weer het getal benadert, dat LAPLACE uit de onregelmatigheden van de maan had afgeleid.

SABINE heeft uit de experimenten die op de eerste reis van PARRY naar de noordpool zijn gedaan, een afplatting afgeleid van $\frac{1}{313,7}$. Vervolgens heeft hij uit zijn eigen waarnemingen, vlak bij de evenaar en op de derde expeditie van PARRY, gevonden dat de afplatting $\frac{1}{288,4}$ is: en door deze experimenten te verbinden met die van BIOT en KATER, dat het getal $\frac{1}{289,1}$ zal zijn.

FREYCINET heeft uit zijn eigen waarnemingen, behalve die, die aan een grotere plaatselijke aantrekking onderhevig waren, afgeleid dat de afplatting van de aarde gelijk is aan $\frac{1}{286,2}$. DUPEREY concludeert uit al zijn eigen experimenten een samedrukking van $\frac{1}{266,4}$. Maar als hij zijn experimenten met die van FREYCINET vergelijkt, vindt hij dat die hoeveelheid $\frac{1}{287,7}$ is.

Wat echter, op basis van de recentste experimenten die rond de lengte van de slinger zijn gedaan, de meest waarschijnlijke vorm van de aarde is, zullen we aan het slot van dit preofschrift proberen uiteen te zetten.

De redenering waarmee aan de in verschillende gebieden vastgestelde lengte van de slinger, de vorm van de aarde ontlokt wordt, steunt geheel en al op de hypothese dat de kern van een aardse sferoïde die rond de kleinste as draait, waarvan de dichtheid vanaf het oppervlak naar het middelpunt toeneemt, geheel met water is gevuld; deze aanname komt echter met de natuur allerminst overeen, aangezien de waarneming leert dat een groot deel van het oppervlak door water volstrekt niet bedekt is. LAPLACE heeft met deze omstandigheid ook rekening gehouden en hij beschouwt de theorie van de aarde als een mathematische, en hij haalt uit zijn eigen naspeuringen onder andere dit theorema te voorschijn: "als aan de lengte van een enkelvoudige secondenslinger op een willekeurig punt van het oppervlak van de sferoïde aarde, toegevoegd wordt het product van deze

pagina 27

lengte met de halve hoogte van dit punt boven het zeeniveau, en gedeeld door de helft van de as van de pool; zal de toename vanaf de evenaar naar de polen van deze aldus gecorrigeerde lengte, aangenomen de hypothese dat de dichtheid van de aarde op een niet zo grote diepte een constante grootte is, gelijk zijn aan het product van deze lengte bij de evenaar met de gekwadrateerde sinus van de breedte, en met vijf vierde delen van de relatie die bestaat tussen de centrifugale kracht en de zwaarte aan de evenaar (1)[94]." [95]

Maar als men dit Theorema vergelijkt met de experimenten rond de lengte van de slinger, zal duidelijk zijn dat het binnenste van de aarde in geen geval bestaat uit een homogene substantie: verder dat de dichtheid van de afzonderlijke lagen vanaf het oppervlak naar het middelpunt toeneemt: vervolgens dat de omstandigheid of de aarde volledig of slechts gedeeltelijk met een vloeistof wordt bedekt, volstrekt geen aantoonbare verandering brengt in het evenwicht van het oppervlak, wat dus congrueert met de aangenomen hypothese: tenslotte, dat uit de zeer reguliere wijze waarop de variatie van de lengte van de slinger over het algemeen de wet van de gekwadrateerde sinus van de breedte volgt, duidelijk op te maken is dat deze lagen op een reguliere wijze rond het middelpunt van de zwaarte van de aarde zijn gelegen, en over het algemeen een elliptische vorm hebben.

——> *o* <——

[94](1) LAPLACE in >> Conn. des Tems 1821. pag. 290. 353; 1822. pag. 284. Mécanique céleste Tom. 5 pag. 12. 40.

[95]Noot van de vertaler: De tekst van Laplace luidt (Mécanique Céleste deel 5, pag. 12) :"si à la longueur du pendule à secondes, observée sur un point quelconque de la surface du sféroïde terrestre, on ajoute le produit de cette longueur, par la moitié de la hauteur de ce point au-dessus du niveau de l'Ocean determinée par l'observation du baromètre, et divisée par le demi-axe du pôle; l'accroissement de cette longueur ainsi corrigée sera, de l'equateur aux pôles, dans l'hypothèse d'une densité de la Terre, constante au-dessous d'une profondeur peu considérable, le produit de cette longueur à l'equateur, par le carré du sinus de la latitude et par cinq quarts du rapport de la force centrifuge à la pesanteur a l'equateur, ou par 43 dix-millièmes."

Tweede Hoofdstuk - De theorie van de slinger en de methodes die recentelijk zijn toegepast om de lengte ervan te bepalen.

—o—

Eerste Sectie: De theorie van de slinger.

1. Aangezien iedere slinger die in de natuur voorkomt, beschouwd kan worden als een vast lichaam dat zijn beweging rond een onveranderlijke as volbrengt, willen we de theorie daarvan ook uit de algemene beschouwing van de draaiende beweging putten: en dat kan men met recht doen, omdat de slingerbeweging gevat wordt in de ronddraaiende beweging zelf, en daarom slechts een speciaal geval hiervan vormt. De vergelijkingen van een ronddraaiende beweging zijn (1)[96]:

$$\begin{aligned} 0 &= S\left(\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2}\right)dm - S(Yx - Xy)dm \\ 0 &= S\left(\frac{zd^2x - xd^2z}{dt^2}\right)dm - S(Xz - Zx)dm \\ 0 &= S\left(\frac{yd^2z - zd^2y}{dt^2}\right)dm - S(Zy - Yz)dm \end{aligned} \tag{A}$$

waarin door te stellen dat:

$$\begin{aligned} N &= S\int(Yx - Xy)dtdm \\ N' &= S\int(Zx - Xz)dtdm \\ N'' &= S\int(Zy - Yz)dtdm \end{aligned} \tag{B}$$

[96](1) Mécanique céleste Tom. 1 pag.72. (noot van de vertaler: daar staat “la lettre [S] étant ici un signe intégral relatif à la molecule dm”) Mécanique analytique Tom. 1 pag. 269. Poisson Traité de Mécanique Tom. a pag. 138.

pagina 29

verkregen wordt door te integreren volgens element dt:

$$\begin{aligned} S(xd^2y - yd^2x)\frac{dm}{dt} &= N \\ S(zd^2x - xd^2z)\frac{dm}{dt} &= N' \\ S(yd^2z - zd^2y)\frac{dm}{dt} &= N'' \end{aligned} \tag{C}$$

Van die vergelijkingen is de derde genoeg om de beweging te bepalen van een lichaam dat een draaiing ondergaat, als men tenminste aanneemt dat het in een verticaal vlak beweegt.

Laten we de beweging van een lichaam relateren aan drie orthogonale coördinaten-assen, waarvan xy de horizontale zijn, en z de verticale, en laten we aannemen dat slechts één kracht, namelijk de zwaarte, daarop werkt: verder dat het vlak yz door het middelpunt van de zwaarte van het lichaam gaat, en laten we tenslotte ons een andere lijn voorstellen, die door de oorsprong van de coördinaten en door het middelpunt van de zwaarte van het lichaam gaat. Daarna, als y' en z' de coördinaten zijn die horen bij deze nieuwe lijn, en als θ de variabele hoek is die deze lijn vormt met de as z, krijgen we uit de bekende transmutatie van de coördinaten

$$y = y'\cos\theta + z'\sin\theta, \text{ en } z = z'\cos\theta - y'\sin\theta$$

en daaruit ontstaat door de waarden van y en z te substitueren naar de derde van de voorgaande vergelijkingen

$$S\Big(\frac{ydz - zdy}{dt}\Big)dm = -\frac{d\theta}{dt}Sdm(y'^2 + z'^2) \tag{2}$$

De grootheid $Sdm(y'^2 + z'^2)$ heet volgens Euler het traagheidsmoment van een lichaam rekening houdend met as x: en dat kan altijd omgezet worden in een andere ten opzichte van de as parallel aan de vorige die gaat door het middelpunt van de zwaarte van een lichaam. Door het uitvoeren van die verandering vindt men

$$Sdm(y'^2 + z'^2) = Sr'^2dm + ma^2 \tag{3}$$

waar r' staat voor de afstand vanaf een willekeurig punt van het lichaam, en a voor de afstand van het middelpunt van de zwaarte tot de as x.

Door echter te stellen dat $\frac{Sr'^2dm}{m} = k^2$, en door vergelijking (3) verbinden met de derde van de vergelijkingen (C), krijgt men

pagina 30

$$-\frac{dN''}{dt} = \frac{md^2\theta}{dt^2}(k^2 + a^2) \tag{4}$$

We hebben dus verondersteld dat een lichaam door slechts één kracht, de zwaarte natuurlijk, wordt aangedaan, zó dat in de vergelijkingen (A) en (B) de krachten X en Y verdwijnen, en Z overblijft, die we g noemen. En daarvandaan krijgen we

$$\frac{dN''}{dt} = Sgydm = g\cos\theta Sy'dm + g\sin\theta Sz'dm \tag{5}$$

Maar $Sy'dm = 0$, omdat de as van z' gaat door het middelpunt van de zwaarte, en $Sz'dm = ma$, als m staat voor de massa van het hele lichaam: dus

$$\frac{dN''}{dt} = g\sin\theta ma \tag{6}$$

En die vergelijking verbonden met vergelijking (4) geeft

$$0 = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{ag\sin\theta}{a^2 + k^2} \tag{7}$$

Laten we dan stellen dat er een ander lichaam gegeven is, waarvan de massa als in één punt verzameld wordt gedacht, en dat van de as x verwijderd is met een grootte l; dan is $a = 1$ en $k = 0$, en dan wordt de vergelijking

$$0 = \frac{d^2\theta}{dt^2}\frac{g}{l}\sin\theta \tag{8}$$

En als men die vergelijkingen bijeenbrengt krijgt men:

$$l = a + \frac{k^2}{a} \tag{9}$$

Vergelijking (7) toont de beweging van wat voor slinger dan ook, maar vergelijking (8) toont de beweging van de mathematische slinger, ook wel de enkelvoudige slinger genaamd, zo dat uit vergelijking (9) duidelijk is dat willekeurig welke slinger altijd herleid kan worden tot de mathematische, als de afstand van het middelpunt van de zwaarte tot de as x of tot het punt van ophanging, en het traagheidsmoment ten opzichte van de as die door het middelpunt van de zwaarte gaat, bekend zijn. l is dus de lengte van de enkelvoudige slinger, die zijn slingeringen in dezelfde tijd als het lichaam volbrengt, oftewel de afstand van het slingermiddelpunt tot het punt van ophanging.

Laten we aannemen dat een lichaam waarvan het slingermiddelpunt gezocht wordt, een bol is met een straal r, een massa m, en dat de draad waaraan hij hangt, de vorm heeft van een cylinder, waarvan

pagina 31

de straal van de ronde basis ρ is, de massa μ, en de lengte vanaf het punt van ophanging tot de omtrek van de bol b. Maar het traagheidsmoment van de bol ten opzichte van de as die door het middelpunt gaat, is $\frac{2}{5}mr^2$: dus ten opzichte van de rotatie-as $\frac{2}{5}mr^2 + md^2$, waarbij d staat voor de afstand van het punt van ophanging tot het middelpunt van de bol. Maar het traagheidsmoment van cylinder ten opzichte van de as die door het middenpunt gaat, is gelijk aan de grootheid $\mu\left(\frac{b^2}{12} + \frac{\rho^2}{4}\right)$; dus ten opzichte van de rotatie-as:

$$\mu\left(\frac{b^2}{12} + \frac{\rho^2}{4}\right) + \mu c^2 \tag{10}$$

waar c de afstand aangeeft van het middenpunt van de cylinder tot het punt van ophanging.

Het traagheidsmoment van het hele systeem wordt voorgesteld door de grootheid $\mu\left(\frac{b^2}{12} + \frac{\rho^2}{4}\right) + \mu c^2 + \frac{2}{5}mr^2 + md^2$, oftewel, omdat $c = 1/2b$, en $d = b + r$ door

$$\mu\left(\frac{b^2}{12} + \frac{\rho^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) + m\left(\frac{2}{5}r^2 + (b+r)^2\right) \tag{11}$$

Dus is de lengte van de enkelvoudige slinger die met dit systeem dezelfde slingeringen in dezelfde tijd volbrengt:

$$= \frac{\mu\left(\frac{b^2}{12} + \frac{\rho^2}{4}\right) + m(b^2 + 2br + \frac{7}{5}r^2)}{\mu\frac{b}{2} + m(b+r)} \tag{12}$$

Voor $r = 0$ en $m = 0$, oftewel voor een cylindrische staaf die aan het andere uiteinde is opgehangen, krijgt men

$$l = \frac{2b}{3} + \frac{\rho^2}{2b} \tag{13}$$

en zo worden voor willekeurig welk ander lichaam dat een langwerpige vorm heeft, deze en gene formuleringen geproduceerd, waardoor altijd de lengte aangegeven kan worden van de enkelvoudige slinger die met het gegeven lichaam dezelfde slingeringen in dezelfde tijd volbrengt.

Wanneer met een lichaam dat een slingerbeweging maakt rond een vaste as, een beweging rond een as die aan de vorige parallel is, verenigd wordt, blijft het traagheidsmoment ten opzichte van de as die door het middelpunt van de zwaarte gaat, onveranderd. Maar als dus de afstand van het lichaam

pagina 32

tot de nieuwe rotatie-as aangeduid wordt met a', en de lengte van de enkelvoudige slinger die zijn slingeringen in dezelfde tijd als het lichaam volbrengt, met l', dan ontstaat

$$l' = a' + \frac{k^2}{a'} \tag{14}$$

Door dan k^2 te elimineren tussen vergelijking (9) en (14) krijgen we

$$a'(l - l') = (a - a')(a + a' - 1) \tag{15}$$

Maar als dan in deze vergelijking $a + a' = l$, d.w.z. als de tweede as door het middelpunt gaat van de slingering die op de vorige as betrekking heeft, dan zal $l - l' = 0$ zijn: waaruit volgt dat als het middelpunt van de slingering en het punt van ophanging met elkaar verwisseld worden, de slingertijd in beide posities van de slinger van dezelfde duur zal zijn (1)[97]

2. Alle slingers zonder onderscheid worden gewoonlijk gerelateerd aan de mathematische slinger: hiervan zal dus de beweging onderzocht moeten worden. Met dat doel keren we terug naar vergelijking (8) in §1, die, indien zodanig geïntegreerd, dat voor $d\theta = 0$ en $\theta = \alpha$, (de volgende vergelijking) geeft

$$dt = \left(\frac{l}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot d\theta(\cos\theta - \cos\alpha)^{-\frac{1}{2}} \tag{16}$$

waaruit, door te stellen $l \sin\alpha = r$, verkregen wordt

$$t = \left(\frac{r}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{(\sin\alpha)^{\frac{1}{2}} \cdot (\cos\theta - \cos\alpha)} \tag{17}$$

of, door met T de tijd van één slingering aan te geven

$$T = \pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{1 + (\frac{1}{2})^2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha + (\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4})^2 \sin^4 \frac{1}{2}\alpha + (\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6})^2 \sin^6 \frac{1}{2}\alpha + ...\right\} \tag{18}$$

Deze formule dus, die een sterk convergerende serie omvat, aangezien iedere volgende term kleiner is dan de voorafgaande, drukt de slingertijd uit in een functie van de lengte van de enkelvoudige slinger, van de zwaarte, en van de afwijking van de slingering: en zij geeft aan dat, hoe groter de afwijking is, des te groter ook de tijd van de slingering is, dat wil zeggen: dat de snelheid van de slinger toeneemt, naarmate de boog die hij met de verticale lijn maakt, groter is: dat als alle slingeringen van dezelfde slinger van dezelfde afwijking zijn, die ook de tautochroon zijn. Maar als inderdaad van dezelfde slinger alle

[97](1) Cf. HUGENII Horol. osc. Part. 4. prop. 20

pagina 33
slingerbewegingen cycloïdaal zijn, ofwel, zoals het heet: oneindig klein, heeft die formule de vorm

$$T = \pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

In die formule zijn de volgende gevolgtrekkingen vervat:

α, de lengtes van twee slingers, die in de zelfde tijd hun slingeringen afleggen, zijn als de zwaartes, die erop werken.

β, de tijden van de slingering van dezelfde slinger op verschillende plaatsen van de aarde staan in een omgekeerde verhouding met de gekwadrateerde wortels uit de zwaartes.

γ, de tijden van de slingering van slingers op een en dezelfde plaats van de aarde, zijn tot elkaar als de gekwadrateerde wortels van hun lengtes.

δ, het aantal slingeringen die in dezelfde tijd worden afgelegd door slingers van dezelfde lengte, is[98] als de gekwadrateerde wortels van de zwaartes.

Hetzelfde geldt voor twee slingers die dezelfde afwijking van hun boog hebben.

3. Wat tot nu toe besproken is, had betrekking op de beweging van een slinger die slingert in een lege ruimte. De experimenten worden echter meestal uitgevoerd in een omgevend medium, waarvan de weerstand, alsmede de wrijving van de slingerassen en de buigbaarheid van de draden de oorzaak is dat de heen en weerbewegingen van de slinger geleidelijk verminderen, en wel zodanig dat de slinger tenslotte weer tot rust komt. Laten we stellen dat de luchtweerstand proportioneel is aan het kwadraat van de snelheid (1)[99], en dat de wrijving bij de assen een constante grootheid is, die tegengesteld is aan de richting van de beweging. Dan krijgt men uit formule 8 §1 de vergelijking van de beweging:

$$\frac{dv}{dt} = g \sin\theta - mv^2 - ng \tag{20}$$

waarin m en n constante grootheden zijn, die van de grootte van de weerstand en de wrijving afhangen. Uit deze vergelijking, omdat $s = l(\alpha - \theta)$, krijgt men:

$$0 = vdv - mlv^2 d\theta + lgd\theta(\sin\theta - n) \tag{21}$$

vanwaaruit, door de integratie zodanig uit te voeren dat v verdwijnt voor $\theta = \alpha$, verkregen wordt:

$$v^2 = \frac{2lg}{1+4m^2l^2} \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta - \cos\alpha - 2lm(\sin\alpha - \sin\theta) \\ +(1 - \epsilon^{-2ml(\alpha-\theta)})(\cos\alpha + 2ml\sin\alpha) \end{bmatrix} \right\} - \frac{ng}{m}(1 - \epsilon^{-ml(\alpha-\theta)}) \tag{22}$$

[98] Noot van de vertaler: is is vertaling van sunt (meervoud), omdat numerus (aantal, enkelvoud) het onderwerp van sunt is.

[99] (1) Cf. BENZENBERG's Versuche über die Umdrehung der Erde pag. 161.

pagina 34

Vanwege de zeer kleine waarde van de grootheden m en n, als ook van de grootheden α en θ, wordt gesteld dat

$$1 - \epsilon^{-2ml(\alpha-\theta)} = 2ml(\alpha - \theta), \text{ en dat}$$

$$\theta = \sin\theta + \frac{1}{6}\sin^3\theta,\ \alpha = \sin\alpha + \frac{1}{6}\sin^3\alpha$$

zo dat, als we omwille van de kortheid maken

$$4ml\sin^2\frac{1}{2}\alpha + n - \frac{}{1}6(2ml\cos\alpha - n)\sin^2\theta = \lambda\text{en}$$
$$4ml\sin^2\frac{1}{2}\alpha + n - \frac{}{1}6(2ml\cos\alpha - n)\sin^2\alpha = \beta,$$

vergelijking (22) overgaat in de volgende:

$$v^2 = 2lg(\cos\theta + \lambda\sin\theta - \cos\alpha - \beta\sin\alpha) \tag{23}$$

ofwel bij benadering:

$$v^2 = 2lg[\cos(\theta - \lambda) - \cos(\alpha - \beta)] \tag{24}$$

die, door te stellen dat $\theta - \lambda = \theta'$, $\alpha - \beta = \alpha'$, $\sin\frac{1}{2}\theta' = \sin\frac{1}{2}\alpha'\cos\phi$, overgaat in

$$v = (2gl)^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}\alpha'\sin\phi \tag{25}$$

Vice versa wordt verkregen:

$$\theta = \theta' + 4ml\sin^2\frac{1}{2}\alpha + n - \frac{1}{3}(ml\cos\alpha - \frac{1}{6}n)\sin^2\theta' \tag{26}$$

en omdat $ds = -ld\theta$ en $v = \frac{ds}{dt}$, komt daaruit voort:

$$\begin{aligned} t =& \Big(\frac{l}{g}\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \int \frac{d\phi}{(1-\sin^2\frac{1}{2}\alpha'\cos^2\phi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{3}\sin^2\frac{1}{2}\alpha'(2ml\cos\alpha - n)\Big(\frac{a}{g}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \int d\phi\cos\phi(1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha'\cos^2\phi) \end{aligned} \tag{27}$$

En als men dat integreert tussen de limieten $\phi = 0$ en $\phi = \pi$, levert dat op:

$$T = \pi\Big(\frac{l}{g}\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \big\{1 + (\frac{1}{2})^2\sin^2\frac{1}{2}\alpha' + (\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2\sin^4\frac{1}{2}\alpha' + (\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2\sin^6\frac{1}{2}\alpha' + ...\big\} \tag{28}$$

Uit deze vergelijking blijkt dus dat, als men die bijeen brengt met vergelijking (18) van de voorafgaande paragraaf, de slingertijd in oneindig kleine bogen geenszins wordt veranderd door de luchtweerstand en de wrijving van de assen (1)[100]. Maar wat betreft de slingeringen van de enkel-

[100](1) Cf. POISSON Traité de Mécanique Tom. I pag. 405. BOHNENBERGER in "Naturwissenschaftliche Abhandlungen Tübingen 1826." pag. 28.

pagina 35

voudige slinger die een zekere afwijking hebben: dat, als men van beide rijen slechts naar de twee voorste termen kijkt, omdat $\alpha - \beta = \alpha'$, die[101] kleiner zijn dan in een leegte met een grootte van $\frac{1}{4}\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{2}(\alpha - \alpha') \sin\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$, of bij benadering met een grootte van

$$\frac{1}{8}\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\beta\sin\alpha = \pi(\frac{1}{3}ml\sin^2\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{8}n)\sin\alpha\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

zal heel erg duidelijk zijn.

Tegelijkertijd geeft vergelijking (25) aan dat, als men, door geen acht te slaan op de kwadraten en de hogere machten van de grootheden m en n, de tijd T waarmee de slinger slingert, door middel van boog α' tot de tijd van de cycloïdale slingering herleidt, er ook rekening gehouden wordt met de luchtweerstand en met de wrijving bij de assen, en dat men zo dus op accurate wijze de slingertijd verkrijgt, alsof de slinger zijn slingerbewegingen in een leegte had volbracht.

—-<>—-

Tweede Sectie - De methodes die recentelijk zijn gebruikt, om de lengte van de slinger te bepalen.

pagina 35

4. Onder de lengte van de slinger wordt gewoonlijk de lengte verstaan die een mathematische slinger heeft, als die zijn cycloïde slingerbewegingen van telkens één seconde in een vacuüm volbrengt. Aangezien een dergelijke slinger in de werkelijkheid niet bestaat, maar slechts door mathematische reducties wordt aangetoond, kan het ook niet gebeuren dat de lengte ervan a priori wordt voorgesteld: dus hebben de natuurkundigen geprobeerd om die a posteriori te bepalen. Daartoe wordt een zogenaamde proefslinger genomen waarvan de slingeringen vergeleken worden met een instrument, dat van de tijd de intervallen op zo'n manier aangeeft, dat de lengte[102] aan de eenheid daarvan[103] wordt gerelateerd. Die[104] wordt dan of door mathematische formules, of door de methode zelf tot de enkelvoudige slinger

[101] Noot van de vertaler: die = de slingeringen van de enkelvoudige slinger
[102] Noot van de vertaler: lengte = lengte van de slinger
[103] Noot van de vertaler: daarvan verwijst naar de intervallen.
[104] Noot van de vertaler: die verwijst naar de tijd

pagina 36

herleid: als dus de lengte van de proefslinger bekend is, is ook het aantal slingeringen bekend dat hij volbracht zou hebben, als hij een mathematische slinger zou zijn geweest; vervolgens wordt door het uitvoeren van de nodige reducties door middel van berekening de lengte gevonden, die een mathematische slinger zou hebben, die in een bepaalde tijdspanne een gegeven aantal slingerbewegingen in het luchtledige zou hebben volbracht.

Zo moet men te werk gaan, als men op de een of andere plaats de absolute lengte van de enkelvoudige slinger wil vinden: als die nauwkeurig gevonden is voor een zekere referentieplaats[105], wordt door van dezelfde proefslinger, als die invariabel blijft, het aantal slingeringen in een ander gebied uit te zoeken, ook daar, vanuit de bekende relatie tussen het aantal slingeringen en de lengtes, de lengte geconcludeerd van de enkelvoudige slinger die in het luchtledige seconden slingert.

Laten we nu uitgebreider de verschillende wijzen van aanpak behandelen, die de natuurkundigen van de laatste tijd in deze zeer subtiele[106] zaak gebruiken.

================

Methode van BORDA en BIOT.

5. Ze vinden dat de proefslinger zoveel als mogelijk is, de enkelvoudige slinger moet benaderen; daartoe heeft het gewicht de vorm van een bol, die gemaakt is uit zeer dicht materiaal, nl. platina: dat zorgt ervoor dat de weerstand van de lucht een zeer kleine verandering in de beweging van de slinger veroorzaakt, en zijn beweging daarom gedurende langere tijd aanhoudt.

De draad waaraan de slinger hangt, is van metaal, zo dun dat het aan de lucht een zo klein mogelijk oppervlak biedt: in alle delen moet het homogeen zijn, wat ontdekt wordt als een stuk ervan onderzocht wordt op een weegschaal en overeenkomt met een ander stuk van dezelfde lengte. – Maar men moet draad vermijden die uit materiaal bestaat waarop samen met de zwaarte van de aarde het magnetisme een uitwerking kan hebben.

Om de draad aan de bol te bevestigen dient een koperen kap waarvan het onderste deel een deel vormt van een bol met dezelfde straal als de bol van platina, en die kap

[105] Noot van de vertaler: referentieplaats: in het latijn staat: loco normali. normalis betekent hier als richtlijn dienend, als uitgangspunt dienend.

[106] Nvdv: zeer subtiele < subtilissima

pagina 37

wordt door middel van een vette stof aan het oppervlak ervan bevestigd: daardoor kon de bol achtereenvolgens aan tegenovergestelde punten van zijn oppervlak worden opgehangen, zo dat fouten werden gecorrigeerd die toevallig konden ontstaan uit een ongelijke dichtheid of onvolmaakte bolvormigheid: – de draad wordt aan de kap zelf vastgemaakt met een schroef (1)[107].

Aan zijn boveneinde hangt de draad op messen die aan beide kanten geplaatst worden op gepolijste stukjes van zeer harde steen, waaraan met behulp van een waterpas een horizontale positie wordt gegeven. Het synchronisme van dit ophangmes met dat van de slinger wordt geëffectueerd met behulp van een schroef die aan de bovenkant van het mes is bevestigd.

Om een zo groot mogelijke onbeweeglijkheid te krijgen, wordt het hele apparaat met een ijzeren verbinding op een zeer stevige muur aangebracht.

De afwijking van de bogen wordt gemeten met een horizontale schaal, die vóór de slinger is geplaatst en die in gelijke delen is verdeeld: als met behulp daarvan de afstand bekend is vanaf het punt van ophanging, vindt men het interval tussen de betreffende plaats van de slinger en de verticale lijn, uitgedrukt in graden en delen daarvan.

De slingerbewegingen van de proefslinger worden vergeleken met die van een slingeruurwerk, waarvan de dagelijkse beweging zo exact mogelijk zal moet worden onderzocht. Voordat echter de slingeringen worden onderzocht, wordt de slinger net als het uurwerk in de ruststand teruggebracht, en wel zo dat beide zich in dezelfde verticale lijn bevinden. Aan de lens van het uurwerk wordt een ronde schijf van wit papier bevestigd, waarvan het middelpunt doorsneden wordt door de draad van de slinger. Dan wordt de beweging van beide, van het slingeruurwerk en van de proef-slinger, in overeenstemming gebracht: als in het begin dezelfde snelheid aan de proefslinger wordt gegeven, zal hij altijd de zelfde beweging behouden als de slinger van het uurwerk, als hij maar van dezelfde lengte is; maar als hij daar slechts een beetje van verschilt, wijken zijn heen en weer bewegingen onmiddellijk van de slingeringen van het uurwerk af, en naargelang de proefslinger langer of korter is dan de slinger van het uurwerk, zal hij na verloop van korte tijd ten opzichte van de slingeringen van het uurwerk er enkele verliezen of winnen. Maar als de slinger een grotere snelheid dan het uurwerk heeft, gaat hij het aan de lens van het uurwerk bevestigde teken[108] voorbij,

[107](1) Base du système métrique Tom. 3. DELAMBRE Astronomie Tom. 3 pag. 580. BIOT Astronomie physique Tom. 3. Add. pag. 151. BIOT et ARAGO Receuil d'observations, Paris 1821.pag. 441. FRANCOEUR Traité de Méchanique 1825. pag. 362.

[108]Noot van de vertaler: Met dit teken wordt, neem ik aan, de ronde schijf van wit papier bedoeld.

pagina 38

zodanig dat na een korte tijdsruimte, hij bij het uiteinde van de slingering aankomt, terwijl de slinger van het uurwerk nog maar over de verticale lijn gaat: waardoor het een halve slingering gewonnen heeft ten opzichte van het uurwerk.

Als de beweging vervolgens voortgezet wordt, zal de slinger samen met het teken in dezelfde tijd de lijn geheel afleggen, maar zal zijn slingeringen in de tegenovergestelde richting afleggen; zo heeft het uurwerk ten opzichte van de slinger één slingerbeweging verloren. Omdat dus beide slingers hun beweging in tegenovergestelde richting voortzetten, zal er tenslotte een moment komen, waarop het teken weer op dezelfde verticale lijn als de proefslinger aangetroffen wordt, en beide slingers hun slingeringen de zelfde kant op volbrengen: en op dat moment, samenloop of coïncidentie genaamd, heeft de proefslinger twee slingeringen ten opzichte van het uurwerk gewonnen. En dat moment wordt waargenomen met behulp van een telescoop die op en bepaalde afstand is geplaatst en voorzien is van een zeer dunne draad in het brandpunt. En die draad wordt in dezelfde verticale lijn geplaatst als het teken en de slinger nadat die in de rust zijn gebracht. De tijd waarop deze samenloop plaats vindt, wordt door het uurwerk aangegeven, waarmee de vergelijking wordt uitgevoerd: tevens worden de graden van de temperatuur en de hoogte van de barometer erbij geschreven.

Nadat een voldoende aantal van dergelijke samenlopen is waargenomen, en de slinger weer in rust is teruggebracht, wordt een stalen plaat, die op een onveranderlijke manier onder de platina bol is geplaatst, loodrecht onder het middelpunt daarvan, – en die voorzien is van een micrometrische schroef, tot een zodanige hoogte verheven, dat hij exact samenvalt met de onderkant van de bol.

Daarna wordt in de plaats van de slinger een metalen staaf opgehangen, die voorzien is van een mes van ophanging, waarop zeer exact het ondereind van de proefslinger genoteerd wordt: de lengte van deze staaf, die tegelijkertijd de lengte van de proefslinger zal zijn, wordt gemeten met een apparaat met de naam van "comparator", waar de metalen staaf tegenaan gehouden wordt: als daarvan dan de lengte zo is onderzocht, en nadat de reductie voor het middelpunt van de slingering en de andere nodige dingen zijn uitgevoerd, wordt de lengte berekend van de enkelvoudige, in een vacuüm slingerende, secondenslinger.

Pagina 39

================
Methode van KATER.

6. Het principe waarop de methode van KATER berust (1)[109], bestaat daarin dat het punt van ophanging en het middelpunt van de slingering onderling gewisseld kunnen worden (2)[110], d.w.z. dat, als een lichaam wordt opgehangen in het middelpunt van de slingering, het punt dat tevoren het punt van ophanging was, het middelpunt van de slingering wordt en omgekeerd, en dat de slingerbewegingen in elk van beide posities in de zelfde tijden worden afgelegd. Maar indien dus eerst het middelpunt van de slingering door proefnemingen gezocht wordt, en nadat de slinger is omgekeerd, de slingerbewegingen in beide posities niet gelijk zijn, zal deze gelijkheid met behulp van een beweeglijk gewicht bereikt kunnen worden, en wordt de lengte van de enkelvoudige slinger op zichzelf beschouwd zonder lastige reductie tot het middelpunt van de sslingering, door de afstand tussen deze twee punten te meten, rond dewelke de heen en weer bewegingen plaats hebben, en zal deze lengte niet onderhevig zijn aan de fouten, die anders uit de onregelmatige dichtheid van het lichaam zouden ontstaan.

Boven alle andere verkiest KATER die methode van ophanging die bereikt wordt m.b.v. messen die uit het hardste staal zijn gemaakt, en een driehoekige vorm hebben.

De slinger zelf bestaat uit een staaf van messing, waardoorheen twee driehoekige openingen gaan, waarin de messen worden geplaatst. Vier hoekige stukken, uit gehamerd messing, twee aan elke kant, worden haaks m.b.v. schroeven aan de staaf bevestigd, de messen moeten volmaakt aanzitten tegen het vlakke oppervlak daarvan.

In deze twee hoekige stukken wordt m.b.v. pinnen en schroeven, aan beide kanten stevig een zwart geschilderde plaat van pijnhout gestoken, aan het einde waarvan zich een heel dunne punt van balein bevindt, die dient om de afwijking van de bogen aan te geven.

[109](1) An account of experiments for determining the length of the Pendulum vibrating seconds in the latitude of London, by Capt. KATER, in >> Phil. Trans. 1818. pag 33.
[110](2) HUGENII Horol. oscill. Part. 4. prop. 20. De Theoria Penduli reversionis. Cf. § 1. pag. 37.

pagina 40

Een cilindrische gewicht van messing heeft een rechthoekige opening in diametrale richting, waar de hoekige stukjes ingevoegd moeten worden: dit gewicht wordt aan de slinger bevestigd m.b.v. een conische pin, die zowel door de hoekige stukjes als door het gewicht heengaat. Een tweede gewicht bevindt zich aan het tegenoverliggende einde van de messen, en heeft twee schroeven waarmee het naar believen verplaatst kan worden. Ten derde is er een lopend gewicht dat met behulp van een schroef over de hele lengte van de staaf wordt verplaatst, en dat dient om het middelpunt van de staaf te onderzoeken: tot dat doel is de staaf van de slinger voorzien van een zeer minutieuze verdeling, waarmee de afstand van dit gewicht tot het midden van de staaf wordt bepaald.

Het steunpunt van de slinger bestaat een stuk gegoten brons, door het midden waarvan een opening in de lengte is, waarin de slinger vrijelijk beweegt. De messen liggen op plaatjes van agaat die zodanig op voor dit doel aangepaste bedjes worden geplaatst dat ze in het zelfde vlak als het metaal zijn. Een verbindingsstuk uit messing wordt aan genoemd stuk m.b.v. schroeven vastgemaakt, en dat verbindingsstuk kan door d.m.v. een schroef die aan de bovenkant is geplaatst, omhoog en omlaag worden bewogen, op zodanige wijze dat de messen die aan de voorkant worden geplaatst, met de plaatjes van agaat altijd in hetzelfde vlak worden geplaatst. Dit steunpunt wordt stevig aan een tafel van gietijzer bevestigd.

Om de stabiele positie van het ophangingspunt te onderzoeken dient een instrument dat door Hardy is uitgevonden: het bestaat uit een stalen draad waarvan het onderste deel, gestoken in een stuk messing waaraan het opgehouden wordt, zodanig gevlakt wordt dat het een heel fijne veer vormt. Rond de draad wentelt een gewichtje met behulp waarvan het instrument op zodanige wijze ingesteld kan worden, dat het in de zelfde tijd als de slinger zijn slingeringen volbrengt. Maar als nu het steunpunt van de slinger, waaraan dit instrument is bevestigd, niet een voldoende vaste positie heeft, wordt de beweging ervan met de stalen draad gedeeld, die na een korte tijd gelijk zal zijn aan de slingerbewegingen van de slinger.

Aan de lens van de slinger wordt een stuk zwart papier geplakt, waaraan een ronde schijf van wit papier wordt bevestigd. De slingeringen van de slinger zowel als de afwijking van de bogen wordt onderzocht middels een telescoop, die op een zekere afstand van de slinger op een houten drievoet is geplaatst.

pagina 41

De vergelijking van de slingerbewegingen van de slinger met die van een klok, zoals die opgezet wordt in de voorafgaande methode, namelijk m.b.v. de samenlopen, wordt op die manier ook hier uitgevoerd: behalve dat het tijdstip van coïncidentie geacht wordt plaats te vinden wanneer de zo-even genoemde, witte ronde schijf geheel en al bedekt wordt door het stuk pijnhout dat aan het onderste deel van de slinger is bevestigd: wat m.b.v. een telescoop op zeer gemakkelijke wijze wordt waargenomen. Want in deze telescoop is een diaphragma, waarvan de zijden, onderling parallel, raaklijnen zijn van de horizontale diameter van de witte schijf: waardoor ze met de zijden samenvallen van het stuk dennehout, zodat, nadat beide slingers weer in rust zijn gebracht niets anders in de telescoop wordt waargenomen dan de boog die de afwijking van de slingebewegingen aangeeft, die gezien kan worden middels een horizontale opening, die tot dit doel aan de bovenkant van het diaphragma is aangebracht.

7. Als dan de afstand tussen de messen is bepaald, worden de experimenten zelf op de volgende wijze ondernomen: het lopende gewicht met zijn index wordt op een bepaalde afstand geplaatst vanaf het midden van de slinger in de richting van de het grotere gewicht, en het kleinere gewicht op bijna vijf duimen van de messen, die op de onderkant zijn geplaatst. De messen echter die op de tegenoverliggende kant zitten, worden in de voor hen bestemde openingen geplaatst, en nadat het grotere gewicht aan het bovenste uiteinde is geplaatst wordt de verbinding zacht naar beneden gelaten, totdat de messen zich op het oppervlak van de agaten bevinden. Dan wordt nadat de telescoop in orde is gebracht de slinger bewogen; maar die moet een zodanige beweging krijgen dat hij de snelheid van de aan de klok bevestigde slinger niet te boven gaat . Vervolgens wordt het tijdsmoment genoteerd, in minuten en seconden, waarop de witte schijf in de telescoop verdwijnt, en tegelijk worden opgeschreven de graden van de thermometer en de hoogte van de barometer. Daarna wordt uit een zeker aantal observaties, door berekening het gemiddeld aantal slingeringen berekend, dat de slinger aflegt in een zekere tijdsruimte, bij de aangegeven temperatuur en luchtdruk.

Nadat dat volbracht is wordt de slinger, nadat de verbinding is opgetild, omgedraaid, en nadat het grotere gewicht bij het onderste uiteinde is geplaatst, wordt de waarneming op de zelfde wijze als tevoren uitgevoerd. Maar als dan het aantal slingerbewegingen, tot dezelfde temperatuur als van de voorafgaande teruggebracht, verschilt van het aantal dat de slinger in de vorige positie aflegde, wordt het tweede gewicht verplaatst, en wordt nadat het aantal van de slingerbewegingen weer is bepaald,

pagina 42

de slinger weer omgedraaid, en wordt telkens nadat dat herhaald is een observatie uitgevoerd, totdat de slinger in beide posities hetzelfde, voor zover mogelijk, aantal slingeringen volbrengt.

Er is in beide posities van de slinger een enkel punt waar het effect dat het lopend gewicht heeft op het toenemen van het aantal slingerbewegingen, een maximum is, en dat wordt natuurlijk op die plaats gevonden waar de halve lengte van de enkelvoudige slinger aangetroffen wordt (1)[111]. Dichtbij deze twee punten produceert de beweging van het lopend gewicht een nauwelijks aantoonbaar effect op het veranderen van het aantal slingerbewegingen: dat effect wordt dan pas waargenomen, wanneer het lopend gewicht bijna aan het hoogste punt van de tegenoverliggende positie wordt geplaatst. Aangezien echter in beide posities dit punt van het maximum bijna 0,4 duim afstaat van het midden van de slinger, is de afstand tussen deze twee respectieve punten gelijk aan 0,8 duim; maar als dus het lopend gewicht op de eerste plaats 1,5 duim vanaf het midden van de slinger in de richting van het grotere gewicht geplaatst wordt, moet het, om het aantal slingeringen te vergroten, bijna 1 duim dichter bij het midden geplaatst worden, en zal het ware aantal slingerbewegingen gevonden worden wanneer het tussen deze twee eerdere posities aangepast wordt.

Daarna, als het aantal heen en weer bewegingen nog altijd het aantal in de omgekeerde positie van de slinger overschrijdt, zal de waarheid tussen de eerste en de derde positie van het gewicht zijn. En door zo voortdurend deze afstand in tweeën te delen, wordt het aantal slingeringen, nadat het grotere gewicht aan het onderste uiteinde is geplaatst, zelfs zeer snel benaderd.

En als dat gedaan is begint een serie waarnemingen, waardoor het aantal slingerbewegingen bekend wordt van de slinger, die gelijk is aan de afstand tussen de messen, voor een zeker tijdsruimte en omstandigheden waarin luchtdruk en temperatuur verkeren: vanwaaruit gemakkelijk door berekening het aantal slingeringen, dat dezelfde slinger op een gemiddelde zonnedag aflegt, en vandaar de lengte van de enkelvoudige slinger op de plaats van observatie, wordt gevonden.

Op een dergelijke wijze heeft KATER de absolute lengte van de enkelvoudige slinger in Londen vastgesteld in het huis van BROWNE aan Portland Place.

Zij die vervolgens zijn methode gevolgd hebben in verschillende gebieden van de aarde, hoefden

[111](1) Cf.HUGENII Horol. oscill. Part. 4 prop. 23.

pagina 43

de afstand tussen de punten niet te hebben bepaald, als deze maar dezelfde en ongewijzigd bleef. Mits immers het aantal slingerbewegingen van een op dezelfde manier geconstrueerde slinger, eerst in Londen en vervolgens in een willekeurig ander gebied, onderzocht wordt, wordt daar ook, uit de relatie tussen de lengtes van de twee slingers en van hun aantal slingerbewegingen, de absolute lengte van de enkelvoudige slinger gevonden, als deze maar weer op een geschikte manier verbonden wordt met de in Londen waargenomen lengte van de enkelvoudige slinger.

Wij hoeven er niet op te wijzen dat bij het toepassen van deze methode iedere willekeurige andere plaats als referentie aangenomen kan worden, mits hier opnieuw de absolute lengte van de enkelvoudige secondenslinger wordt bepaald.

=============

De methode van BESSEL.

8. Om de lengte van de enkelvoudige slinger te bepalen past BESSEL de volgende werkwijze toe: hij observeert van twee proefslingers de slingeringen: daarvan wordt het verschil niet gemeten, maar aan een bekende maat (namelijk de Peruaanse vadem) gelijk gemaakt (1)[112].

Daartoe dient een ijzeren staaf, waaraan een verticale cilinder wordt bevestigd, uit staal, waarvan de uiteinden de vorm van een conus hebben: met zijn ondereind rust deze cilinder op een steun, die stevig aan de staaf vastzit: maar het boveneind, dat verticaal op de as van de cilinder is afgesneden, vormt een loodrecht op de ijzeren staaf staand vlak.

Op dit vlak van de cilinder wordt de vadem geplaatst, die opgehouden wordt m.b.v. dunne pennen, maar, opdat geen enkele verandering in de dimensies van de vadem plaats vindt, is er in het midden daarvan een apparaat, dat vastgehouden wordt door twee beweeglijke hefbomen die aan beide kanten voorzien zijn van gewichten die zo gevormd zijn dat ze exact het gewicht van de vadem compenseren.

[112](1) BESSEL Untersuchungen über die länge des einfachen Sekundenpendels. Berlin 1828. pag. 3 seqq.

Pagina 44

De vadem hangt dus vrij, en krijgt geen vaste positie op de cilinder, tenzij hij door het aanbrengen van een langere slinger een overwicht krijgt als gevolg van het feit dat het apparaat waaraan hij hangt, op het bovenste deel rust.

Aan de rechter kant van de ijzeren staaf, zowel aan het boven- als aan het ondereinde van de vadem, zijn steuntjes, waarop cilinders van getemperd staal loodrecht op de ijzeren roede geplaatst worden. Het ophangingingsjuk, dat van ijzer is en voorzien van omgekeerde steuntjes, wordt bij het positioneren van beide slingers op de cilinders geplaatst. Onder het uiteinde daarvan, tegenover de steuntjes, wordt een stalen cilinder geplaatst, die aan het uiteinde, dat grenst aan de ijzeren staaf, van twee segmenten van een bol is voorzien; aan het voorste uiteinde heeft het een kleinere afwikkelende cilinder.

De draad van de slinger zit stevig vast aan het stukje dat op het ophangingingsjuk schuin terug wordt gedraaid, en wordt vervolgens, na over de afwikkelende cilinder te zijn gegaan, door de bol heen vastgedrukt.

Bij het doen van de experimenten wordt met een libel een horizontale positie gezocht op de steuntjes van de cilinders: daardoor krijgt de as van de afwikkelende cilinder ook een horizontale positie: waaruit duidelijk is dat het verschil tussen de lengtes van beide slingers gelijk is aan de lengte van de vadem die congrueert met de temperatuur van het experiment.

Het verschil tussen de hoogtes van de bol in beide posities van de slinger wordt gevonden m.b.v. een micrometrische schroef, die bevestigd is aan de onderkant van het apparaat.

Het apparaat wordt ingesloten in een kast van gepolijst glas, zodat alle toevallige temperatuurveranderingen worden vermeden. Als de kast gesloten is wordt de slinger in beweging gezet en gehouden en wordt de micrometrische schroef geregeld. De afwijking van de slingering wordt gemeten met een schaal met een zeer kleine verdeling. Drie thermometers worden in de ijzeren staaf ingebracht: twee andere hangen vrij in de kast en geven de temperatuur van de lucht aan.

Om de onbeweeglijkheid van het ophangingingsjuk te controleren, dient het instrument dat door Hardy is uitgevonden, dat al door KATER voor hetzelfde doel is aangewend, zoals we boven hebben vermeld: de uitkomst bewees de stabiele positie van het hele apparaat, maar opdat die extra direct kan worden gecontroleerd, werden de slingeringen van de slinger voortgezet,

pagina 45

eerst m.b.v. een zo stevig mogelijk vast gemaakte verbinding van zeer strak gespannen draden; vervolgens echter na het losmaken van de verbinding; bij geen van beide manieren van verbinding is ook maar het kleinste verschil waargenomen.

De stalen draad, waaraan de bol hangt, is niet direct in contact met de afwikkelende cilinder, maar is aan het ophangingingsjuk door een messing plaatje vastgemaakt, dat op de afwikkelende cilinder is geplaatst waaraan op een afstand van enkele lijnen een klem wordt bevestigd. De draad van de slinger wordt aan beide einden in klemmen geklemd, die als schroeven gevormd zijn en van gewicht volmaakt gelijk, waarvan de ene in de klem die van een schroefgat is voorzien, wordt ingebracht, de andere aan het schroefgat dat in de bol is geboord: door welke inrichting de draad gemakkelijk wordt omgedraaid. Tenslotte wordt de cilinder van messing, die in de as doorboord is, op zo'n wijze aan de draad bevestigd, dat de waarneming van de slingeringen exact wordt uitgevoerd: en daarom wordt hij coïncidentie-cilinder genoemd.

Ter vermijding van ieder wederzijds effect dat de slinger van het slingeruurwerk en de slinger van het apparaat op elkaar kunnen hebben, wordt het uurwerk op voldoende afstand van het uurwerk geplaatst: tussen beide wordt een kometenzoeker met een focus van 24,36 duim geplaatst, waar de oculairen uit genomen worden; de objectief-lens daarvan bewaart een zodanige afstand tussen beide slingers, dat het beeld van de proefslinger exact op de slinger van uurwerk valt, en beide m.b.v. een telescoop, geplaatst op een afstand van 15 voet, duidelijk verschijnen.

Op de schaal van het slingerapparaat, waarop de afwijking van de slingeringen wordt aangegeven, is een zwart gekleurde band, in het midden waarvan zich een witte plek bevindt van een zodanige omvang dat hij door de draad van de zich in rust verkerende slinger precies in tweeën wordt gedeeld en door de coïncidentie-cilinder wordt bedekt. Aan het onderste eind van de slinger van het uurwerk bevindt zich een stuk zwart gekleurd papier, dat van een opening is voorzien, die als de slinger in rust is, exact samenvalt met het beeld van de witte plek die op de zwarte band staat.

Wanneer echter aan beide slingers beweging wordt gegeven, verschijnt de witte plek bij elke slingering van het uurwerk, behalve op dat tijdsmoment waarop beide hem tegelijk bereiken, en dus de coïncidentie-cilinder hem bedekt.

Dit tijdsmoment moet bij beide slingers apart worden geobserveerd,

pagina 46

onder gelijktijdige vermelding van de druk van de lucht, van de temperatuur van de lucht en van die van de vadem. Uit een voldoende aantal coïncidenties van de langere slinger wordt de tijd van de slingering berekend, en vervolgens wordt daaruit de overeenkomstige lengte van de enkelvoudige slinger afgeleid. Als intussen de afstand van de onderkant van de bol is gemeten middels een micrometrische schroef, heeft men de gezochte lengte van de enkelvoudige secondenslinger, en de lengte van de vadem voor de temperatuur van de waarneming, bij elkaar opgeteld: en van de andere kant de overeenkomende lengte van de langere proefslinger: het verschil daarvan zal de absolute lengte zijn van de enkelvoudige secondenslinger. Wat de kortere slinger betreft: uit zijn d.m.v. coïncidenties bekende slingertijd, wordt de lengte afgeleid die hij heeft, als het een enkelvoudige slinger was geweest: als daar de afstand van de bol vanaf het onveranderlijke vlak aan toegevoegd wordt, vloeit weer voort de lengte van de enkelvoudige secondenslinger. Daarvandaan komen zoveel vergelijkingen voort als er dubbele observaties zijn uitgevoerd, en uit het gemiddelde daarvan wordt tenslotte de voor de plaats van waarneming absolute lengte van de mathematische slinger geconcludeerd.

——o——

Correcties en reducties die op alle experimenten zijn toe te passen, om ze zowel onderling als met andere te kunnen vergelijken.

Opdat de slingeringen van de slinger, zoals die met de uiteengezette methodes worden verkregen, zowel onderling als met andere kunnen worden vergeleken, is het noodzakelijk dat alle slingeringen van alle slingers isochroon zijn en uiteindelijk tot een tautachronisme worden herleid: en verder dat ze aan dezelfde fysiek omstandigheden worden gerelateerd. De volgende correcties en reducties moeten daar dus op toegepast worden:

1. Correctie van de afwijking.

9. De tijd van één slingering in een circulaire boog α_1, onder verwaarlozing van de laatste termen, zien we (pag. 32) uitgedrukt in deze formule:

pagina 47

$$T = \pi\Big(\frac{l}{g}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\{1 + (\frac{1}{2})^2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha_1\Big\}$$

Maar als met n dus aangegeven wordt het aantal slingeringen dat in tijd T_n wordt volbracht, zal op dezelfde manier

$$T_n = n\pi\Big(\frac{l}{g}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\{1 + (\frac{1}{2})^2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha_1\Big\}$$

In dezelfde tijd volbrengt dezelfde slinger n' cycloïdale slingeringen, zodat men heeft

$$T_n = n'\pi\Big(\frac{l}{g}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Als de waarden van Tn onderling vergeleken worden, komt er

$$n' = n(1 + (\frac{1}{2})^2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha_1) \tag{30}$$

en door die formule kunnen alle slingerbewegingen tot cycloïdale herleid worden, mits de afwijking steeds dezelfde blijft; deze afwijking echter wordt door de weerstand van de lucht en de wrijving geleidelijk kleiner, zodat na een zeker aantal slingerbewegingen deze boog in plaats van α_1 α_n wordt: en dat heeft het manifeste gevolg dat iedere slingering per se een andere correctie nodig heeft.

Maar als de waarneming slechts een zeer klein tijdsinterval omvat, zal boog α_1 ook met een kleine hoeveelheid van boog α_2 verschillen, zodat gesteld kan worden, dat de slinger de gemiddelde afwijking tussen beide heeft gehad: en als dat gesteld is wordt de reductie tot cycloïdale afwijkingen uitgedrukt door de formule

$$n' = n\Big[1 + \frac{1}{4}\sin^2 \frac{(\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_n)}{2}\Big] \tag{31}$$

Maar als, wanneer experimenten over een lange tijd zijn gehouden, de correctie accurater is, is het noodzakelijk dat de reductie steunt op de wet die zegt dat volgens de waarneming het kleiner worden van de bogen van een slingering een geometrische progressie volgt, als de tijdsintervallen toenemen op aritmetische wijze.

Dus is de correctie van de afwijking voor n slingeringen, waarbij e staat voor de exponent van de geometrische progressie:

pagina 48

$$C = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha_1}{4}(1 + e + e^2 ... \, e^{n-1})$$

hetzij, als men door middel van $\frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}\alpha_n$ de correctie van de laatste slingering aangeeft,

$$C = \frac{1}{4}\Big(\frac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1 - \sin^2\frac{1}{2}\alpha_n}{1-e}\Big) + \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}\alpha_n$$

Maar als vanuit de veronderstelde wet de laatste oscillatie een zodanige functie is van de eerste, dat

$$\log e = \frac{2}{n-1}(\log\sin\frac{1}{2}\alpha_n - \log\sin\frac{1}{2}\alpha_1)$$

dan wordt, als van de bekende serie voor de evolutie van de grootheid naar het logaritme ervan

$$e = 1 + M\log e + \frac{M^2\log^2 e}{1\cdot 2} + \frac{M^3\log^3 e}{1\cdot 2\cdot 3} + ...$$

waarin M de modulus van de natuurlijke logaritmes aangeeft, (slechts de twee voorafgaande termen worden behouden, wat vanwege het kleine verschil dat tussen de eerste en de laatste boog bestaat, zonder risico op fouten mogelijk is) , verkregen

$$1 - e = \frac{2M}{n-1}(\log\sin\frac{1}{2}\alpha_1 - \log\sin\frac{1}{2}\alpha_n)$$

en als die waarde in de bovenstaande expressie van C ter vervanging ingevoerd wordt, komt daaruit

$$C = \frac{(n-1)(\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1 - \sin^2\frac{1}{2}\alpha_n)}{8M(\log\sin\frac{1}{2}\alpha_1 - \log\sin\frac{1}{2}\alpha_n)} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}\alpha_n$$

De term $\frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}\alpha_n$ bevat de correctie die toegepast moet worden op de laatste oftewel de n^{de} slingering, zodanig dat de eerste term van het volgende lid de correctie aangeeft, die betrekking heeft op de $n-1$ slingeringen die voorafgaan aan de laatste. Opdat dus deze term ook de correctie van de laatste slingering in zich bevat, moet n i.p.v. $n-1$ gezet worden: wat vanwege het zeer kleine verschil dat er misschien uit kan ontstaan, veilig kan gebeuren: en daarmee krijgt men de correctie van de afwijking voor n slingeringen (1)[113]

[113](1) BORDA Base du systememétrique Tom. 3. Cff. BIOT Astron. Physique Tom. 3. Add. Pag. 154. 172. Conn. Des Tems 1826. pag. 286; 1827. pag. 394. BOHNENBERGER l.l. pag. 33. KATER (Phil. Trans. 1818. pag 46) past in zijn waarnemingen formule (2) enigszins gemodificeerd toe: want zijn correctie is vervat in de formule $C = {}^{\delta}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_n}{2}\right)^2$,

pagina 49

$$C = \frac{n \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_n) \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_n)}{8M(\log \sin \frac{1}{2}\alpha_1 - \log \sin \frac{1}{2}\alpha_n)}$$

2. Correctie voor de uitzetting van de slinger.

10. Experimenten die op dezelfde plaats worden uitgevoerd, worden meestal samengevat uit het gemiddelde van de verschillende waarnemingen: als ze onderling en met andere vergelijkbaar gemaakt moeten worden, is het nodig dat ze op dezelfde temperatuurgraad worden uitgevoerd, of tenminste aan dezelfde referentietemperatuur worden gerelateerd.

Laat l de lengte zijn van de slinger bij de referentietemperatuur, n het aantal slingeringen dat daaraan beantwoordt, l_τ de lengte van de slinger bij een willekeurige andere temperatuur, en n' het aantal slingeringen dat dezelfde slinger bij deze temperatuur volbrengt: laten we verder stellen dat δ de uitzetting is van de slinger voor 1 graad van een willekeurige thermometer, zodanig dat de uitzetting voor temperatuur van τ graden $\delta\tau$ is: dan heeft men bij een willekeurige temperatuur een slingerlengte van

$$l_\tau = l(1 \pm \delta\tau) \tag{32}$$

Het aantal cycloïdale slingerinegn dat dezelfde slinger in deze twee

waar gesteld wordt dat de slingertijd in bogen van een zeer kleine afwijking toeneemt als het kwadraat van de bogen. In deze formule betekent δ het verschil dat bestaat tussen het aantal slingeringen dat een proefslinger aflegt in 24 uur in een cycloïde en in een circulaire boog van 1 graad. Dit verschil is voor iedere proefslinger en wisselende plaats (in de Phil. Trans. 1818 vermelde experimenten, = 1,635) te vinden uit formule (2), als men de slingeringen die een slinger in een zekere afwijking aflegt, herleidt tot die (slingeringen) die hij bij het slingeren in een boog van 1° graad had volbracht. Aangezien we echter al dergelijke empirische formules niet zo vaak voor zeker houden, hebben we besloten om ook die formule, voordat we de daaruit getrokken conclusies als overeenstemmend met de waarheid beschouwen, met formule 3 te vergelijken. Daaruit blijkt dat die formule voor het beoogde doel dienst kan doen, als tenminste uit de som van de correcties die voor iedere interval van de coïncidenties toegepast moet worden, het gemiddelde genomen wordt. SABINE l.l. pag. 16. gebruikt de formule van WATTS, die in de Edinburgh Phil. Journal no. 2 art. 17 is bewezen, $C = \frac{n+(\alpha_1+\alpha_n)(\alpha_1-\alpha_n)}{241886.08(\log \alpha_1 - \log \alpha_n)}$, die tot dezelfde graad van nauwkeurigheid voert als formule 3.

pagina 50

omstandigheden in dezelfde tijd volbrengt, wordt uitgedrukt door twee verschillende met elkaar analoge vergelijkingen, namelijk

$$T_n = n\pi\left(\tfrac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ en } T_n = n'\pi\left(\tfrac{l_\tau}{g}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ waaruit}$$

$$n = n'\left(\frac{l_\tau}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Maar als we naar deze vergelijking de waarde substitueren van l_τ uit vergelijking (32) krijgt men de formule (1)[114]

$$n = n'(1 \pm \delta\tau)^{\frac{1}{2}} = n'(1 \pm \frac{1}{2}\delta\tau \mp \frac{1}{8}\delta^2\tau^2 \pm \text{ etc.}) \tag{33}$$

waarin het aantal slingeringen dat een slinger bij een zekere referentietemperatuur aflegt, wordt uitgedrukt door een functie van de uitzetting van de slinger, en van het bij een willekeurige andere temperatuur waargenomen aantal slingeringen.

3. Reductie tot een vacuüm.

11. De vergelijking van de slingeringen van eenzelfde of van verschillende slingers onderling steunt op de veronderstelling dat alle slingers hun slingerbewegingen uitvoeren in een luchtledige ruimte: er wordt dus een reductie tot deze ruimte gevraagd, die noodzakelijk is omdat experimenten meestal gedaan worden in een fluïde atmosfeer, die op de beweging van de slinger zijn kracht uitoefent.

De op pag. 30 geïntegreerde formule (7) levert de uitdrukking van de beweging van de slinger in een vacuüm

$$\text{Const.} = m(a^2 + k^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\pi^2 lma\cos\theta$$

Maar als de slinger in een fluïdum beweegt, zoals de lucht van de atmosfeer, is dit ook van invloed op het bewogen systeem; vanwaaruit duidelijk volgt dat alle termen van de vergelijking een of andere verandering ondergaan. Want ten eerste wordt door het stoten van de slinger tegen dit of dat deel van het fluïdum in elk punt van de ruimte waar het doorheen beweegt, een verlies veroorzaakt van het levende vermogen[115] van het hele systeem, en dientengevolge een vermindering van C, die[116] afhangt van de snelheid en de uitwendige vorm van de slinger, die we met $\phi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ willen

[114](1) BIOT l.l.pag. 179. KATER Phil. Trans. 1818 pag. 61 ; Conn. des Tems 1826 pag. 288.
[115]Noot van de vertaler: van het levende vermogen is vertaling van potentiae vivae
[116]Noot van de vertaler: die heeft betrekking op vermindering.

pagina 51

aanduiden: vandaaruit zal de vermindering van C gedurende een tijd $dt\ d\theta\phi\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)$ zijn: dus C verandert na een bepaalde tijd in $C - \int d\theta\phi\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)$. Vervolgens moet aan de tweede term toegevoegd worden de som van alle deeltjes van het fluïdum, vermenigvuldigd met het kwadraat van de snelheid, oftewel $\int v^2 dm'$, waarbij m' de massa van het fluïdum aanduidt. Ten derde is het nodig om aan de derde term toe te voegen de som van de producten van de druk, opgelost in de richting van de zwaarte[117], vermenigvuldigd met de afstand vanaf het horizontale vlak dat door de as van de draaiing heen gaat, oftewel $2\pi^2 la'm'.\ \cos\theta$, waar a' de afstand aangeeft tussen het middelpunt van de zwaarte van de vorm van de slinger en de buitenste as.

Dan heeft men als vergelijking van de beweging van een slinger in een fluïdum

$$C - \int d\theta\phi\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big) = m(a^2 + k^2)\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2 + \int v^2 dm' - 2\pi^2 l(am - a'm')\cos\theta$$

Aangezien echter $\int d\theta\phi\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)$ de weerstand van het fluïdum laat zien, die voor oneindig kleine bogen de tijd van de slingering volstrekt niet verandert, zoals we op pag. 34 hebben gezien, hangt de oplossing van de vergelijking af van integraal $\int v^2 dm'$. Wat de vorm van deze integraal ook is, er kan altijd aangenomen worden dat de waarde ervan ten opzichte van tijd t terugkomt na twee afgelegde slingeringen: wat hoort plaats te vinden op het tijdstip, dat de condities van de beginbeweging zijn verdwenen, en het systeem een permanente toestand heeft aangenomen. Maar als dan de slingertijd zodanig is dat daarin de hoek nt 180° toeneemt, krijgt het kwadraat van de snelheid van het fluïdum in willekeurig welk punt van de ruimte een uitdrukking die zijn waarde terug krijgt, wanneer nt 360° toeneemt. Laten we stellen dat deze uitdrukking de vorm heeft

$$\theta'^2 n^2\{d_0 + d_1\cos(nt + \vartheta_1) + d_2\cos(2nt + \vartheta_2) + \text{etc.}\}$$

waar θ' de afwijking van de slinger betekent, waarvan de functies zijn d_0, d_1.....,ϑ_1, ϑ_2.....; dus heeft de integraal $\int v^2 dm'$ uitgebreid over de hele met fluïdum gevulde ruimte, de vorm

$$m'\theta' n^2\{b_0 + b_1\cos(nt + \beta_1) + b_2\cos(2nt + \beta_2) + \text{etc.}\}$$

waar $b0_, b_1, ..., \beta_1, \beta_2, ...$, afhangen van de vorm en de boog van de slingering. Maar als echter de slinger aan beide kanten zodanig gelijk is, dat

[117] Noot van de vertaler: de som van de producten van de druk, opgelost in de richting van de zwaarte is vertaling van summa productorum pressionis, in directionem gravitatis resolutae.

pagina 52

hij in zijn beweging naar beide kanten hetzelfde oppervlak biedt aan het fluïdum, dan heeft $\int v^2 dm'$ de zelfde waarde teruggekregen, nadat nt met 180 graden is toegenomen: en in dat geval verdwijnen de leden die van nt, $3nt$, $5nt$ etc. afhangen, zodat ontstaat

$$\int v^2 dm' = m'\theta' n^2 \{b_0 + b_2 \cos(2nt + \beta_2) + b_4 \cos(4nt + \beta_4) + \text{etc.}\}$$

Gesteld dus dat $\frac{m'}{m}$ een dergelijke grootheid is, dat de de tweede en hogere machten ervan verwaarloosd kunnen worden, dan verdwijnt het effect van deze uitdrukking op de extensie van de slingeringen, maar op de lengte van de enkelvoudige slinger (1)[118] is het[119] daarentegen zodanig dat dan de lengte van een enkelvoudige slinger in een vacuüm die isochroon is met een samengestelde die zich in een fluïdum beweegt, wordt

$$l = \frac{a^2 + k^2 + \frac{2m'}{m}\Big\{b_2 \cos\beta_2 - 2b_4\beta_4 + 3b_6\beta_6 - \text{etc.}\Big\}}{a\Big(1 - \frac{a'm'}{am}\Big)} = \frac{a^2 + k^2 + \frac{m'}{m}Q}{a\Big(1 - \frac{a'm'}{am}\Big)}$$

waaruit, door te stellen dat $Q = \mu(a^2 + k^2)$, en dat de slinger in alle delen homogeen is, verkregen wordt dat

$$l = \frac{a^2 + k^2}{a - \frac{m'}{m}a}\Big(1 + \frac{m'}{m}\mu\Big)$$

De grootheid $\frac{m'}{m}$ echter, waarvan we de voorwaarde slechts in het algemeen hebben onderzocht, blijft niet altijd dezelfde[120], maar is veranderlijk omgekeerd evenredig aan de expansie, en recht evenredig aan de luchtdruk, zodat, in het algemeen als Θ een zekere toestand van de atmosfeer betekent, men krijgt

$$\Theta = \frac{m'}{m}\left\{\frac{p' - \frac{\frac{3}{8}V(1+\delta\tau')}{1+\delta\tau}}{p(1+\delta\tau)}\right\}$$

waarin p de luchtdruk aangeeft, oftewel de referentiehoogte van de barometer waarbij de dichtheid van de lucht bekend wordt verondersteld, die overeenkomt met de referentietemperatuur; en waarin p' de hoogte van de barometer aangeeft, τ de temperatuur ten tijde van de waarneming:

[118](1) Cf. BESSEL l.l. pag. 36. 129.
[119]Noot van de vertaler: het wil zeggen het effect van deze uitdrukking.
[120]Noot van de vertaler: de grootheid m'/m (...) blijft niet altijd dezelfde betekent de grootheid m'/m (...) heeft niet altijd dezelfde waarde.

pagina 53

δ de uitzetting van de lucht voor iedere graad van een willekeurige thermometer: V de spanning van de in de lucht bevatte waterdampen: τ' de temperatuur waarop het dauwpunt aangegeven wordt op de hygrometer van Daniell. Wat echter het $\frac{m'}{m}$-deel van het coëfficiënt betreft, waarvan de luchtdampen die in de lucht aanwezig zijn, de reden zijn, daarvan[121] zijn we, na het uitvoeren van de berekeningen, overtuigd dat dat[122], ook al nemen we een toestand van de lucht aan die een zeer grote of een zeer kleine hoeveelheid dampen bevat, op de waarnemingen zelf geen enkele verandering uitoefent (1)[123]: dus zonder risico op fouten verwaarloosd kan worden. En daarom krijgt men de volgende formules met behulp waarvan de reductie naar een luchtledig moet worden uitgevoerd; waarbij t de slingertijd aangeeft, n het aantal slingerbewegingen, en l de lengte van de enkelvoudige slinger in een luchtledig: t', n', l' respectievelijk de zelfde functies in de lucht van de atmosfeer:

$$t = t'\Big\{1 - \frac{m'}{2m}\Big(\frac{p'}{p[1+\delta\tau]}\Big)(1+\mu)\Big\} \tag{34}$$

$$n = n'\Big\{1 + \frac{m'}{2m}\Big(\frac{p'}{p[1+\delta\tau]}\Big)(1+\mu)\Big\} \tag{35}$$

$$l = l'\Big\{1 + \frac{m'}{m}\Big(\frac{p'}{p[1+\delta\tau]}\Big)(1+\mu)\Big\} \tag{36}$$

4. Reductie naar het zeeniveau

12. Tenslotte is te vermelden de reductie naar het zeeniveau, die op alle experimenten rond de lengte van de slinger moet worden toegepast.

Laat l de lengte zijn van de enkelvoudige slinger in een luchtledig, g de werking van de zwaarte op het zeeniveau op een afstand r van het middelpunt van de aarde; en l' de lengte van dezelfde slinger in het gebied waar de waarneming wordt uitgevoerd, en laat de hoogte daarvan boven het zeeniveau zijn $= a$, en laat daar

[121] Noot van de vertaler: daarvan wil zeggen: van het $\frac{m'}{m}$-deel van het coëfficiënt

[122] Noot van de vertaler: Dat wil zeggen: het $\frac{m'}{m}$-deel van het coëfficiënt

[123] (1) Hoewel dat zo is, zal voor wie de zaak toch theoretisch beschouwt, duidelijk zijn, dat de aanwezigheid in de lucht van een grotere of kleinere hoeveelheid dampen althans enige invloed en uitwerking heeft op de dichtheid van de lucht: en daarom lijkt het wonderlijk dat nergens, voor zover we weten, melding gemaakt wordt van het toepassen van deze grootheid, die afhangt van de hygrometrische toestand van de lucht, op de lengte van de slinger die tot een luchtledig gereduceerd moet worden.

pagina 54

de zwaarte door g' uitgedrukt worden: dan wordt de lengte op het zeeniveau vervat in de uitdrukking $l = \frac{l'g}{g'}$. De werkingen van de zwaarte zijn echter omgekeerd evenredig aan de gekwadrateerde afstanden waarop zij respectievelijk betrekking hebben, zodat men in ons geval krijgt

$$g : g' = (r + a)^2 : r^2$$

en als men die waarde van $g : g'$ in de voorafgaande vergelijking substitueert, krijgt men

$$l = l'\Big(\frac{r + a}{r}\Big)^2 = l'\Big(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a}{r}\Big) \tag{37}$$

Maar als de reductie op het aantal slingeringen van de slinger moet toegepast worden, krijgt men

$$n = n'\Big(1 + \frac{a}{r}\Big) \tag{38}$$

waar n het aantal slingerbewegingen van de slinger aangeeft op het zeeniveau, n' hetzelfde aantal in het gebied dat een afstand a verwijderd is van het zeeniveau.

——<>——

Derde Hoofdstuk - DE TOEPASSING VAN DE SLINGER OP DE VORM VAN DE AARDE

1. Op basis van wat in het voorgaande hoofdstuk voor besproken gehouden wordt, staat vast dat er een verhouding bestaat tussen de lengte van de enkelvoudige slinger en de werking van de zwaarte aan het oppervlak van de aarde: de zwaarte zelf wederom hangt noodzakelijkerwijs af van de algemene samenstelling van de aarde: laten we dus kijken welke functie van de vorm van de aarde deze[124] vormt, zodat we vandaar, rekening houdend met de experimenten, die rond de slinger zijn uitgevoerd, de vorm zelf van de aarde bepalen.

En laten we tot dat doel het evenwicht onderzoeken van een vloeibare massa die een lichaam bedekt dat is samengesteld uit lagen van een verschillende dichtheid, en dat een draaiende beweging rond een as heeft, en dat onderhevig is aan de aantrekking van externe lichamen.

Maar als x, y, z de coördinaten zijn van een vloeibaar punt dat in rust is, en X, Y, Z de krachten die op de vloeistof uitgeoefend worden aan het oppervlak, waarvan de dichtheid constant is, zal de vergelijking (1)[125] van het evenwicht zijn

$$0 = Xdx + Ydy + Zdz \tag{39}$$

en kan er op geen enkele andere manier evenwicht zijn (2)[126], dan als $Xdx + Ydy + Zdz$ de differentiële integer is van een functie Q van drie variabelen. Als vergelijking (39) dus tot integratie wordt gevoerd komt daaruit

$$\text{Const} = Q \tag{40}$$

[124] Noot van de vertaler: deze verwijst naar zwaarte

[125] (1) Mécanique Céleste Tom. 1 pag. 49. Mec. Anal. Tom. I pag. 185. POISSON Traité de Mécanique Tom. 2 pag. 324.

[126] (2) Mécanique Céleste Tom. 2 pag. 64.

pagina 56

Maar als we deze op de vorm van de aarde toepassen, zó dat het begin van de coördinaten in het middelpunt van de aarde wordt genomen, en x staat voor de as, en T voor de tijd van de omwenteling, komt er buiten de aantrekking geen andere kracht in aanmerking, tenzij de centrifugale kracht, die in drie krachten is opgelost, in de x-richting daarvan nul wordt, en volgens de y-richting $\frac{4\pi^2}{T^2}y$ zal zijn, en in de z-richting de grootte $\frac{4\pi^2}{T^2}z$ aanneemt. Aan Q moet dus om deze reden toegevoegd worden de term, $\frac{2\pi^2}{T^2}(y^2+z^2) = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{3\pi}{2T^2} r'^2(1-\mu^2)$, waar r' staat voor de afstand van het aangetrokken molecuul vanaf het middelpunt, en μ voor de cosinus van de hoek die straal r' met de as x vormt. Wat betreft de aantrekking, die door de werking van van externe lichamen wordt geproduceerd: wanneer dM de aantrekkende molecuul is, met de coördinaten x', y', z', zal de aantrekking ervan (1)[127] in de richting van x zijn $\frac{(x'-x)dM}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$, en krijgt men gelijke uitdrukkingen voor de aantrekkingen in de overige assen van de coördinaten; dus levert de aantrekking van één deeltje aan Q de term $\frac{dM}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{1}{2}}}$: en daaruit volgt dat de aan Q toe te voegen term, die zijn oorsprong heeft uit de aantrekking van alle externe lichamen, gelijk is aan de som van alle moleculen gedeeld door de respectieve afstand vanaf het aangetrokken deeltje (2)[128]. Laten we stellen dat deze term uitgedrukt wordt door V: dan heeft men

$$Q = V + \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{3\pi}{2T^2} r'^2(1-\mu^2) \tag{41}$$

De waarde van V moet nog vastgesteld worden.

2. Laat a de halve poolas zijn van een elliptische sferoïde, waarvan de as van de evenaar gehalveerd gelijk is aan $a(1+e)$, en laat μ' de sinus van de breedte van een willekeurig punt zijn, en r de straal die met dit punt overeenkomt, dan zal $r = a[1+e(1-\mu'^2) - \frac{3e^2}{2}(\mu'^2\mu'^4)]$

De straal van een oppervlak met een constante dichtheid zal dus, als men de waarden van e die de tweede[129]

[127](1) Mec. cel. Tom. 2 pag. 13.
[128](2) ibid. pag. 65.
[129]Noot van de vertaler: de tweede wil zeggen (vermoed ik): de tweede waarde van e.

pagina 57

overschrijden, verwaarloost, gelijk zijn aan $a[1+e(1-\mu'^2)-\frac{3e^2}{2}(\mu'^2\mu'^4)]$, als men de grootheid van de tweede orde toevoegt. Maar door dan de elliptische waarde van r toe te passen, blijkt dat aan de evenwichtsvergelijking niet voldaan kan worden door de aanwezigheid van μ'^4 : maar dat deze vergelijking toch geen verdere waarden van μ' omvat.

Zeer geschikt om aan deze grootheid van de tweede orde toe te kennen, zal dus de form $aA(\mu'^4 - \mu'^2)$ zijn, vanwege dat hij evenzeer aan de evenaar als aan de pool nul wordt, maar in de middenbreedtes van het oppervlak drukt hij de depressie uit onder een ellipsoïde die gelijke assen heeft. Dus zal in een sferoïdaal oppervlak van constante dichtheid

$$r = a\Big[1 + e(1-\mu'^2) - \Big(\frac{3e^2}{2} + A\Big)(\mu'^2 - \mu'^4)\Big]$$

Laat verder r' de afstand zijn van een ander punt vanaf het middelpunt, en μ de Sinus van de breedte daarvan, en θ de breedte ervan, en ω de lengte; en laten we de breedte van het voorafgaande punt aangeven met θ', en de lengte met μ': als men dan z neemt als de aanduiding van de afstand van beide punten van elkaar, dan krijgt men (1)[130]

$$\begin{aligned} z =&\{r^2 - 2rr'[\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\cos(\omega'-\omega)] + r'^2\}^{\frac{1}{2}} \\ =&\{r^2 - 2rr'[\mu\mu' + (1-\mu^2))^{\frac{1}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}}(\omega'-\omega)] + r'^2\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{42}$$

Als ρ de dichtheid van een heterogene sferoïde aangeeft, zal V in deze sferoïde gevonden worden door $\rho\frac{r^2}{z}\frac{dr}{da}$ te integreren ten opzichte van de grootheden a, ω' en μ', oftewel door $\iiint \rho\frac{r^2}{z}\frac{dr}{da}\cdot da d\omega' d\mu'$, dat geïntegreerd moet worden, te nemen tussen de congruente limieten: en dat zijn voor μ', -1 en $+1$, en voor ω' 0 en 2π, en voor a 0 en α, vanaf het middelpunt tot aan het oppervlak, als α aangeeft de waarde van a op het oppervlak van de buitenkant van de sferoïde.

Laat, opdat de aangegeven integratie uitgevoerd kan worden $\frac{1}{z} = \frac{U_0}{r'} + \frac{U_1 r}{r'^2} + \frac{U_2 r^2}{r'^3} + \frac{U_3 r^3}{r'^4} +$ etc. voor de onderste lagen, en

[130](1) Mec. Cel. Tom. 2 pag. 67.

pagina 58

$\frac{1}{z} = \frac{U_0}{r} + \frac{U_1 r'}{r^2} + \frac{U_2 r'^2}{r^3} + \frac{U_3 r'^3}{r^4} +$ etc. voor de buitenste lagen. Als men dat stelt voldoet U_1 aan de vergelijking (1)[131]

$$0 = \frac{d}{d\mu} \cdot \left\{(1-\mu^2)\frac{dU_1}{d\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2} \cdot \frac{d^2U_1}{d\omega^2} + m(m+1)U_1 \qquad (43)$$

en zal de waarde van V voor de binnenste lagen afhangen van het integreren van $\frac{1}{r'^{m+1}} \iiint \rho U_m r^{m+2} \frac{dr}{da} da d\omega' d\mu'$, en voor de buitenste lagen van het integreren van $r'^m \iiint \rho \frac{U_m}{r^{m-1}} \frac{dr}{da} da d\omega' d\mu'$, waarin m successievelijk $= 0, 1, 2, 3$ etc.

r^{m+3} wordt dan geëvolueerd naar een rij van de vorm $b_0 z'_o + b_1 z'_1 + b_2 z'_2 +$etc. waar b_0, b_1, ... functies zijn van a, en z'_k een functie van μ' die voldoet aan de vergelijking

$$0 = \frac{d}{d\mu'} \cdot \left\{(1-\mu'^2)\frac{dz'_k}{d\mu'}\right\} + k(k+1)z_k$$

Dus zal zijn

$$r^{m+2}\frac{dr}{da} = \frac{1}{m+3}\frac{dr^{m+3}}{da} = \frac{1}{m+3}\frac{d}{da} \cdot (b_0 z'_0 + b_1 z'_1 + b_2 z'_2 + \text{etc.})$$

zó dat V voor de binnenste lagen gelijk is aan de som van waardes van

$$\frac{1}{(m+3)r'^{1+m}} \int \rho da \frac{db_k}{da} \iint U_m z'_k d\omega' d\mu'$$

als m en k successievelijk gesteld worden $= 0, 1, 2, 3$ etc. en de integralen ten opzichte van a genomen worden vanaf $a = 0$ tot aan $a = \eta$, waarbij η de waarde aangeeft van a in de laag van constante dichtheid, gaande over een gegeven punt; voor de buitenste lagen echter[132] aan de som van de waardes $r'^m \int \rho da \iint \frac{U_m}{r^{m-1}} \frac{dr}{da} d\omega' d\mu'$

En dus $\frac{1}{r^{m-1}} \frac{dr}{da} = \frac{1}{2-m} \frac{d}{da} \cdot \frac{1}{r^{m-2}}$, uitgezonderd waar $m = 2$, waar namelijk

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{da} = d\frac{\log r}{da}$$

[131] (1) Mec. Cel. Tom. 2 pag. 25.

[132] Noot van de vertaler: De constructie van de zin lijkt mij: voor de binnenste lagen is V gelijk aan de som van alle waardes ...., en voor de buitenste lagen is V gelijk aan de som van de waardes ....

pagina 59

Door r^{2-m} te evolueren naar de rij $\beta_0\vartheta'_0 + \beta_1\vartheta'_1 + \beta_2\vartheta'_2 +$ etc. , moet om de waarde van V te krijgen de som genomen worden van alle waardes van $\frac{r'^m}{2-m}\int \rho da \frac{d\beta_k}{da}\iint U_m\vartheta'_k d\omega' d\mu'$, wanneer $k = 0, 1, 2, 3...$ en $m = 0, 1, 3, 4...$

Voor $m = 2$, moet $\log r$ geëvolueerd worden naar de rij $c_0y'_0+c_1y'_1+c_2y'_2+etc.$ en moet de som genomen worden van de waardes van $r'^2\int \rho da \frac{dc_k}{da}\iint U_2 y'_k d\omega' d\mu'$: maar in dit geval moeten ze[133] ten opzichte van de integraal a genomen worden van $a = \eta$ tot $a = \alpha$.

Verder wordt $\iint U_m z'_k d\omega' d\mu'$ altijd nul tussen de limieten $\mu' = -1$ en $\mu' = +1$, en van $\omega' = 0$ tot $\omega' = 2\pi$, uitgezonderd het geval waar $k = m$: en $Q_m = \frac{4\alpha'\pi}{2m+1}a^{m+3}Y_1$; maar tussen dezelfde limieten $Q_m = \alpha' a^{m+3} U_m Y'_m d\omega' d'\mu'$: dus zal $\iint U_m Y'_m d\omega' d\mu' = \frac{4\pi}{2m+1}Y_1$, waar Y'_m een functie is van μ' en ω', voldoen aan de vergelijking

$$0 = \frac{d}{d\mu'}\Big\{(1-\mu'^2)\frac{dY'_m}{d\mu'}\Big\} + \frac{1}{1-\mu'^2}\cdot\frac{d^2Y'_m}{d\omega'^2} + m(m+1)Y'_m$$

Dus

$$\begin{aligned}\iint U_1 z'_m d\omega' d\mu' =& \frac{4\pi}{2m+1}Z_m \\ \iint U_1 \vartheta'_m d\omega' d\mu' =& \frac{4\pi}{2m+1}z_m \\ \iint U_2 y'_2 d\omega' d\mu' =& \frac{4\pi}{5}y_2\end{aligned}$$

waar Z_m, z_m en y_2 de waarden zijn van z'_m , ϑ'_m en y'_2 wanneer μ' overgaat in μ.

3. Dus voor de binnenste delen van een sferoïde heeft men, als $m = 0$

$$r^3 = a^3\Big\{1 + 3e(1-\mu'^2) + 3e^2(1-\mu'^2)^2 - \Big(3A + \frac{9e^2}{2}\Big)(\mu'^2 - \mu'^4)\Big\}$$

Aangezien echter z'_m , als het niet afhangt van ω', een veelvoud is van de waarde van

$$\mu'^m - \frac{m(m-1)}{2(2m-1)}\cdot\mu'^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 4(2m-1)(2m-3)}\mu'^{m-4} - \text{etc.}$$

[133] Noot van de vertaler: Moeten ze genomen worden: Waarnaar (sumendae sunt): ze verwijst naar quantitatum / grootheden. Het geslacht van quantitatum (vrouwelijk) congrueert met sumendae.

pagina 60

moet r opgelost worden in veelvouden van $\mu'^4 - \frac{6}{7}\mu'^2 + \frac{3}{35}$, van $\mu'^2 - \frac{1}{3}$, en van constante grootheden. Als dat gedaan is komt te voorschijn

$$r^3 = a^3(1{+}2e{+}e^2{-}\frac{2}{3}A){-}a^3(3e{+}\frac{57}{14}e^2{+}\frac{3}{7}A)(\mu'^2{-}\frac{1}{3}){+}(\frac{15}{2}e^2{+}3A)(\mu'^4{-}\frac{6}{7}\mu'^2{+}\frac{3}{35})$$

en daarvandaan $b_0 = a^3(1 + 2e + e^2 + \frac{2}{5}A)$,$z_0 = 1$; en op gelijke wijze krijgt men, wanneer $m = 2$,

$$r^5 = \text{Const} - a^5(5e + \frac{25}{2}e^2 + \frac{5}{7}A)(\mu'^2 - \frac{1}{3}) + n(\mu'^4 - \frac{6}{7}\mu'^2 + \frac{3}{35})$$

als we met n het veelvoud van een andere grootheid aanduiden: en daarvandaan $b2 = -a^5(5e + \frac{25}{2}e^2 + \frac{5}{7}A)$, $z_2 = \mu 2 - \frac{1}{3}$; en voor $m = 4$ heeft men

$$r7 = \text{Const} + n(\mu'^2 - \frac{1}{3}) + a^7(\frac{63}{2}e^2 + 7A)(\mu'^4\frac{6}{7}\mu'^2 + \frac{3}{35})$$

en daarvandaan $b_4 = a^7(\frac{63}{2}e^2 + 7A)$, $z_4 = \mu^4 - \frac{6}{7}\mu^2 + \frac{3}{35}$.

Nu we dan verschillende termen hebben bijeengebracht van de uitdrukking $\frac{1}{(m+3)r'^{m+1}}\int \rho da\frac{db_k}{da}\iint U_m z'_k d\omega' d\mu'$, levert dat op voor de binnenste lagen

$$V = \frac{4\pi}{1\cdot 3r'}\int \rho da\frac{d\cdot a^3(1+2e+e^2-\frac{2}{5}A)}{da} - \frac{4\pi}{5^2r'^3}\int \rho da\frac{d\cdot a^5(5e+\frac{25}{2}e^2+\frac{5}{7}A)}{da}\cdot(\mu^2-\frac{1}{3})$$
$$+\frac{4\pi}{7\cdot 9r'^5}\int \rho da\frac{d\cdot a^7(e^2+\frac{2}{9})}{da}(\mu^4-\frac{6}{7}\mu^2+\frac{3}{35})$$

Laat

$$\int \rho da\frac{d\cdot a^3(1+2e+e^2-\frac{2}{5}A)}{da} = \phi(a)$$
$$\int \rho da\frac{d\cdot a^5(e+\frac{5}{2}e^2+\frac{1}{7}A)}{da} = \psi(a)$$
$$\int \rho da\frac{d\cdot a^7(e^2+\frac{2}{9})}{da} = \upsilon(a)$$

dan zal, door wat geïntegreerd moet worden te nemen tussen de limieten $a = 0$ en $a = \eta$, voor de binnenste lagen

$$V = \frac{4\pi}{3}\Big\{\frac{\phi(\eta)}{r'} - \frac{3}{5}\frac{\psi(\eta)}{r'^3}(\mu^2-\frac{1}{3}) + \frac{3}{2}\frac{\upsilon(\eta)}{r'^5}(\mu^4-\frac{6}{7}\mu^2+\frac{3}{35})\Big\} \qquad (44)$$

Voor de buitenste lagen, wanneer $m = 0$, krijgt men $r^2 = a^2\{1 + 2e(1 - \mu'^2) + e^2(1-\mu'^2)^2 - (3e^2+2A)(\mu'^2-\mu'^4)\}$, oftewel

$$r^2 = a^2\Big(1{+}\frac{4e}{3}{+}\frac{2e^2}{15}{-}\frac{4}{15}A\Big){-}a^2(2e{+}\frac{11}{17}e^2{+}\frac{2}{7}A)(\mu'^2{-}\frac{1}{3}){+}a^2(4e^2{+}2A)(\mu'^4\frac{6}{7}\mu'^2{+}\frac{3}{35})$$

en daarvandaan $\beta_0 = a^2\Big(1 + \frac{4e}{3} + \frac{2e^2}{15} - \frac{4}{15}A\Big); \vartheta_0 = 1$ Maar als $m = 2$, komt te voorschijn

$$\log r = \log a + e(1 - \mu'^2) - \frac{e^2}{2}(1 - \mu'^2)^2 - \left(\frac{3e^2}{2} + A\right)(\mu'^2 - \mu'^4)$$

pagina 61

$$\log r = \text{Const} - \Big(e - \frac{5}{14}e^2 + \frac{A}{7}\Big)(\mu^2 - \frac{1}{3}) + n\Big(\mu'^4 - \frac{6}{7}\mu'^2 + \frac{3}{35}\Big)$$

en daarvandaan $c_2 = -\Big(e - \frac{5}{14}e^2 + \frac{A}{7}\Big)$, $y_2 = \mu^2 - \frac{1}{3}$

Als de termen zijn bijeengebracht vindt men voor de buitenste lagen

$$\begin{aligned} V =& \frac{4\pi}{2}\int \rho da \frac{d\cdot a^2(1+\frac{4e}{3}+\frac{2e^2}{15}-\frac{4}{15}A)}{da} - \frac{4\pi}{5}r'^2\int \rho da \frac{d\cdot(e-\frac{5}{14}e^2+\frac{A}{7})}{da}(\mu^2-\frac{1}{3}) \\ &+ \frac{4\pi}{2\cdot 9}r'^4\int \rho da\frac{d\cdot Aa^{-2}}{da}(\mu^4-\frac{6}{7}\mu^2+\frac{3}{35}) \end{aligned}$$

Door te stellen

$$\begin{aligned} \int \rho da \frac{d\cdot a^2(1+\frac{4e}{3}+\frac{2e^2}{15}-\frac{4}{15}A)}{da} =& \tau(a) \\ \int \rho da \frac{d\cdot(e-\frac{5}{14}e^2+\frac{A}{7})}{da} =& \chi(a) \\ \int \rho da\frac{d\cdot Aa^{-2}}{da} =& \zeta(a) \end{aligned}$$

en door a te integreren[134] van $a = \eta$ tot aan $a = \alpha$ krijgen we voor de buitenste lagen

$$V = \frac{4\pi}{3}\Big\{\frac{3}{2}[\tau(\alpha)-\tau(\eta)] - \frac{3}{5}r'^2[\chi(\alpha)-\chi(\eta)](\mu^2-\frac{1}{3}) + \frac{r'^4}{3}[\zeta(\alpha)-\zeta(\eta)](\mu^4-\frac{6}{7}\mu^2+\frac{3}{35})\Big\} \tag{45}$$

Door beide expressies van V in een som bijeen te brengen komt de volledige waarde ervan te voorschijn

$$\begin{aligned} V =& \frac{4\pi}{3}\Big\{\frac{\phi(\eta)}{r'} + \frac{3}{2}[\tau(\alpha)-\tau(\eta)] + \Big(\frac{\psi(\eta)}{r'^3} + r'^2[\chi(\alpha)-\chi(\eta)]\Big)\Big(\frac{1-3\mu^2}{5}\Big) \\ &+ \Big(\frac{\upsilon(\eta)}{r'^5} + \frac{2}{9}r'^4[\zeta(\alpha)-\zeta(\eta)]\Big)(\frac{9}{70}-\frac{9}{7}\mu^2+\frac{3}{2}\mu^4)\Big\} \end{aligned} \tag{46}$$

[134] Noot van de vertaler: in de tekst staat sumendo integralis. integralis is nominativus of genitivus enkelvoud, terwijl ik een accusativus verwacht, omdat integralis object bij sumendo ab $a = \eta$ usque ad $a = \alpha$ lijkt te moeten zijn. Zoals op pag. 58 (integralia sumantur ab $a = 0$ usque ad $a = \eta$) en pag. 60 (integranda sumendo inter limites $a = 0$ atque $a = \eta$). Er lijkt hier een schrijffout of een drukfout gemaakt te zijn, d.w.z. ik kan de tekst zoals het er staat niet vertalen. Misschien moet er integralia (accusativus meervoud) staan i.p.v. integralis. Er hoeft dan slechts één letter veranderd te worden (een kleine druk/schrijffout, is niet onaannemelijk), en ik kan de tekst dan wél vertalen. De accusativus is in overeenstemming met de context, d.w.z. met het gebruik van sumere. Het meervoud is in overeenstemming met het feit dat er drie formules voorafgaan aan sumendoque integralis ab $a = \eta$ usque ad $a = \alpha$.

en door die waarde van V in §1. form. 46 te substitueeren krijgt men

$$Q = \frac{4\pi}{3}\Big\{\frac{\phi(\eta)}{r'} + \frac{3}{2}[\tau(\alpha) - \tau(\eta)] + \Big(\frac{\psi(\eta)}{r'^3} + r'^2[\chi(\alpha) - \chi(\eta)]\Big)\Big(\frac{1-3\mu^2}{5}\Big) + \\ \frac{3\pi}{2T^2}r'^2(1-\mu^2) + \Big(\frac{\upsilon(\eta)}{r'^5} + \frac{2}{9}r'^4[\rho(\alpha) - \rho(\eta)]\Big)(\frac{9}{70} - \frac{9}{7}\mu^2 + \frac{3}{2}\mu^4)\Big\} \tag{47}$$

Maar als dan e' en E dezelfde functies zijn van η, zoals e en A van a, zal

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1}{\eta}\Big\{1 - e'(1-\mu^2) + e'^2\Big(1 - \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^4}{2}\Big) + E(\mu^2) - \mu^4\Big\} \\ \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{\eta^3}\Big(1 - 3e'(1-\mu^2)\Big)\ ;\ r^2 = \eta^2\Big(1 + 2e'(1-\mu^2)\Big) \\ \frac{1}{r^5} &= \frac{1}{\eta^5}\ ;\ r^4 = \eta^4\end{aligned}$$

En als die waarden in de voorafgaande vergelijking worden gesubstitueerd, komt er uit

pagina 62

$$Q = \frac{4\pi}{3}\begin{cases} \frac{\phi(\eta)}{r'} + \frac{3}{2}[\tau(\alpha) - \tau(\eta)] \\ -\frac{e'\phi(\eta)}{\eta}(1-\mu^2) + \Big(\frac{\psi(\eta)}{a^3} + \eta^2[\chi(\alpha) - \chi(\eta)]\Big) \cdot \frac{1-3\mu^2}{5} + \frac{3\pi}{2T^2} \cdot \eta^2(1-\mu^2) \\ +\frac{e'^2\phi(\eta)}{\eta}\Big(1 - \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^4}{2}\Big) + \frac{E\phi(\eta)}{\eta}(\mu^2 - \mu^4) - \frac{3e'\psi(\eta)}{\eta^3}(1-\mu^2) \cdot \frac{1-3\mu^2}{5} + \frac{3\pi}{T^2}e'\eta^2(1-\mu^2)^2 \\ +2e'\eta^2[\chi(\alpha) - \chi(\eta)](1-\mu^2)\frac{1-3\mu^2}{5} + \Big(\frac{\upsilon(\eta)}{\eta^5} + \frac{2}{9}\eta^4[\zeta(\alpha) - \zeta(\eta)]\Big)\Big(\frac{9}{70} - \frac{9}{7}\mu^2 + \frac{3}{2}\mu^4\Big) \end{cases} \tag{48}$$

Door de coëfficiënten van μ^2 en μ^4 gelijk te stellen aan nul, en a in de plaats van η: wat kan om de reden dat de vergelijking algemeen is voor alle waarden van η, – krijgt men de evenwichtsvergelijkingen

$$0 = \begin{cases} \frac{e\phi(a)}{a} - \frac{3}{5}\frac{\psi(a)}{a^3} - \frac{3}{5}a^2[\chi(\alpha) - \chi(a)] - \frac{3\pi a^2}{2T^2} \\ -\frac{e^2\phi(a)}{2a} + \frac{A\phi(a)}{a} + \frac{12}{5}\frac{e\psi(a)}{a^3} - \frac{8}{5}ea^2[\chi(\alpha) - \chi(a)] - \frac{6\pi e a^2}{T^2} \\ -\frac{9}{7}\Big(\frac{\upsilon(a)}{a^5} + \frac{2}{9}a^4[\zeta(\alpha) - \zeta(a)]\Big) \end{cases} \tag{49}$$

$$0 = \begin{cases} -\frac{e^2\phi(a)}{2a} - \frac{9}{5}\frac{e\psi(a)}{a^3} + -\frac{A\phi(a)}{a} + \frac{6}{5}ea^2[\chi(\alpha) - \chi(a)] - \frac{3\pi a^2 e}{T^2} \\ +\frac{3}{2}\Big(\frac{\upsilon(a)}{a^5} + \frac{2}{9}a^4[\zeta(\alpha) - \zeta(a)]\Big) \end{cases} \tag{50}$$

die door hen te differentiëren altijd in twee differentiële vergelijkingen worden opgelost. En vandaar wordt gezocht naar beide grootheden A en ϵ: en zo kan in die vorm die wij aan de straal hebben toegekend, een evenwicht blijven bestaan.

Aan het oppervlak gaan deze vergelijkingen over in de volgende

$$0 = (\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + A) \cdot \frac{\phi(\alpha)}{\alpha} - (\frac{3}{5} - \frac{12}{5}\epsilon) \cdot \frac{\psi(\alpha)}{\alpha^3} - \frac{3\pi}{T^2}\alpha^2(1 + 4\epsilon) - \frac{9}{7}\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^5} \tag{51}$$

$$0 = -\Big(\frac{\epsilon^2}{2} + A\Big)\frac{\phi(\alpha)}{\alpha} - \frac{9}{5}\epsilon\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^3} + \frac{3\pi\alpha^2\epsilon}{T^2} + \frac{3}{2}\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^3} \tag{52}$$

pagina 63

4. De kracht die op een willekeurig punt in de richting van r' wordt uitgeoefend, wordt gevonden door vergelijking (4) §3 ten opzichte van r' te differentiëren (1)[135]. Omdat echter deze kracht in richting x wordt voorgesteld door $\frac{dQ}{dx}$, zal die in de richting van r' $\frac{dQ}{dr'}$ zijn, wanneer we tenminste de as van x als samenvallend met de straal r' denken: in de volgende uitdrukking is α een functie van r'; maar aangezien de termen die uit het differentiëren ten opzichte van α voortvloeien, elkaar wederzijds vernietigen, zal deze kracht in de richting van r' zijn

$$\frac{4\pi}{3}\begin{cases}\frac{\phi(\alpha)}{r'^2}-\left(2r'[\chi(\alpha)-\chi(a)]-\frac{3\psi(a)}{r'^4}\right)\cdot\frac{1-3\mu^2}{5}-\frac{3\pi}{T^2}r'(1-\mu^2)\\ -\left(\frac{8}{9}r'^3[\zeta(\alpha)-\zeta(a)-\frac{5\upsilon(a)}{r'^6}]\right)\left(\frac{9}{70}-\frac{9}{7}\mu^2+\frac{3}{2}\mu^4\right)\end{cases}$$

en die wordt aan de buitenkant van het oppervlak

$$\frac{4\pi}{3}\left\{\frac{\phi(\alpha)}{r'^2}+\frac{3}{5}\frac{\psi(\alpha)}{r'^4}(1-3/mu^2)-\frac{3\pi r'}{t^2}(1-\mu^2)+\frac{\upsilon(\alpha)}{r'^5}\left(\frac{9}{14}-\frac{45}{7}\mu^2+\frac{15}{2}\mu^4\right)\right\}$$

Aangezien echter

$$\frac{1}{r'^2}=\frac{1}{\alpha^2}\left\{1-2\epsilon(1-\mu^2)+3\epsilon^2(1-\mu^2)+2A(\mu^2-\mu^4)\right\}$$
$$\frac{1}{r'^4}=\frac{1}{\alpha^4}\left(1-4\epsilon(1-\mu^2)\right)$$
$$r'=\alpha(1+\epsilon(1-\mu^2))\ ;\ \frac{1}{r'^6}=\frac{1}{\alpha^6}$$

is de kracht die op een bepaald punt van het oppervlak wordt uitgeoefend, in de richting van r'

$$\frac{4\pi}{3}\begin{cases}\frac{\phi(\alpha)}{\alpha^2}-\frac{2\epsilon\phi(\alpha)}{\alpha^2}(1-\mu^2)+\frac{3}{5}\frac{\psi(a)}{\alpha^4}(1-3\mu^2)-\frac{3\pi\alpha}{T^2}(1-\mu^2)\\ +\frac{3\epsilon^2\phi(\alpha)}{\alpha^2}(1-\mu^2)+\frac{2A\phi(\alpha)}{\alpha^2}(\mu^2-\mu^4)-\frac{12}{5}\frac{\epsilon\psi(\alpha)}{\alpha^4}(1-\mu^2)(1-3\mu^2)\\ -\frac{3\pi\alpha\epsilon}{T^2}(1-\mu^2)^2+\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^6}\left(\frac{9}{14}-\frac{45}{7}\mu^2+\frac{15}{2}\mu^4\right)\end{cases}$$

[135](1) Méc. cél. Tom. 2 pag. 71.

pagina 64

door deze expressie te delen door de Cosinus van de verticale hoeklijn, heeft men de hele werking van de zwaarte bij ieder punt van het oppervlak: en die wordt aangeduid door g

$$g = \frac{4\pi}{3}\begin{cases} \frac{\phi(\alpha)}{\alpha^2} - \frac{2\epsilon\phi(\alpha)}{\alpha^2}(1-\mu^2) + \frac{3}{5}\frac{\psi(a)}{\alpha^4}(1-3\mu^2) - \frac{3\pi\alpha}{T^2}(1-\mu^2) + \frac{2\epsilon^2\phi(\alpha)}{\alpha^2}(\mu^2-\mu^4) \\ +\frac{3\epsilon^2\phi(\alpha)}{\alpha^2}(1-\mu^2) + \frac{2A\phi(\alpha)}{\alpha^2}(\mu^2-\mu^4) - \frac{12}{5}\frac{\epsilon\psi(\alpha)}{\alpha^4}(1-\mu^2)(1-3\mu^2) \\ -\frac{3\pi\alpha\epsilon}{T^2}(1-\mu^2)^2 + \frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^6}\left(\frac{9}{14} - \frac{45}{7}\mu^2 + \frac{15}{2}\mu^4\right) \end{cases}$$

In die expressie, als de Sinus van de gecorrigeerde breedte μ wordt veranderd in de Sinus van de ware breedte, oftewel in de $\sin\lambda$, wordt

$$g = \frac{4\pi}{3}\begin{cases} \frac{\phi(\alpha)}{\alpha^2}(1-2\epsilon+3\epsilon^2) + \frac{\psi(\alpha)}{\alpha^4}\left(\frac{3}{5} - \frac{12}{5}\epsilon\right) - \frac{3\pi\alpha}{T^2}(1+\epsilon) \\ +\frac{9}{14}\cdot\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^6} + \left[\frac{\phi(\alpha)}{\alpha^2}(2\epsilon-2\epsilon^2) - \frac{\psi(\alpha)}{\alpha^4}\left(\frac{9}{5} - \frac{12}{5}\epsilon\right) + \frac{3\pi\alpha}{T^2}(1+\epsilon) + \frac{15}{4}\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^6}\right]\sin^2\lambda \\ -\left(\frac{\phi(\alpha)}{\alpha^2}(6\epsilon^2-2A) - \frac{72}{5}\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^4} + \frac{9\pi a\epsilon}{T^2} + \frac{15}{2}\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^6}\right)\sin^2\lambda\cos^2\lambda \end{cases} \tag{53}$$

Op basis van §3. form. (50) en (51) echter is

$$\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^4} = \frac{\phi(\alpha)}{\alpha^2}\left(\frac{5e}{3} + \frac{5\epsilon^2}{6} + \frac{5A}{21}\right) = \frac{3\pi\alpha}{2T^2}\left(\frac{5}{3} + \frac{130}{21}\epsilon\right), \text{ en}$$

$$\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^6} = \frac{\phi(\alpha)}{\alpha^2}\left(\frac{7\epsilon^2}{3} + \frac{2A}{3}\right) - \frac{5\pi\alpha\epsilon}{T^2}$$

Als die waarden in vergelijking (53) worden ingevoerd, ontstaat

$$g = \frac{4\pi}{3}\begin{cases} \frac{\phi(\alpha)}{\alpha^2}\left[1-\epsilon+\epsilon^2+\frac{4A}{7}\right] - \frac{3\pi\alpha}{2T^2}\left(3+\frac{27}{7}\epsilon\right) \\ +\left(\frac{\phi(\alpha)}{\alpha^2}\left(2\epsilon^2-\epsilon+\frac{2}{7}A\right) + \frac{3\pi\alpha}{2T^2}(5+\frac{39}{7}\epsilon)\right)\sin^2\lambda \\ -\left(\frac{\phi(\alpha)}{\alpha^2}\left(3A-\frac{\epsilon^2}{2}\right) + \frac{15\pi\alpha\epsilon}{2T^2}\right)\sin^2\lambda\cos^2\lambda \end{cases} \tag{54}$$

Laten we stellen dat κ de relatie aangeeft tussen de centrifugale kracht en de zwaarte bij de evenaar: de centrifugale kracht bij de evenaar is echter $= \frac{4\pi\alpha^2}{T^2}\alpha(1+\epsilon)$; de zwaarte

pagina 65

bij de evenaar echter $= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\phi(\alpha)}{\alpha^2}(1-\epsilon) - \frac{9\pi\alpha}{2T^2}\right)$: derhalve $\frac{3\pi\alpha}{T^2}(1+\epsilon) = \frac{\phi(\alpha)}{\alpha^2} \cdot \kappa(1-\epsilon)$: en daarvandaan $\frac{3\pi\alpha}{2T^2} = \frac{\phi(\alpha)\kappa}{\alpha^2}\left(\frac{1}{2} - \epsilon - \frac{3\kappa}{4}\right)$: en als die waarden naar vergelijking (refeq3g) worden gesubstitueerd, heeft men

$$\begin{aligned} g =& \frac{4\pi}{3}\frac{\phi(\alpha)}{\alpha^2}(1 - \epsilon - \frac{3}{2}\kappa + \epsilon^2 + \frac{15}{14}\kappa\epsilon + \frac{2}{4}\kappa^2 + \frac{4}{7}A) \\ & \left\{1 + \left(\frac{5\kappa}{2} - \epsilon + \epsilon^2 - \frac{17}{14}\kappa\epsilon + \frac{2}{7}A\right)\sin^2\lambda - \left[\frac{5}{2}\kappa\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + 3A\right]\sin^2\lambda\cos^2\lambda\right\} \end{aligned} \tag{55}$$

en daarvandaan is door met g' de zwaarte bij de evenaar voor te stellen, voor iedere breedt λ

$$g = g'\left\{1 + \left[\frac{5\kappa}{2} - \epsilon + \epsilon^2 - \frac{17}{14}\kappa\epsilon + \frac{2}{7}A\right]\sin^2\lambda - \left[\frac{5}{2}\kappa\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + 3A\right]\sin^2\lambda\cos^2\lambda\right\} \tag{56}$$

Dus hoe de dichtheidsratio in het binnenste van de aarde ook is, de zwaarte op ieder punt van het oppervlak wordt vervat in een uitdrukking die slechts afhangt van de functies van het aardoppervlak.

5. En laten we, opdat die uitdrukking dan toegepast wordt op de experimenten die rond de lengte van de slinger zijn uitgevoerd, stellen dat $\sin^2\lambda$ en $\sin^2\lambda\cos^2\lambda$ opgelost zijn in in de cosinussen van de meervoudige bogen, zo dat in het algemeen de lengte van de enkelvoudige slinger uitgedrukt wordt door de formule

$$l = x + y\cos 2\lambda + z\cos 4\lambda \tag{57}$$

In de recentere experimenten die rond de lengte van de slinger zijn uitgevoerd, wordt, door het verschil tussen de geobserveerde lengte van de slinger en de lengte die door formule (57) wordt verkregen, voor te stellen door successievelijk $d_1, d_2, d_3 ... d_n$, een rij gevormd van conditievergelijkingen met de vorm

$$l - x - y\cos 2\lambda - z\cos 4\lambda = d_n,$$

en als die (1)[136] volgens de methode van de kleinste kwadraten in orde zijn gebracht, leveren ze de minimumvergelijkingen op ten opzichte van x, y, z

[136](1) De afzonderlijke conditievergelijkingen staan in de tabellen 2. 3, die zijn toegevoegd, waarin er op gelet moet worden dat de lengte van de enkelvoudige Slinger, zoals KATER en SABINE die in Londen in het huis van BROWNE ter lengte van 39,13929 Engelse duim hebben gevonden, als eenheid is genomen.

pagina 66

$$
\begin{aligned}
0 =& 0,99891460 - x - 0,19998793 \cdot y + 0,18790446 \cdot z \qquad (58)\\
0 =& 0,19883059 - 0,19998793 \cdot x - 0,40606785 \cdot y - 0,19772944 \cdot z\\
0 =& -0,18829376 + 0,18790446 \cdot x - 0,19772944 \cdot y - 0,54080177 \cdot z
\end{aligned}
$$

en als die vergelijkingen zijn opgelost heeft men

$$
\begin{aligned}
x &= 0,999438299 \qquad (59)\\
y &= -0,00258898\\
z &= 0,00003156
\end{aligned}
$$

en vandaar wordt vergelijking (1)

$$
\begin{aligned}
l &= 0,999438299 - 0,00258898 \cos 2\lambda + 0,00003156 \cos 4\lambda \qquad (60)\\
l &= 0,99688088 \,\{1 + 0,00519416 \sin^2 \lambda - 0,00025328 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda\}
\end{aligned}
$$

waaruit volgt

$$g = 9,83881989 \,\{1 + 0,00519416 \sin^2 \lambda - 0,00025328 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda\} \qquad (61)$$

Door dan de coëfficiënten van $\sin^2 \lambda$ en $\sin^2 \lambda \cos^2 \lambda$ te vergelijken met die van formule (56) van de vorige §, komen te voorschijn

$$\frac{5\kappa}{2} - \epsilon + \epsilon^2 - \frac{17}{14}\kappa\epsilon + \frac{2}{7}A = 0,00519416 \qquad (62)$$

$$\frac{5}{2}\kappa\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + 3A = 0,00025328 \qquad (63)$$

Door aan te nemen dat de straal van evenaar = 6414873, 6, is $\kappa = 0,00346699$; en als men die waarde substitueert naar de vergelijkingen (4) en (5), komt vanuit de slingerwaarnemingen de meest waarschijnlijke ellipticiteit van de aarde uit op

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= 0,00349264 = \frac{1}{286,32}, \text{en}\\
A &= 0,00007637 = \frac{1}{13094,57}.
\end{aligned}
$$

———<>———

Stellingen

1.

Huygens is de ware uitvinder van de slingeruurwerken.

2.

Er kan geen verband gelegd worden tussen de wetten van de natuur en eigenschappen van getallen: daartoe meteen zijn toevlucht nemen bij het zoeken naar de wetten van de verschijnselen, moet als een volstrekt ijdele inspanning beschouwd worden.

3.

Voorteffelijke Klügel: Men moet bij mathematisch onderzoek niet altijd vragen waartoe het dienen kan; het is al genoeg als dit de geest een onderhoudende oefening van zijn krachten biedt, als het tot het ontvouwen van zeer verborgen verhoudingen op een onverwachte weg voert, als nieuwe vergelijkingsmiddelen gevonden worden om de moeilijkheden te boven te komen, die zich bij uitgebreider onderzoek voordoen.

4.

Ten onrechte eist Descartes in zijn brief aan Mersenne voor zich de wet van de vrij vallende lichamen op, volgens dewelke de afstanden zijn als de kwadraten van de tijden.

5.

Het zogenaamde Copernicaanse systeem zal men tevergeefs zoeken bij de ouden.

Pagina 68

6.

Albert Girard moet beschouwd worden als de ware uitvinder van de formule die men gewoonlijk toeschrijft aan Newton, waarin de som van de waarden van de wortels uit een vergelijking uitgedrukt wordt door middel van de combinaties van de wortels zelf.

7.

Terecht zegt Scipione Breislak: “De natuur is altijd hetzelfde, en de kracht die een appel die van de boom is losgeraakt laat vallen, of die de oneindig kleine deeltjes van een waterdruppel rond een punt rangschikt, is nog altijd dezelfde als die de hemellichamen in de onmetelijkheid van de ruimte in stand houdt en laat draaien.”[137]

8.

Uit de zekerheid in de beginselen van de huidige Astronomie valt a priori te concluderen dat iedere afzonderlijke ster van het zonnestelsel aan dezelfde wetten gehoorzaamt als de andere reeds bekende sterren.

9.

Men noemt abusievelijk Gabriel Mouton als de eerste die bedacht heeft om de lengte van de slinger toe te passen als maat/modulus van een universele maat/mensura.

10.

Wij beweren dat de opvatting van Leibnitz over de beginselen van de differentiaalrekening niet altijd één en dezelfde is geweest.

11.

De oorsprong van de schrikkelmethode die in een spanne van drieëndertig jaren acht schrikkeljaren voorschrijft, wordt zonder grond door de Perzen opgeëist.

12.

De vervolmaking van de optische instrumenten, waarvan de toekomstige vorderingen van de Astronomie zullen afhangen, is dringend gewenst.

[137] Noot van de vertaler: Het citaat is afkomstig uit Institutions Géologiques (boek 5, hoofdstuk 75, pag. 297-8), de door P.J.L. Campmas gemaakte franse vertaling van Introduzione alla geologia van Scipione Breislak, 1811

—

Petrus van Galen

Disputatio mathematica inauguralis de pendulo ejusque adplicatione ad telluris figuram determinandam

1830

—

7 Tabellen

—- Tabellen 1, 2 en 3 —-

Tab. 1.

Longitudo Penduli simplicis, singula minuta secunda oscillantis, ex observationibus anterioribus.

LOCUS OBSERVATIONIS.	LATITUDO.	Long. Pend. simpl. metris expressa.	OBSERVATORES.
Aequator	0° 0'	0m,99078	Bouguer.
Puntapalmar	0. 2.	0,99022	Condamine.
Riojama	0. 9.	0,98990	Bouguer.
		0,99015	Condamine.
Pichincha	0. 13.	0,98961	Bouguer.
Quito	0. 25.	0,98990	Bouguer.
		0,99069	Godin, D. Juan, Ulloa.
Quito, ad mare		0,99053	Bouguer.
Quito	0. 38.	0,98995	Condamine.
Para	1. 28.	0,99081	Condamine.
Cayenne	4. 56.	0,99110	Richer.
		0,98918	des Hayes.
Paraiba	6. 38.	0,98580	Couplet.
Zamboanga	6. 55.	0,99092	Malaspina.
Panama	8. 35.	0,99076	Godin, Bouguer, Condamine.
Portobelo	9. 33.	0,98713	Feuillé.
		0,99047	Godin.
		0,99049	Bouguer.
Pondichery	11. 56.	0,99108	le Gentil.
Lima	12. 5.	0,99101	Malaspina.
Granada	12. 6.	0,98916	des Hayes.
Umatag	13. 18.	0,99083	Malaspina.
Manille	14. 34.	0,99148	le Gentil.
Manila	14. 36.	0,99137	Malaspina.
Gorea	14. 40.	0,98929	des Hayes.
Martinique	14. 44.	0,98916	des Hayes.
Guadaloupe	16. 0.	0,98916	Warin, des Hayes.
St. Helena	16. 0.	0,99182	Halley.
Acapulco	16. 50.	0,99123	Malaspina.
St. Christophore	17. 19.	0,98975	des Hayes.
Foulpointe	17. 40.	0,99130	le Gentil.
Jamaica, Blak River	18. 0.	0,99153	Campbell.
St. Domingo, Petit-Goave	18. 27.	0,99130	Condamine.
		0,99083	Bouguer.
		0,99114	Godin.
Isla Babao	18. 39.	0,99139	Malaspina.
Guarico	19. 46.	0,99132	Don Juan.
St. Domingo, Promontorium	19. 48.	0,99031	des Hayes.
Ile de France	20. 10.	0,99207	la Caille.
Macao	23. 12.	0,99110	Malaspina.
Cairo	30. 2.	0,99313	Chazelles.
Puerto Jackson	33. 51.	0,99254	Malaspina.
Promontorium B. S.	33. 55.	0,99288	la Caille.
Monteviedo	34. 55.	0,99263	Malaspina.
Cadiz	36. 32.	0,99254	Malaspina.
Monterey	36. 36.	0,99229	Malaspina.
Concepcion	36. 42.	0,99259	Malaspina.
Lissabon	38° 42'	0,98805	Couplet.
Roma	41. 54.	0,99320	Jacquier, le Seur.
Port de Sete	43. 24.	0,99369	Picard.
Bayonne	43. 30.	0,99369	Picard.
Toulouse	43. 36.	0,99338	Darquier.
Firenze	43. 47.	0,99372	Ximenes.
Santa Elena	44. 30.	0,99374	Malaspina.
Lion	45. 46.	0,98873	Mouton.
		0,99369	Picard.
Wien	48. 12.	0,99383	Liesganig.
Paris	48. 50.	0,99369	Picard.
		0,99392	Huygens.
		0,99392	Richer.
		0,99381	Warin, des Hayes.
		0,99369	Chazelles.
		0,99363	Godin.
		0,99387	Bouguer.
		0,99275	Condamine.
		0,99385	Mairan.
		0,99384	Borda.
Paris	48. 51.	0,99435	la Caille.
Nutka	49. 35.	0,99365	Malaspina.
Gotha	50. 58.	0,99394	von Zach.
Selenginsk	51. 6.	0,99378	Rumousky.
Puerto Egmont	51. 21.	0,99394	Malaspina.
London	51. 31.	0,99369	Römer.
		0,99426	Graham.
		0,99362	Whitehurst.
's Gravenhage	52. 4.	0,99369	Picard, Bartholinus.
Leiden	52. 9.	0,99417	Lulofs.
Greifswald	54. 4.	0,99444	Mayer.
Uranienburg	55. 41.	0,99369	Picard.
Arensberg	58. 15.	0,99448	Grischow.
Pernau	58. 23.	0,99455	Grischow.
Dorpat	58. 23.	0,99457	Grischow.
Mulgrave	59. 23.	0,99509	Malaspina.
Reval	59. 26.	0,99460	Grischow.
Upsala	59. 52.	0,99462	Celsius.
Petersburg	59. 56.	0,99475	Mallet, Grischow.
		0,99381	Rumousky.
		0,99275	Henry.
Archangel	64. 34.	0,99403	de l'Isle de la Croyère.
		0,99509	Rumousky.
Pello	66. 48.	0,99520	Maupertuis, Camus.
Ponoi	67. 4.	0,99523	Mallet.
Kola	68. 52.	0,99554	Rumousky.
Spitsbergen	79. 50.	0,99568	Mulgrave.

Aequationes conditionis, quibus longitudines Penduli simplicis minuta singula secunda oscillantis ex observationibus recentiorum cum theoria comparantur (Series 1ma).

LOCUS OBSERVATIONIS.	LATITUDO.	Long. Pend. simpl. in vacuo, ad maris libellam, 62° F. — x — y Cos 2λ — z Cos 4λ = d_n	LOCI OBSERVATIONIS CHARACTER GEOLOGICUS.	OBSERVATORES.
Rawak	0° 1′ 34″,5	0,99681831 — x — 0,99999958 . y — 0,99999832 . z = d_{1}		Freycinet, Lamarche, Guerin.
St. Thomas	0 . 24 . 41,2	0,99697107 — x — 0,99989687 . y — 0,99958749 . z = d_{2}	Saxum basalticum	Sabine.
Galapagos	0 . 32 . 19,05	0,99687993 — x — 0,99982326 . y — 0,99929309 . z = d_{3}	Superficies tabularis lavae non valde compactae	Hall.
Maranham	2 . 31 . 43,3	0,99675135 — x — 0,99610690 . y — 0,98445792 . z = d_{4}	Terra allata	Sabine.
Ascension	7 . 55 . 47,8	0,99705692 — x — 0,96193286 . y — 0,85062967 . z = d_{5}	Rupes vulcanica compacta	Sabine.
—	7 . 55 . 48.	0,99705800 — x — 0,96193233 . y — 0,85062763 . z = d_{6}		Duperrey.
Sierra Leone	8 . 29 . 27,9	0,99695140 — x — 0,95639571 . y — 0,82938551 . z = d_{7}	Granitum facile solubile	Sabine.
Trinidad	10 . 38 . 55,9	0,99692253 — x — 0,93170567 . y — 0,73615090 . z = d_{8}	Terra alluta	Sabine.
Bahia	12 . 59 . 21.	0,99706754 — x — 0,89895975 . y — 0,61625728 . z = d_{9}	Regio profunda cujus basis constat ex psammolitho	Sabine.
Madras	13 . 4 . 9,1	0,99704517 — x — 0,89773261 . y — 0,61184766 . z = d_{10}	Argilla et limus coeruleus	Goldingham.
Guam (Agagna)	13 . 27 . 51,5	0,99731567 — x — 0,89157149 . y — 0,58979945 . z = d_{11}		Freycinet, Pellion.
Jamaica	17 . 56 . 7,6	0,99733797 — x — 0,81033946 . y — 0,31330009 . z = d_{12}	Saxa calcarea	Sabine.
Ile de France	20 . 9 . 23.	0,99763474 — x — 0,76252407 . y — 0,16288591 . z = d_{13}		Duperrey.
— (Port Louis)	20 . 9 . 56,4	0,99766271 — x — 0,76231451 . y — 0,16224681 . z = d_{14}		Freycinet, Duperrey, Fabré.
Mowi (Raheina)	20 . 52 . 7.	0,99765049 — x — 0,74620586 . y — 0,11364634 . z = d_{15}		Freycinet, Berard, Raillard.
San Blas	21 . 32 . 23,67	0,99740612 — x — 0,73040293 . y — 0,06697687 . z = d_{16}		Hall.
Rio Janeiro (anse de la Gloria)	22 . 55 . 0,7	0,99757317 — x — 0,69674303 . y + 0,02909829 . z = d_{17}		Freycinet, Labiche, Laborde
Rio Janeiro (Gloria Hill)	22 . 55 . 21,95	0,99755714 — x — 0,69659522 . y + 0,02951020 . z = d_{18}	Granitum.	Foster.
Rio Janeiro (faubourg du Catete)	22 . 55 . 25,1	0,99755111 — x — 0,69657330 . y + 0,02957126 . z = d_{19}		Freycinet, Duperrey.
Paramatta	33 . 48 . 43.	0,99840620 — x — 0,38068486 . y + 0,71015807 . z = d_{20}		Brisbane, Dunlop.
Port Jackson (Sydney)	33 . 51 . 34,1	0,99849237 — x — 0,37915022 . y + 0,71249021 . z = d_{21}		Freycinet, Fabré, Duperrey.
Port Jackson	33 . 51 . 40.	0,99845957 — x — 0,37909729 . y + 0,71257049 . z = d_{22}		Duperrey.
Promontorium B. S.	33 . 55 . 15.	0,99843623 — x — 0,37716737 . y + 0,71548954 . z = d_{23}		Freycinet, Ferrand, Dubaut.
Formentera	38 . 39 . 56,1	0,99882369 — x — 0,21931552 . y + 0,90380141 . z = d_{24}		Arago, Chaix, Biot.
New-York	40 . 42 . 43,1	0,99903907 — x — 0,14912116 . y + 0,95552576 . z = d_{25}	Stratum argillae cujus basis serpentinum	Renwick, Sabine.
Toulon	43 . 7 . 20.	0,99925130 — x — 0,06549988 . y + 0,99141953 . z = d_{26}		Duperrey.
Figeac	44 . 36 . 45.	0,99930581 — x — 0,01352589 . y + 0,99963410 . z = d_{27}		Mathieu, Biot.
Bordeaux	44 . 50 . 26.	0,99932702 — x — 0,00556563 . y + 0,99993805 . z = d_{28}		Mathieu, Biot.
Clermont	45 . 46 . 48.	0,99940801 — x + 0,02722377 . y + 0,99851775 . z = d_{29}		Mathieu, Biot.
Paris (Observ.)	48 . 50 . 13,16	0,99973556 — x + 0,13353609 . y + 0,96433625 . z = d_{30}		Bouvard, Mathieu, Biot.
Dunnose (Shanklin-Farm)	50 . 37 . 23,94	0,99991727 — x + 0,19503269 . y + 0,92392450 . z = d_{31}		Kater.
Duinkerken	51 . 2 . 10.	0,99995963 — x + 0,20914450 . y + 0,91251716 . z = d_{32}		Mathieu, Biot.
Greenwich	51 . 28 . 38,01	0,99997050 — x + 0,22417636 . y + 0,89948992 . z = d_{33}		Biot, Arago, von Humboldt.
London (Portland Place)	51 . 31 . 8,4	1,00000000 — x + 0,22559723 . y + 0,89821178 . z = d_{34}	Regio argilloso-calcarea	Kater, Sabine.
Malouines	51 . 31 . 44,5	1,00000373 — x + 0,22593823 . y + 0,89790383 . z = d_{35}		Duperrey.
— (Conti)	51 . 35 . 18,2	0,99994431 — x + 0,22795624 . y + 0,89607189 . z = d_{36}		Freycinet, Duperrey.
Arbury-Hill	52 . 12 . 55,32	1,00007462 — x + 0,24920940 . y + 0,87578935 . z = d_{37}	Saxa formationis primitivae	Kater.
Clifton	53 . 27 . 43,93	1,00016868 — x + 0,29110973 . y + 0,83051025 . z = d_{38}		Kater.
Königsberg	54 . 33 . 1,6	1,00032504 — x + 0,32723256 . y + 0,78583770 . z = d_{39}		Bessel, Erman, Anger.
Leith Fort	55 . 58 . 37.	1,00041110 — x + 0,37386028 . y + 0,72045698 . z = d_{40}		Biot.
—	55 . 58 . 40,8	1,00041498 — x + 0,37389446 . y + 0,72040587 . z = d_{41}		Kater.
Portsoy	57 . 40 . 58,65	1,00056991 — x + 0,42839769 . y + 0,63295083 . z = d_{42}	Schista serpentinea et granitum	Kater.
Unst	60 . 45 . 25.	1,00082986 — x + 0,52270523 . y + 0,45355847 . z = d_{43}		Biot.
—	60 . 45 . 28,2	1,00082237 — x + 0,52273169 . y + 0,45350317 . z = d_{44}	Colles ex serpentino compositi	Kater.
Drontheim	63 . 25 . 54,2	1,00090114 — x + 0,59990989 . y + 0,28021624 . z = d_{45}	Regio argillosa cujus basis micaschista	Sabine.
Hammerfest	70 . 40 . 5,3	1,00142823 — x + 0,78082613 . y — 0,21937890 . z = d_{46}	Micaschista	Sabine.
Port-Bowen	73 . 13 . 39,4	1,00161483 — x + 0,83345422 . y — 0,38929187 . z = d_{47}	Calx secundaria	Foster.
Groenland	74 . 32 . 18,6	1,00163672 — x + 0,85785869 . y — 0,47184306 . z = d_{48}	Psammolithos	Sabine.
Spitsbergen	79 . 49 . 57,8	1,00192645 — x + 0,93767952 . y — 0,75848578 . z = d_{49}	Quarzum	Sabine.

Conditio minimi respectu x .... 0 = 0,99891460 — x — 0,19998793 . y + 0,18790446 . z

Tab. 3.

Aequationum conditionis Series secunda.

0,99680179	—	0,99999958 . x	—	0,99999916 . y	—	0,99999790 . z
0,99686825	—	0,99989687 . x	—	0,99979374 . y	—	0,99948440 . z
0,99670374	—	0,99982326 . x	—	0,99964654 . y	—	0,99911647 . z
0,99287895	—	0,99610690 . x	—	0,99222896 . y	—	0,98062532 . z
0,95910182	—	0,96193286 . x	—	0,92531484 . y	—	0,81824864 . z
0,95910233	—	0,96193233 . x	—	0,92531382 . y	—	0,81824623 . z
0,95348004	—	0,95639571 . x	—	0,91469275 . y	—	0,79322074 . z
0,92883837	—	0,93170567 . x	—	0,86807545 . y	—	0,68587597 . z
0,89631749	—	0,89895975 . x	—	0,80812864 . y	—	0,55399492 . z
0,89507997	—	0,89773261 . x	—	0,80592384 . y	—	0,54927560 . z
0,88917821	—	0,89157149 . x	—	0,79489972 . y	—	0,52584837 . z
0,80818231	—	0,81033946 . x	—	0,65665005 . y	—	0,25387943 . z
0,76072502	—	0,76252407 . x	—	0,58144295 . y	—	0,12420442 . z
0,76053276	—	0,76231451 . x	—	0,58112341 . y	—	0,12368310 . z
0,74445264	—	0,74620586 . x	—	0,55682318 . y	—	0,08480358 . z
0,72850835	—	0,73040293 . x	—	0,53348844 . y	—	0,04892010 . z
0,69505215	—	0,69674303 . x	—	0,48545086 . y	+	0,02027403 . z
0,69489353	—	0,69659522 . x	—	0,48524490 . y	+	0,02055667 . z
0,69486747	—	0,69657330 . x	—	0,48521437 . y	+	0,02059855 . z
0,38007813	—	0,38068486 . x	—	0,14492097 . y	+	0,27034643 . z
0,37857861	—	0,37915022 . x	—	0,14375489 . y	+	0,27014082 . z
0,37851331	—	0,37909729 . x	—	0,14371475 . y	+	0,27013354 . z
0,37657757	—	0,37716737 . x	—	0,14225195 . y	+	0,26985310 . z
0,21905754	—	0,21931552 . x	—	0,04809930 . y	+	0,19821767 . z
0,14897787	—	0,14912116 . x	—	0,02223712 . y	+	0,14248911 . z
0,06545084	—	0,06549988 . x	—	0,00429023 . y	+	0,06493786 . z
0,01351650	—	0,01352589 . x	—	0,00018295 . y	+	0,01352094 . z
0,00556189	—	0,00556563 . x	—	0,00003098 . y	+	0,00556529 . z
— 0,02720766	+	0,02722377 . x	—	0,00074113 . y	—	0,02718342 . z
— 0,13350078	+	0,13353609 . x	—	0,01783189 . y	—	0,12877370 . z
— 0,19501656	+	0,19503269 . x	—	0,03803775 . y	—	0,18019548 . z
— 0,20913605	+	0,20914450 . x	—	0,04374142 . y	—	0,19084794 . z
— 0,22416975	+	0,22417636 . x	—	0,05025541 . y	—	0,20164438 . z
— 0,22559723	+	0,22559723 . x	—	0,05089411 . y	—	0,20263409 . z
— 0,22593907	+	0,22593823 . x	—	0,05104808 . y	—	0,20287080 . z
— 0,22794356	+	0,22795624 . x	—	0,05196405 . y	—	0,20426519 . z
— 0,24922799	+	0,24920940 . x	—	0,06210532 . y	—	0,21825494 . z
— 0,29115347	+	0,29110973 . x	—	0,08474487 . y	—	0,24176961 . z
— 0,32733989	+	0,32723256 . x	—	0,10708115 . y	—	0,25715168 . z
— 0,37401398	+	0,37386028 . x	—	0,13977151 . y	—	0,26935250 . z
— 0,37404962	+	0,37389446 . x	—	0,13979700 . y	—	0,26935576 . z
— 0,42864184	+	0,42839769 . x	—	0,18352458 . y	—	0,27115468 . z
— 0,52313901	+	0,52270523 . x	—	0,27322763 . y	—	0,23707739 . z
— 0,52316157	+	0,52273169 . x	—	0,27324842 . y	—	0,23706048 . z
— 0,60045050	+	0,59990989 . x	—	0,35989188 . y	—	0,16810450 . z
— 0,78194133	+	0,78082613 . x	—	0,60968945 . y	+	0,17129678 . z
— 0,83480010	+	0,83345422 . x	—	0,69464593 . y	+	0,32445695 . z
— 0,85926276	+	0,85785869 . x	—	0,73592153 . y	+	0,40477467 . z
— 0,93948592	+	0,93767952 . x	—	0,87924289 . y	+	0,71121659 . z

Conditio minimi respectu y

o = 0,19883059 — 0,19998793 . x — 0,40604785 . y — 0,19772944 . z

Aequationum conditionis Series tertia.

0,99680166	—	0,99999832 . x	—	0,99999790 . y	—	0,99999664 . z
0,99655981	—	0,99958749 . x	—	0,99948440 . y	—	0,99917514 . z
0,99617523	—	0,99929309 . x	—	0,99911647 . y	—	0,99858667 . z
0,98125975	—	0,98445792 . x	—	0,98062532 . y	—	0,96915739 . z
0,84812620	—	0,85062967 . x	—	0,81824864 . y	—	0,72357084 . z
0,84812509	—	0,85062763 . x	—	0,81824623 . y	—	0,72356737 . z
0,82685705	—	0,82938551 . x	—	0,79322074 . y	—	0,68788032 . z
0,73388542	—	0,73615090 . x	—	0,68587597 . y	—	0,54191815 . z
0,61444595	—	0,61625728 . x	—	0,55399492 . y	—	0,37977303 . z
0,61003977	—	0,61184766 . x	—	0,54927560 . y	—	0,37435756 . z
0,58821623	—	0,58979945 . x	—	0,52584837 . y	—	0,34786339 . z
0,31246608	—	0,31330009 . x	—	0,25387943 . y	—	0,09815695 . z
0,16250064	—	0,16288591 . x	—	0,12420442 . y	—	0,02653182 . z
0,16186759	—	0,16224681 . x	—	0,12368310 . y	—	0,02632428 . z
0,11337935	—	0,11364634 . x	—	0,08480358 . y	—	0,01291550 . z
0,06680314	—	0,06697687 . x	—	0,04892010 . y	—	0,00448590 . z
— 0,02902767	+	0,02909829 . x	+	0,02027403 . y	—	0,00084671 . z
— 0,02943811	+	0,02951020 . x	+	0,02055667 . y	—	0,00087085 . z
— 0,02949885	+	0,02957126 . x	+	0,02059855 . y	—	0,00087446 . z
— 0,70902622	+	0,71015807 . x	+	0,27034643 . y	—	0,50432448 . z
— 0,71141604	+	0,71249021 . x	+	0,27014082 . y	—	0,50764231 . z
— 0,71147283	+	0,71257049 . x	+	0,27013354 . y	—	0,50775671 . z
— 0,71437683	+	0,71548954 . x	+	0,26985310 . y	—	0,51192529 . z
— 0,90273825	+	0,90380141 . x	+	0,19821767 . y	—	0,81685698 . z
— 0,95460757	+	0,95552576 . x	+	0,14248911 . y	—	0,91302948 . z
— 0,99067725	+	0,99141953 . x	+	0,06493786 . y	—	0,98291268 . z
— 0,99894017	+	0,99963410 . x	+	0,01352094 . y	—	0,99926833 . z
— 0,99926511	+	0,99993805 . x	+	0,00556529 . y	—	0,99987610 . z
— 0,99792662	+	0,99851775 . x	—	0,02718342 . y	—	0,99703766 . z
— 0,96408124	+	0,96433625 . x	—	0,12877370 . y	—	0,92994440 . z
— 0,92384806	+	0,92392450 . x	—	0,18019548 . y	—	0,85363648 . z
— 0,91248323	+	0,91251716 . x	—	0,19084794 . y	—	0,83268757 . z
— 0,89946339	+	0,89948992 . x	—	0,20164438 . y	—	0,80908211 . z
— 0,89821178	+	0,89821178 . x	—	0,20263409 . y	—	0,80678440 . z
— 0,89790718	+	0,89790383 . x	—	0,20287080 . y	—	0,80623129 . z
— 0,89602199	+	0,89607189 . x	—	0,20426519 . y	—	0,80294483 . z
— 0,87585471	+	0,87578935 . x	—	0,21825494 . y	—	0,76700699 . z
— 0,83065034	+	0,83051025 . x	—	0,24176961 . y	—	0,68974728 . z
— 0,78609545	+	0,78583770 . x	—	0,25715168 . y	—	0,61754899 . z
— 0,72075315	+	0,72045698 . x	—	0,26935250 . y	—	0,51905826 . z
— 0,72070482	+	0,72040587 . x	—	0,26935576 . y	—	0,51898462 . z
— 0,63331155	+	0,63295083 . x	—	0,27115468 . y	—	0,40062676 . z
— 0,45393486	+	0,45355847 . x	—	0,23707739 . y	—	0,20571529 . z
— 0,45387612	+	0,45350317 . x	—	0,23706048 . y	—	0,20566512 . z
— 0,28046876	+	0,28021624 . x	—	0,16810450 . y	—	0,07852114 . z
0,21969223	—	0,21937890 . x	+	0,17129678 . y	—	0,04812710 . z
0,38992051	—	0,38929187 . x	+	0,32445695 . y	—	0,15154825 . z
0,47261533	—	0,47184306 . x	+	0,40477467 . y	—	0,22263587 . z
0,75994697	—	0,75848578 . x	+	0,71121659 . y	—	0,57530680 . z

Conditio minimi respectu z

o = — 0,18829376 + 0,18790446 . x — 0,19772944 . y — 0,54080177 . z

Colophon

Over het bepalen van de vorm van de aarde met behulp van slingers

Authors:
Marius Goossens (vertaling dissertatie in het Nederlands), Petrus van Galen (dissertatie in het Latijn),

Bart Root[1], Peter Laarakker[2], Marieke Klip[3], Leen Aardoom[4], Ramon Hanssen[5]

[1] Department of Space Engineering, Faculty of Aerospace Engineering, Delft University of Technology, The Netherlands | orcid: 0000-0001-7742-1434

[2] Stichting De Hollandse Cirkel, The Netherlands

[3] Rotterdam Mainport Institute, The Netherlands

[4] Stichting De Hollandse Cirkel, The Netherlands

[5] Department of Geoscience & Remote Sensing, Faculty of Civil Engineering and Geosciences, The Netherlands | orcid: 0000-0002-6067-7561

Keywords:
zwaartekracht, geodesie, slinger, geodesy, gravity, science history

Published by:
TU Delft OPEN Publishing | Delft University of Technology, The Netherlands

DOI: https://doi.org/10.59490/mg.124

ISBN: 978-94-6366-979-5

Electronic version of this book is available at:
https://books.open.tudelft.nl

Cover design made by Emilie Yane Lopes, Delft University of Technology

Conflict of Interest: no conflict of interest to disclose.