

# Fysische Transportverschijnnselen - Denken in Balansen

Harrie van den Akker & Robert F. Mudde

***Fysische  
Transportverschijnselen***

***denken in balansen***



---

***Fysische  
Transportverschijnselen***

***denken in balansen***

Harrie van den Akker  
Rob Mudde

---

© VSSD

Eerste druk 1996, 1998

Tweede druk 2003-2005

Derde druk 2008

Vierde druk 2014

© TU Delft Open Publishing

Vijfde druk 2023:



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Paperback/softback: 978-94-6366-680-0

E-boek PDF: 978-94-6366-683-1

DOI: <https://doi.org/10.5074/t.2023.002>

*Keywords:* natuurkunde, transportverschijnselen.  
NUR 924



## Voorwoord

In 1956 verscheen van de hand van prof.ir. H. Kramers het diktaat “Fysische Transportverschijnselen”: wereldwijd voor technologie-studenten het eerste leer“boek” op dit gebied. Het presenteerde een systematische behandeling van het transport van impuls, energie en materie op basis van balans (behoudswetten) en wetten voor moleculair transport. In 1961 verscheen dit diktaat in boekvorm bij de Delftsche Uitgevers Maatschappij. Dit boek begon met een kort hoofdstuk (8 pagina’s) over de fundamentele wetten als uitgangspunt voor het opstellen van de transportvergelijkingen; in de drie volgende hoofdstukken werden achtereenvolgens elementen van de technische stromingsleer (ruim 70 pagina’s), warmtegeleiding en warmteoverdracht (bijna 80 pagina’s) en diffusie en stofoverdracht (ruim 20 pagina’s) behandeld, waarna het boek afsloot met een kort hoofdstukje van 11 pagina’s over mengen en roeren.

Ondertussen was Prof. R.B. Bird in 1958 (van januari tot september) de gast van Prof. Kramers in Delft in wat thans het “Kramers Laboratorium voor Fysische Technologie” heet. Veel is toen gediscussieerd over Fysische Transportverschijnselen en over de manier waarop dit nieuwe vak het best gedoceerd kon worden. In de herfst van 1958 zagen “Notes on Transport Phenomena” het licht, gevolgd in 1960 door “Transport Phenomena”. Dit laatste boek, 780 pagina’s dik en met als auteurs Bird, Stewart en Lightfoot, is uitgegroeid tot de bijbel van het vakgebied.

In de loop der jaren zijn in het Delftse steeds nieuwe versies van Kramers’ oorspronkelijke boek verschenen. Zo kwam prof.dr.ir. W.J. Beek in 1968 met een versie zonder het hoofdstuk mengen en roeren, maar met een stuk over verblijftijdspreading; ook werd de indeling wat aangepast. In 1973 en 1981 liet prof. J.M. Smith M.Sc. opnieuw lichtelijk aangepaste versies verschijnen. Steeds bleef de opbouw van het boek hetzelfde, met name de insteek via de behoudswetten en de wetten voor moleculair transport alsmede de volgorde van behandeling van impuls-, warmte- en stoftransport.

In Eindhoven ontwikkelde prof.dr. K. Rietema een eigen benadering van het vak die hij zelf als inductief omschreef: van eenvoudige waarneming komend tot generalisatie. Zijn boek “Fysische transport- en overdrachtsverschijnselen” bestond uit een deel A over moleculair transport van warmte, materie en impuls (in die volgorde) en een deel B over stromingsleer, grenslaagtheorie en turbulentie, convectief warmte- en stoftransport, en chemische reactoren. Rietema vond deze aanpak didactisch meer verantwoord en meer gericht op het stimuleren van fysisch inzicht en intuïtie.

Anno 1996 denken de auteurs van dit boek dat de tijd rijp is voor een iets andere benadering van het vakgebied “Fysische Transportverschijnselen”. Enerzijds is er de laatste tien jaar zeer veel veranderd in het Nederlandse universitaire onderwijswereld, anderzijds is het vakgebied zelf aan grote veranderingen onderhevig.

Wat de onderwijskundige veranderingen betreft: had vroeger het vak een plaats in het derde jaar van de opleidingen tot natuurkundig en scheikundig ingenieur, thans wordt het vak eerder in deze opleidingen gegeven. Ook studenten van andere technische opleidingen (zoals materiaalkunde, mijnbouw en technische bestuurskunde) krijgen nu het vak. Daarnaast studeren studenten tegenwoordig anders, waar zij in toenemende mate te maken hebben met maatregelen die de studieduur beperken en het studietempo verhogen. Alles bij elkaar voldoende reden voor een bezinning op inhoud en didactiek van het vak.

Verder is het vakgebied zelf aan het veranderen: in 1981 schreef Rietema al dat de fysische technologie aan vernieuwing toe was en hield hij een pleidooi voor een grotere rol van de stromingsleer in het vakgebied. Met de opkomst van Computational Fluid Dynamics (CFD)-technieken is het dan intussen inderdaad mogelijk geworden transport en overdracht van warmte en materie te beschouwen op basis van informatie over lokale stromingsverschijnselen (snelheidsvelden). Bird (pagina 71 van “Transport

Phenomena”) schrijft: “Het is gemakkelijker, sneller en veiliger uit te gaan van de behoudswetten van massa en impuls in algemene vorm en deze te vereenvoudigen tot zij het specifieke probleem in kwestie beschrijven.” In onze visie vormen de tijdafhankelijke driedimensionale transportvergelijkingen met name de basis van de moderne CFD-benadering. De traditionele aanpak met dimensie-analyse en fenomenologische overdrachtscoëfficiënten en met film- en grenslaagtheorieën en empirische drukvergelijkingen gaat daaraan vooraf, als een voorbereiding op de veel exactere numerieke aanpak.

In onze visie dienen studenten bij hun eerste kennismaking met het vakgebied eerst vertrouwd te geraken met de techniek van balansen opstellen en met een aantal begrippen, concepten en wetmatigheden. Zelf balansen opstellen voor specifieke problemen van betrekkelijk eenvoudige geometrie is de meest leerzame weg naar fysisch inzicht. In die eenvoudiger balansen mogen nog overdrachtscoëfficiënten voorkomen: dat levert doorgaans analytisch op te lossen vergelijkingen op. De rigoureuze CFD-aanpak bouwt als het ware op de eigenhandig geleerde expertise voort en is, indien de eindige-volumemethode wordt gebruikt voor het numeriek oplossen van de transportvergelijkingen, zelfs synoniem met het opstellen en oplossen van (micro)balansen. Bij simulaties van turbulente stromingen met behulp van turbulentiemodellen dienen vaak nog meer transportvergelijkingen (of balansen) te worden opgelost, zoals één voor de concentratie van turbulente kinetische energie alsmede één voor de dissipatie daarvan.

De behandeling van impulstransport volgt in dit boek pas na warmte- en stoftransport, enerzijds omdat impuls en schuifspanning moeilijker te hanteren begrippen zijn vanwege hun vectorkarakter (hierin volgen wij Rietema), anderzijds omdat zo een vloeiender overgang wordt verkregen naar de Navier-Stokes-vergelijkingen en CFD (zie ook paragraaf 5.8.3). Juist vanwege de fenomenologische aanpak van convectief warmte- en stoftransport is het ook geen gemis als laminaire stroming pas later behandeld wordt; hetzelfde heeft al die jaren ook voor turbulente stroming gegolden. Wel zijn allerlei concepten en termen tevoren behandeld in de hoofdstukken 1 en 2. Veel studenten zullen ook juist die concepten en termen en de grovere overdrachtsmodellen nodig hebben en de meer gedetailleerde theorieën en vergelijkingen kunnen ontberen.

Streng gehandhaafd is het idee van de analogie van warmte-, stof- en impulstransport. Dit is onder andere tot uiting gebracht in de identieke opbouw van de hoofdstukken 3 en 4. In de tekst is deze analogie ook steeds weer benadrukt, onder meer door consequent het begrip concentratie te hanteren (dus impulsconcentratie in plaats van snelheid) en door zo veel mogelijk de fysische mechanismen van het transport (weerstand, overdracht, filmmodel) in beelden te beschrijven. In hoofdstuk 5.8 komt de analogie ook bij de CFD-aanpak weer sterk naar voren.

Wij hopen dat onze aanpak van Fysische Transportverschijnselen aan zal slaan bij collega’s en vooral studenten. Graag houden wij ons voor op- en aanmerkingen aanbevolen.

Aan het eind van dit voorwoord passen woorden van oprechte dank aan het adres van stafleden en promovendi van het Kramers Laboratorium voor Fysische Technologie die aan de totstandkoming van dit boek in enigerlei vorm hebben bijgedragen. Daarnaast danken wij ir. A.G.N. Boers voor diens assistentie bij de voorbeelden in de eerste versie van de tekst en Karin Westra voor haar bijdragen aan de tekstverwerking.

Delft, februari 1996

Harrie van den Akker  
Rob. Mudde

### ***Voorwoord bij de vierde druk***

In een tweede druk in 2003 – 2005 en een derde druk in 2008 werden een aantal wijzigingen aangebracht in de behandeling van een aantal onderwerpen – mede naar aanleiding van ervaringen en suggesties van gebruikers en collega’s. De laatste jaren

stromen echter steeds meer buitenlandse studenten met sterk wisselende voorop-leidingen een aantal Master-opleidingen van de TU Delft in. Deze ontwikkeling heeft ons er toe gebracht een Engelstalige editie van dit studieboek uit te brengen – naast de vertrouwde Nederlandse editie.. Dat was dan wel een mooie aanleiding om het gehele boek nog eens grondig op de schop te nemen – waarbij overigens opzet en didactiek gehandhaafd zijn gebleven. Zo blijven wij geloven dat het zelf (kunnen) afleiden van balansen en differentiaalvergelijkingen een goede leerschool is die bovendien goed voorbereidt op moderne simulatietechnieken (Computational Fluid Dynamics). Het boek heeft dan ook als ondertitel ‘denken in balansen’ meegekregen. Ook de nadruk op het aanleren van oplostechieken voor steeds weer nieuwe problemen is gehandhaafd. Wij willen op deze plaats onze waardering uitspreken voor alle suggesties die ons door de jaren heen zijn aangereikt. Wij willen hier speciaal A.G.N. Boers, C. Ouwerkerk, G.C.J. Bart, C.R. Kleijn, J.J.Ph. Elich, L.M. Portela, J. A. Battjes, R.B. Bird, en J.E. Schievink noemen. Zij hebben zeker bijgedragen aan de verbeterde versie die u nu in handen hebt. Voor verdere suggesties en commentaren blijven wij openstaan.

Delft, augustus 2014

Harrie van den Akker  
Rob Mudde

### ***Voorwoord bij de vijfde druk***

Er blijft belangstelling bestaan voor de Nederlandse versie van ons boek, naast de Engelstalige versie die o.a. op enkele Amerikaanse universiteiten gebruikt wordt. Ons boek is dan ook een stuk compacter dan met name het standaardwerk Transport Phenomena van Bird, Stewart & Lightfoot. Daarvan verschilt het ook, want om didactische redenen kiezen wij voor een andere volgorde van massa-, warmte- en impulsbalansen in hoofdstuk 1 en voor weer een andere volgorde in de hoofdstukken 3, 4 en 5, zoals ook wat uitgebreider besproken in een recent (2022) artikel in Physics of Fluids (Vol. 34, art. # 037106; doi.org.10.1063/5.0084383).

Bovendien onderscheidt ons boek zich door het consistente gebruik van balansen zowel bij de afleiding van differentiaalvergelijkingen als bij het oplossen van stromings-, transport- en overdrachtsproblemen. Onze afleiding van de Navier-Stokesvergelijking aan het eind van het boek volgt hetzelfde stamien en is daarmee een puike voorbereiding op de techniek van Computational Fluid Dynamics (CFD).

Al met al was er daarmee voldoende aanleiding voor een vijfde druk waarin toch weer foutjes en onnauwkeurigheden gecorrigeerd zijn die tijdens het gebruik aan het licht kwamen. Met name in de tweede helft van het boek is op een aantal plaatsen de uitleg herzien en daarmee hopelijk ook verduidelijkt, en zijn correcties in vergelijkingen aangebracht.

Ook na deze vijfde druk houden wij ons voor verdere op- en aanmerkingen aanbevolen.

Delft, 28-2-2023

H.E.A. van den Akker  
R.F. Mudde





## INHOUD

<b>Voorwoord</b>	<b>v</b>
<b>Inhoud</b>	<b>viii</b>
<b>1 Balansen</b>	<b>1</b>
1.1 De balans: recept en vorm	1
1.2 De massabalans	6
1.2.1 De totale-massabalans en de componentbalans	6
1.2.2 Chemische reactoren	12
1.2.3 Verblijftijdspreiding	18
1.2.4 Meer tanks in serie	28
1.3 De energiebalans	32
1.3.1 Inleiding	32
1.3.2 De totale-energiebalans	36
1.3.3 De thermische-energiebalans	48
1.3.4 De mechanische-energiebalans en de Bernoulli-vergelijking	50
1.4 De impulsbalans	56
1.5 Voorbeelden van gecombineerd gebruik van massa-, energie- en impulsbalansen	63
Appendix 1A	69
Appendix 1B	71
<b>2 Mechanismen, kentallen, krachten</b>	<b>75</b>
2.1 Moleculair transport	75
2.1.1 Bewegende moleculen	75
2.1.2 Fick, Fourier, Newton	79
2.1.3 Transportcoëfficiënten	86
2.1.4 Schuifspanning: een alternatieve beschrijving van moleculair impulstransport	89
2.2 Dimensie-analyse	92
2.2.1 Dimensieloze kentallen	92
2.2.2 Het Reynolds-getal en de overgang van laminaire naar turbulente stroming	96

2.2.3	Dimensie-analyse: het concept	99
2.2.4	Dimensie-analyse: techniek en Buckingham- $\pi$ theorema	102
2.2.5	Voorbeelden van dimensie-analyse	104
2.3	Krachten op omstroomde lichamen	112
2.3.1	Omstroming en stromingsweerstand	112
2.3.2	Meesleepkracht en weerstandscoefficiënt	116
2.3.3	Krachtenbalans en eenparige snelheid	120
<b>3</b>	<b>Warmtetransport</b>	<b>125</b>
3.1	Stationaire warmtegeleiding	125
3.1.1	Warmtegeleiding in cartesische coördinaten	125
3.1.2	Analogie met de Wet van Ohm	129
3.1.3	Warmtegeleiding in cilindrische coördinaten	131
3.1.4	Warmtegeleiding in bolcoördinaten	134
3.1.5	Een numerieke behandeling voor 2-D cartesisch	136
3.2	Warmteoverdrachtscoefficient en Nusselt getal	141
3.2.1	Newton's afkoelingswet	141
3.2.2	Het Nusselt getal	142
3.2.3	Overall warmteoverdrachtscoefficient	143
3.3	Instationaire warmtegeleiding	146
3.3.1	Penetratietheorie: conceptueel	146
3.3.2	Temperatuurprofiel en penetratiediepte	148
3.3.3	Penetratietheorie: toepassing	150
3.3.4	Warmteoverdrachtscoefficient voor korte tijden	154
3.3.5	Doorverwarming	156
3.3.6	Het totale opwarmproces van een voorwerp	160
3.3.7	Intern en extern warmtetransport	166
3.3.8	Numerieke aanpak	168
3.4	De algemene microbalans voor warmtetransport	171
3.5	Warmteoverdrachtscoefficienten bij convectie	175
3.5.1	Algemene beschouwingen	175
3.5.2	Warmteoverdracht bij gedwongen convectie	179
3.5.3	Warmteoverdracht bij vrije convectie	187

3.5.4	De numeriek aanpak van convectief warmtetransport	192
3.6	Warmtewisselaars	194
3.6.1	Inleiding	194
3.6.2	Warmteoverdracht zonder fase-overgang	196
3.6.3	Warmteoverdracht met fase-overgang	200
3.7	Warmtetransport door straling	203
3.7.1	Emissie	204
3.7.2	Reflectie, transmissie, absorptie	206
3.7.3	Warmteoverdracht door straling	209
3.7.4	Warmteoverdrachtscoëfficiënt bij straling	212
<b>4</b>	<b>Massatransport</b>	<b>215</b>
4.1	Analogie tussen massatransport en warmtetransport	215
4.2	Wederzijdse diffusie naar analogie van warmtetransport	218
4.2.1	Stationaire diffusie in cartesische coördinaten	218
4.2.2	Stationaire diffusie in cilindrische coördinaten	219
4.2.3	Stationaire diffusie in bolcoördinaten	221
4.2.4	Stofoverdrachtscoëfficiënt en Sherwood getal	224
4.2.5	Instationaire diffusie: penetratietheorie	226
4.2.6	Instationaire lange-termijn diffusie	229
4.3	Diffusie en driftflux	231
4.4	De algemene microbalans voor stoftransport	237
4.5	Stofoverdrachtscoëfficiënten bij convectie	239
4.5.1	Algemene beschouwingen	239
4.5.2	Stofoverdracht bij gedwongen convectie	240
4.5.3	Stofoverdracht bij vrije convectie	245
4.6	Stofoverdracht over een fasegrensvlak	246
4.6.1	Inleiding over hoe om te gaan met twee fasen	246
4.6.2	De verdelingscoëfficiënt	249
4.6.3	Stofoverdracht over een fasegrensvlak	251
4.6.4	Penetratietheorie bij een fasegrensvlak	254
4.7	Gelijktijdig transport van warmte en massa: de natte-boltemperatuur	257
<b>5</b>	<b>Stromingsleer</b>	<b>261</b>
5.1	Inleiding	261

5.2	Stroommeters	264
5.2.1	Overloop	264
5.2.2	Meetschijf	268
5.2.3	Rotameter	269
5.3	Drukval over een rechte leiding	271
5.3.1	Het concept van de frictiefactor	271
5.3.2	Het gebruik van de frictiefactor	275
5.3.3	De analogie met warmte- en stofoverdracht	281
5.4	Drukval in pijpleidingsystemen	282
5.5	Drukval over een gepakt bed	288
5.6	Laminaire stroming van Newtonse vloeistoffen	292
5.6.1	Laminaire stroming in cartesische coördinaten – onder invloed van een bewegende wand	293
5.6.2	Laminaire stroming in cartesische coördinaten – onder invloed van een drukgradiënt	296
5.6.3	Laminaire stroming in cartesische coördinaten – onder invloed van de zwaartekracht	301
5.6.4	Laminaire stroming in cilindercoördinaten – onder invloed van een drukgradiënt	305
5.7	Laminaire stroming van niet-Newtonse vloeistoffen	308
5.7.1	Power law vloeistoffen	309
5.7.2	Bingham-vloeistoffen	312
5.7.3	Casson-vloeistoffen	315
5.7.4	Visco-elastische vloeistoffen	315
5.8	De algemene bewegingsvergelijkingen	317
5.8.1	Stromingsleer en fysische transportverschijnselen	317
5.8.2	De continuïteitsvergelijking	319
5.8.3	De Navier-Stokes-vergelijkingen	320
5.8.4	Computational Fluid Dynamics	328
	<b>Uitgewerkte tentamenopgaven</b>	<b>333</b>
	Adviezen	333
6.1	Opgaven	333
6.2	Oplossingen	342
	<b>Symbolenlijst</b>	<b>362</b>



# Balansen

## 1.1 De balans: recept en vorm

---

Het vak Fysische Transportverschijnselen houdt zich bezig met het transport van de drie belangrijkste grootheden massa, energie en impuls in een willekeurig (fysisch of chemisch) proces. Vooral de toevoeging ‘in een willekeurig proces’ geeft een van de belangrijkste kenmerken van het vakgebied aan: Fysische Transportverschijnselen is bovenal een ingenieursvak met een breed scala van toepassingen.

Toch is het vak ook fundamenteel, aangezien het de basis legt voor veel andere procestechnologische disciplines, zoals reactorkunde, scheidingstechnologie en stromingsleer. Fysische Transportverschijnselen is dan ook een ‘must’ voor iedere procestechnoloog. Maar ook natuurkundigen, chemici, bouwkundigen, materiaal-kundigen en werktuigbouwkundigen hebben belang bij een goede beheersing van het vak Fysische Transportverschijnselen.

Het terrein dat het vak Fysische Transportverschijnselen en de discipline fysische technologie bestrijken is enorm uitgebreid. Aan de ene kant zijn er allerlei processen in de (petro-)chemische industrie, is er de stroming van één of meerdere fasen door een transportleiding, het gedrag van belletjes in een bioreactor of het vullen van een gietmal met vloeibaar metaal. Aan de andere kant is het vakgebied veel dichterbij huis ook van belang, bijvoorbeeld bij de warmteafgifte van een radiator en de daarmee gepaard gaande luchtstromingen in de kamer, en zuurstoftransport door bloed. Gelukkig zijn zulke zeer verschillende processen goed te begrijpen en te beschrijven met een beperkt aantal regels.

Verschijnselen van stroming en warmte- en stofoverdracht worden in dit vakgebied beschreven in termen van continuümgrootheden, met slechts hier en daar een verwijzing naar moleculaire processen. Op deze manier wordt de basis gelegd voor de *fysische technologie*: de expertise van het ontwerpen en verbeteren van processen waarin of waarmee stoffen worden getransporteerd, omgezet, bewerkt of vormgegeven. Daarbij is het van belang de essentie van een proces te doorgronden, dat wil zeggen de essentiële stappen bij het transport van massa, warmte en/of impuls te identificeren. Het transport van die drie grootheden kan overigens op precies dezelfde manier beschreven worden. Fysische Transportverschijnselen legt de basis voor de fysische technologie en reikt de gereedschappen aan. Dit boek handelt over die gereedschappen.

Fysische Transportverschijnselen is allereerst een vak van *balansen* en *concepten* waarmee fysische processen en verschijnselen beschreven kunnen worden. Vaak gaat het in het vak om afwijkingen van evenwichtstoestanden en de dan optredende *weerstand* voor warmte- en stoftransport. Het gaat dan ook vaak om het kwantitatief beschrijven van oorzaak en gevolg. Met behulp van deze nu nog wat duistere begrippen is het mogelijk om de bovengenoemde en nog talloze andere processen, globaal maar ook zeer gedetailleerd te begrijpen en te beschrijven. In dit hoofdstuk zal het begrip *balans* uitgebreid aan de orde komen.

Voor de beschrijving van het transport van een willekeurige grootte, bijvoorbeeld de overdracht van zuurstof uit luchtbelletjes naar de vloeistoffase in een fermentor of het transport van warmte door een fornuiswand, is de balans een onmisbaar stuk gereedschap. Het basisprincipe van de balans is het boekhouden van een gekozen (fysische) grootte. Dit concept is van bijzonder belang bij het werken met zogenaamde behouden grootheden; dit zijn grootheden (zoals massa en energie) die gedurende een proces niet verloren gaan, maar behouden blijven.

Het vak fysische transportverschijnselen houdt zich bezig met stationaire (*Eng.* 'steady-state') en instationaire (*Eng.* 'transient') processen waarin massa, energie en impuls (*Eng.* 'momentum') worden uitgewisseld tussen domeinen als gevolg van drijvende krachten (verschillen in massa-, energie- en impulsconcentraties, en/of een drukverschil). Fysische transportverschijnselen gaat dan ook bovenal over het 'boekhouden' van de drie fysische grootheden: massa, energie en impuls.

Dit boekhouden kan een groot controlevolume betreffen: het gaat dan om *macrobalansen*; balansen kunnen echter ook over heel kleine controlevolumes opgesteld worden: dan wordt gesproken van *microbalansen*, die informatie op lokale schaal opleveren. In bijna alle gevallen start het oplossen van problemen met betrekking tot transport- of overdrachtssnelheden, of aangaande veranderingen in concentraties of temperaturen met het opstellen van een of meer balansen.

De volgende stap is dan uit die balansen geëigende vergelijkingen af te leiden, veelal differentiaalvergelijkingen; die laatste vergen begin- en/of randvoorwaarden. In de laatste stap worden dan de (differentiaal)vergelijkingen opgelost om het antwoord op de gestelde vraag te vinden. In deze aanpak dienen alle grootheden weergegeven te worden met symbolen.

Het *algemene recept* voor het opstellen van een balans en het oplossen van het probleem luidt daarmee als volgt:

- 1) Maak een schets van de situatie. Noteer alle grootheden met symbolen, vermijd het gebruik van getalswaarden.
- 2) Kies de grootte  $G$  die getransporteerd of overgedragen wordt in het te beschouwen proces.

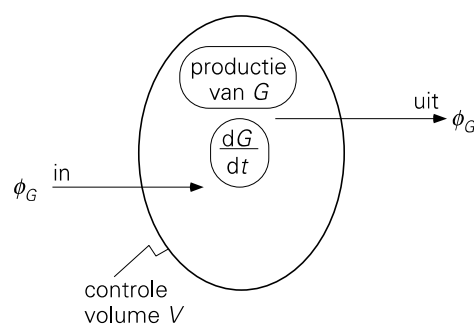
- 3) Kies het “controlevolume”  $V$  waarover informatie verkregen moet worden.
- 4) Ga na of en, zo ja, waardoor de hoeveelheid van  $G$  in het controlevolume  $V$  gedurende een kort tijdsinterval  $\Delta t$  verandert. Stel de balans op (in symbolen).
- 5) Los de (differentiaal)vergelijking op die uit de balans volgt.

De hoeveelheid van  $G$  in  $V$  kan op allerlei manieren veranderen. Deze dienen systematisch te worden nagegaan en, indien van toepassing, meegenomen in de balans. Zo kan er, gedurende  $\Delta t$ , stroming van  $G$  van buiten  $V$  naar binnen plaatsvinden. Hierdoor neemt de hoeveelheid  $G$  in  $V$  toe. Er kan ook stroming van  $G$  van binnen  $V$  naar buiten plaatsvinden. Uiteraard neemt hierdoor de totale hoeveelheid van  $G$  in  $V$  af. We spreken van “*stroom in*” respectievelijk “*stroom uit*”. Uiteraard kan er gedurende het interval  $\Delta t$  ook *productie* van  $G$  binnen  $V$  plaatsvinden: hierdoor neemt de totale hoeveelheid  $G$  in  $V$  toe. Negatieve productie (= vernietiging, consumptie, annihilatie) is ook mogelijk, bijvoorbeeld als  $G$  staat voor de massa van een reactant die in een chemisch proces wordt omgezet.

Bedenk dat  $G$  niet noodzakelijkerwijs de grootheid is waarin je geïnteresseerd bent. Om bijvoorbeeld de temperatuur  $T$  te berekenen moet een thermische-energiebalans opgesteld worden en zal voor  $G$  de thermische energie  $U$  gekozen worden.

De algemene opzet voor een balans is nu als volgt (zie ook figuur 1.1):

$$\begin{aligned}
 & \text{de verandering van } G \text{ in } V \text{ gedurende } \Delta t = \\
 & = G \text{ (op tijdstip } t + \Delta t) \text{ in } V - G \text{ (op tijdstip } t) \text{ in } V \\
 & = \text{hoeveelheid van } G \text{ die van buiten } V \text{ naar binnen stroomt gedurende } \Delta t + \\
 & \quad - \text{hoeveelheid van } G \text{ die van binnen } V \text{ naar buiten stroomt gedurende } \Delta t + \\
 & \quad + \text{netto hoeveelheid van } G \text{ die in } V \text{ wordt geproduceerd gedurende } \Delta t
 \end{aligned}$$



Figuur 1.1.

Vanaf nu wordt het symbool  $\phi$  gebruikt om een stroom, of transport, van een grootheid  $G$  aan te geven, met de dimensie ‘hoeveelheid van  $G$  per tijdseenheid’. In plaats van een ‘stroom’ spreekt men liever van een *debiet*. De letter  $P$  staat voor de nettoproductie per tijdseenheid. Met behulp van deze notatie kan, indien  $\Delta t$  erg klein is, de hoeveelheid van  $G$  die “in” stroomt (= van buiten naar binnen) *gedurende* het interval



$\Delta t$  geschreven worden als het product van het debiet “in” op tijdstip  $t$  en het tijdsinterval  $\Delta t$ :

$$\phi_{G,\text{in}}(t) \cdot \Delta t$$

Op dezelfde manier geldt voor de stroom van  $G$  van binnen naar buiten en voor de netto productie gedurende  $\Delta t$ :

$$\phi_{G,\text{out}}(t) \cdot \Delta t \quad \text{en} \quad P_G(t) \cdot \Delta t$$

De balans wordt daarmee

$$G^{\text{in}V}(t + \Delta t) - G^{\text{in}V}(t) = \phi_{G,\text{in}} \cdot \Delta t - \phi_{G,\text{out}} \cdot \Delta t + P_G \cdot \Delta t \quad (1.1)$$

Beide zijden van vergelijking (1.1) delen door  $\Delta t$  en de limiet  $\Delta t \rightarrow 0$  nemen levert

$$\frac{d}{dt} G^{\text{in}V} = \phi_{G,\text{in}} - \phi_{G,\text{out}} + P_G \quad (1.2)$$

Vergelijking (1.2) is de basisvorm van de balans en heet dan ook de *balansvergelijking*. Het linkerlid staat dus voor de incrementele verandering van de totale hoeveelheid  $G$  in  $V$ , terwijl in het rechterlid de drie manieren staan waardoor de totale hoeveelheid  $G$  in  $V$  kan veranderen. Het linkerlid wordt ook wel aangeduid met “instationaire term”. Alle termen in vergelijking (1.2) hebben dezelfde dimensie – *moeten* dezelfde dimensie hebben: hoeveelheid van  $G$  per tijdseenheid.

Als voor een bepaalde grootte  $G$  de nettoproductie *altijd* gelijk aan nul is, bijvoorbeeld bij massa, dan vereenvoudigt vergelijking (1.2) zich tot

$$\frac{d}{dt} G^{\text{in}V} = \phi_{G,\text{in}} - \phi_{G,\text{out}} \quad (1.3)$$

Vergelijking (1.3) heet een *behoudswet*. Sommige grootheden zijn inderdaad behouden, d.w.z. worden alleen getransporteerd en/of geherdistribueerd.

Het is zeer belangrijk om in te zien dat de stromen “in” en “uit” daadwerkelijk *door* het randoppervlak van het controle volume  $V$  heen moeten gaan.

### **Voorbeeld 1.1.** *Inwonertal*

Het inwonertal van Nederland is op 31 december van een bepaald jaar bekend. Beschrijf een methode om op basis van dit cijfer het aantal inwoners van Nederland vast te stellen op 31 december van het jaar daarop zonder dan opnieuw alle inwoners te tellen.

Dé manier om het inwonertal bij te houden is gebruik te maken van de balansmethode. Gebruik daartoe het algemene recept: met het aantal inwoners als de

grootheid waarvoor de balans opgesteld moet worden, moet eerst het controle-volume gekozen worden. In dit geval is dat Nederland (zie figuur 1.2).



Figuur 1.2.

Voor de stromen in en uit moeten alle grenzen van het controlevolume beschouwd worden. Dat betekent dat niet alleen de externe grenzen met België, Duitsland en de Noordzee, maar dat ook singuliere transit punten als havens en luchthavens bij het opstellen van de balans betrokken moeten worden. De grenzen moeten hier werkelijk in de klassieke zin van ‘het passeren van de douane’ opgevat worden (het vervallen van de controle aan de binnengrenzen van de Europese Unie is hier niet aan de orde). Ten slotte moet ook de ‘productie’ niet vergeten worden: alle geboorten en alle sterfgevallen moeten opgeteld worden tot de netto productieterm in de balansvergelijking (1.2).

Bedenk dat een dergelijke balansmethode ook werkt als het gaat om het aantal inwoners van Nederland met leeftijd tussen 20 en 30 jaar. Wel dient daarbij dan extra zorg te worden besteed aan alle termen in het rechterlid van vergelijking (1.2) : bij de stromen in en uit zou dan gewerkt kunnen worden met de fractie 20- tot 30-jarigen in die stromen, en voor de nettoproductieterm moeten zowel de mensen verantwoord worden die 20 en 30 worden (zij tellen resp. positief en negatief) in het betrokken tijdvak  $\Delta t$  als de mensen die in deze leeftijdscategorie komen te overlijden.

5

### **Samenvatting**

De balans is een onmisbaar instrument bij het beschrijven van en rekenen aan transportverschijnselen. Bij het opstellen van een balans zijn *vijf basisregels* van belang die samen wel beschouwd kunnen worden als het recept voor het oplossen van transportvraagstukken:

- 1) maak een schets van de situatie die alle in- en uitstromen en productie bevat, alles in termen van symbolen;

- 2) kies de grootheid waarvoor een balans moet worden opgesteld;
- 3) kies het volume waarover de balans wordt opgesteld;
- 4) stel de balans op die er altijd uitziet als:

$$\frac{d}{dt} = \text{in} - \text{uit} + \text{productie}$$

- 5) los de resulterende (differentiaal)vergelijking op.

## 1.2 De massabalans

### 1.2.1 De totale-massabalans en de componentbalans

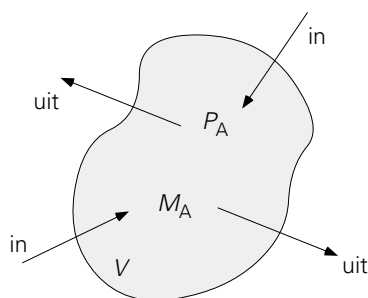
Als eerste zal nu de balans voor de totale massa  $M$  behandeld worden. De totale massa is typisch een behouden grootheid: massa produceren of vernietigen kan bezwaarlijk (behalve bij kernreacties); wel is transport mogelijk. Daarom geldt voor  $M$  een behoudswet. Vergelijking (1.3) wordt dan door vervanging van  $G$  door  $M$

$$\frac{d}{dt}M = \phi_{m,\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} \quad (1.4)$$

De eenheden van de diverse variabelen in vergelijking (1.4) bieden een handig hulpmiddel bij de controle naar de juistheid van de opgestelde balans. In vergelijking (1.4) hebben alle vier termen de eenheid kg/s.

Vervolgens komt nu de massabalans voor een van de componenten van een meer-componentensysteem aan de orde (zie figuur 1.3). Het boekhouden gaat nu over de massa  $M_A$  van stof A die in het controlevolume  $V$  aanwezig is. De algemene vorm van een dergelijke componenten-massabalans luidt:

$$\frac{d}{dt}M_A = \phi_{m,A,\text{in}} - \phi_{m,A,\text{uit}} + P_A \quad (1.5)$$



Figuur 1.3.

Vanwege de productieterm  $P_A$  die het gevolg is van een of meerdere chemische reacties, kunnen we, anders dan bij vergelijking (1.4), in het geval van vergelijking (1.5) niet meer spreken van een behoudswet. Omdat het in het geval van chemische

reacties veel handiger is te werken in termen van molen, hebben alle vier termen in een dergelijke componenten-massabalans, vergelijking (1.5), de eenheid mol/s of kmol/s.

Het is vaak veel handiger om de balans op te stellen met behulp van concentraties. Verderop zal veelvuldig blijken, dat het concentraties en concentratieverschillen zijn die transporten bepalen en niet zozeer de grootte (de massa in dit geval) zelf. In het algemeen is een concentratie gedefinieerd als de grootte  $G$  per volume-eenheid. Anders gezegd, de concentratie ( $g$ ) van  $G$  is de hoeveelheid van  $G$  in het volume  $V$  gedeeld door de grootte van het volume  $V$ ; in formule:

$$g = \frac{G}{V} \quad (1.6)$$

De concentratie van de totale massa is equivalent met de dichtheid  $\rho$ , terwijl de concentratie van een component aangegeven wordt met een  $c$ . Dus voor een meer-componentensysteem bestaande uit de stoffen A, B, ... enz.

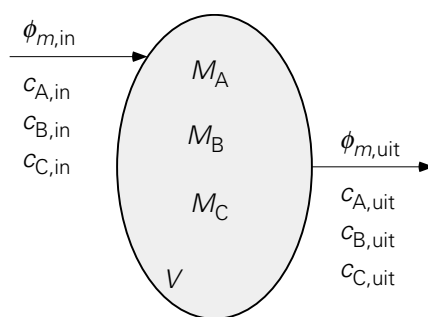
$$\begin{aligned} c_A &= \text{mass of A per unit of volume} = M_A/V \\ c_B &= \text{mass of B per unit of volume} = M_B/V \end{aligned} \quad (1.7)$$

enz.

Uiteraard geldt voor de totale (massa) concentratie  $\rho$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M_A + M_B + \dots}{V} = c_A + c_B + \dots \quad (1.8)$$

Om een massabalans op te stellen voor stof A die aanwezig is in de reactor van figuur 1.4, is het uiterst raadzaam consequent het algemene recept te hanteren zoals dat aan het eind van § 1.1 is samengevat:



Figuur 1.4.

- 1) maak een schets en geef alle grootheden en stromen weer in symbolen (zie figuur 1.4)
- 2) grootte  $\rightarrow$  massa  $M_A$  van A in reactor

- 3) controlevolume  $\rightarrow$  gehele reactorvolume  $V$
- 4) ga systematisch na of, waardoor en hoe  $M_A$  in  $V$  verandert en stel een *balans* op voor  $M_A$  in  $V$ .

Stap 5 van het recept is hier nog niet aan de orde.

Het gaat er dus om systematisch na te gaan welke effecten bij kunnen dragen aan de toe- of afname van  $M_A$  in  $V$ . Die effecten komen dan in het rechterlid van de balansvergelijking te staan, terwijl links  $dM_A/dt$  staat. De verschillende termen aan de rechterkant worden in dit geval:

*stroom in*: er gaat een massastroom  $\phi_{m,in}$  de reactor in, die component A bevat met een concentratie  $c_{A,in}$

$$\begin{aligned}\phi_{m,A,in} &= \text{massa van A die per tijdseenheid } V \text{ instroomt} \\ &= (\text{volume dat per tijdseenheid } V \text{ instroomt}) \times (\text{massa van A die} \\ &\quad \text{zich in een volume-eenheid van de ingaande stroom bevindt}) \\ &= \phi_{V,in} \cdot c_{A,in}\end{aligned}\tag{1.9}$$

Het symbool  $\phi_{V,in}$  staat voor het volumedebiet dat de reactor ingaat, d.w.z. het aantal kubieke meters dat per seconde de reactor instroomt.

*stroom uit*: hiervoor geldt op analoge wijze

$$\phi_{m,A,uit} = \phi_{V,uit} \cdot c_{A,uit}\tag{1.10}$$

*productie*: ten gevolge van een chemische reactie

$$P_A = r_A \cdot V\tag{1.11}$$

waarbij  $r_A$  de productie van A per volume-eenheid is (in mol/m<sup>3</sup>s). Vanwege deze chemische-reactieterm is het handiger om alle concentraties in deze balansvergelijking uit te drukken in mol/m<sup>3</sup>.

De componenten-massabalans voor A in de reactor luidt dus

$$\frac{d}{dt}M_A = \phi_{m,A,in} - \phi_{m,A,uit} + P_A\tag{1.12}$$

en is, zolang  $V$  constant is, met behulp van de vergelijkingen (1.7), (1.9), (1.10) en (1.11) te schrijven als

$$V \frac{d}{dt}c_A = \phi_{V,in} \cdot c_{A,in} - \phi_{V,uit} \cdot c_{A,uit} + r_A V\tag{1.13}$$

Vergelijking (1.13) is equivalent met

$$\frac{d}{dt} c_A = \frac{\phi_{V,\text{in}}}{V} \cdot c_{A,\text{in}} - \frac{\phi_{V,\text{uit}}}{V} \cdot c_{A,\text{uit}} + r_A \quad (1.14)$$

Merk op dat alle termen in vergelijking (1.14) nu de eenheid mol/m<sup>3</sup>s hebben.

Indien de overeenkomstige vergelijkingen (1.13) voor alle aanwezige componenten opgeschreven worden en vervolgens opgeteld, wordt de massabalans voor de totale massa in  $V$  (kortweg de totale-massabalans) weer verkregen:

$$\begin{aligned} V \frac{d}{dt} c_A &= \phi_{V,\text{in}} \cdot c_{A,\text{in}} - \phi_{V,\text{uit}} \cdot c_{A,\text{uit}} + r_A V \\ V \frac{d}{dt} c_B &= \phi_{V,\text{in}} \cdot c_{B,\text{in}} - \phi_{V,\text{uit}} \cdot c_{B,\text{uit}} + r_B V \\ \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \hline V \frac{d}{dt} (c_A + c_B + \dots) &= \phi_{V,\text{in}} (c_A + c_B + \dots)_{\text{in}} + \\ & - \phi_{V,\text{uit}} (c_A + c_B + \dots)_{\text{uit}} + (r_A + r_B + \dots) V \end{aligned} \quad (1.15)$$

Het linkerlid is te schrijven als  $V d\rho/dt = dM/dt$ . De laatste term van het rechterlid is nul, daar productie van de ene component t.g.v. reacties annihilatie van de andere component(en) inhoudt. Als bovendien gebruikt  $\phi_V \cdot \rho = \phi_m$  wordt, gaat vergelijking (1.15) inderdaad over in de totale-massabalans, zie vergelijking (1.4).

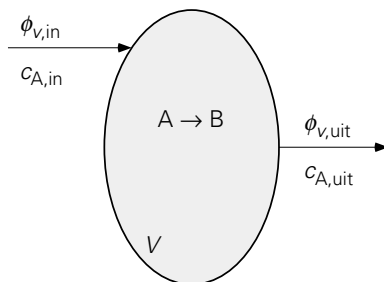
**Voorbeeld 1.2.** Een chemische reactor onder stationaire condities

In een reactor vindt een chemische reactie plaats. Stof A reageert tot een nieuw product B. Een waterige oplossing van A stroomt de reactor binnen. Het volumedebiet in bedraagt 1 l/s, de concentratie van A hierin is  $c_{A,\text{in}} = 100 \text{ kg/m}^3$ . De reactie in de reactor is niet volledig zodat er in de uitgang van de reactor ook nog A wordt aangetroffen. De volumestroom aan de uitgang is ook 1 l/s, de concentratie is hier  $c_{A,\text{uit}} = 20 \text{ kg/m}^3$ . De toestand is *stationair* (d.w.z. verandert niet in de tijd).

Hoe groot is de (negatieve) productie van A in de reactor?

Het zal duidelijk zijn dat voor de beantwoording van de vraag een balans voor de massa van A in de reactor opgesteld moet worden. Volg daartoe het recept:

- 1) schets → zie figuur 1.5.
- 2) grootheid →  $M_A$
- 3) controlevolume → gehele reactor
- 4) stationair → “  $\frac{d}{dt} = 0$  ”; de volumedebieten in en uit zijn exact gelijk aan elkaar  
→  $\phi_{V,\text{in}} = \phi_{V,\text{uit}} = \phi_V$



Figuur 1.5.

Daarmee luidt de balans

$$0 = \phi_V \cdot c_{A,\text{in}} - \phi_V \cdot c_{A,\text{uit}} + P_A$$

Dit levert voor de productie

$$P_A = \phi_V \cdot c_{A,\text{uit}} - \phi_V \cdot c_{A,\text{in}} = 10^{-3} \cdot (20 - 100) = -8,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg/s}$$

5

Het is overigens ook mogelijk om in plaats van met concentraties met *massafracties* te werken. Deze worden genoteerd met een  $x$  en zijn gedefinieerd als de fractie van bijvoorbeeld stof A t.o.v. de totale massa:

$$x_A = \frac{M_A}{M} \quad (1.16)$$

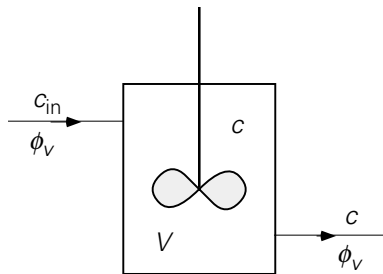
De massabalans voor stof A luidt in termen van de massafractie

$$\frac{d}{dt}(M x_A) = \phi_{m,\text{in}} \cdot x_{A,\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} \cdot x_{A,\text{uit}} + P_A \quad (1.17)$$

Merk op dat  $x$  geen dimensie heeft, dat wil zeggen: de eenheid is kg/kg.

Om balansvergelijkingen te vereenvoudigen en op gemakkelijk oplosbare (differentiaal)vergelijkingen uit te komen zijn een aantal simpele concepten heel gebruikelijk geworden in de wereld van de chemische en fysische technologie. Allereerst is het concept van een *ideaal geroerde tank* of ideaal gemengde tank geïntroduceerd: het beschrijft een apparaat waarin de inhoud overal en steeds dezelfde samenstelling heeft. Dit betekent tevens dat de samenstelling van de vloeistof die uit de tank stroomt op elk tijdstip gelijk is aan die van de inhoud van de tank. In het geval de ideaal geroerde tank een chemische reactor is met een continue in- en uitstroom, dan spreekt men van een *Continuous Stirred Tank Reactor* (CSTR).

In het volgende voorbeeld moeten voor het eerst in dit boek eerste-orde lineaire differentiaalvergelijkingen opgelost worden. De techniek van het oplossen van dit type differentiaalvergelijking wordt gepresenteerd in Appendix 1A.

**Voorbeeld 1.3. Kokosolie in een ideaal geroerde tank**

Figuur 1.6.

Bekijk nu de situatie van figuur 1.6 voor een ideaal geroerde tank. Er stroomt voortdurend een volumedebiet  $\phi_V$  met een zekere concentratie palmpittenolie  $c_{P0}$  de tank in en ook de tank weer uit. De tank is steeds geheel gevuld met palmpittenolie. Het gaat hier dus om een stationaire situatie: debieten en samenstelling van de vloeistof veranderen niet in de tijd. Op tijdstip  $t = 0$  wordt echter, bij gelijkblijvend volumedebiet, aan de ingang instantaan overgeschakeld van palmpittenolie op een stroom kokosolie met concentratie  $c_{P,in}$ .

De vraag is nu: hoe veranderen de concentraties van palmpittenolie en kokosolie aan de uitgang als functie van de tijd?

Om het antwoord te vinden moet weer, volgens het recept, een massabalans opgesteld worden, allereerst voor de palmpittenolie:

- 1) schets  $\rightarrow$  zie figuur 1.6
- 2) grootheid  $\rightarrow$  massa palmpittenolie  $\rightarrow M_P = V \cdot c_P$
- 3) controlevolume  $\rightarrow$  volume van de tank  $V$
- 4) massabalans voor de periode  $t \geq 0$ :

$$V \frac{d}{dt} c_P = \phi_V \cdot 0 - \phi_V \cdot c_P + 0 \quad (1.18)$$

Vanaf  $t = 0$  is de ingangconcentratie  $c_{P,in}$  van de palmpittenolie immers gelijk aan nul. Vergelijking (1.18) kan vervolgens herschreven worden als

$$\frac{d}{dt} c_P = - \frac{\phi_V}{V} c_P \quad (1.19)$$

Vergelijking (1.19) moet nu worden opgelost met als randvoorwaarde

$$t = 0 \rightarrow c_P = c_{P0}$$

Dit levert

$$c_P(t) = c_{P0} \cdot \exp\left(-\frac{\phi_V}{V} t\right) \quad (1.20)$$

Volgens hetzelfde recept geeft de massabalans voor de kokosolie voor de periode



$t \geq 0$ :

$$V \frac{d}{dt} c_C = \phi_V c_{C,\text{in}} - \phi_V c_C + 0 \quad (1.21)$$

Vergelijking (1.21) kan herschreven worden tot

$$\frac{d}{dt} c_C = \frac{\phi_V}{V} (c_{C,\text{in}} - c_C) \quad (1.22)$$

Deze differentiaalvergelijking oplossen met de beginvoorwaarde  $c_C = 0$  op  $t = 0$  resulteert in

$$c_C(t) = c_{C,\text{in}} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\phi_V}{V} t\right) \right] \quad (1.23)$$

De laatste vergelijking drukt uit hoe snel of langzaam de concentratie kokosolie in de tank gelijk wordt aan de ingangconcentratie  $c_{C,\text{in}}$  na de omschakeling.

⑤

### **Samenvatting**

De algemene vorm van de componenten-massabalans voor stof A is

$$\frac{d}{dt} M_A = \phi_{m,A,\text{in}} - \phi_{m,A,\text{uit}} + P_A$$

Deze balans kan ook in termen van concentraties en chemische reactiesnelheid  $r_A$  geschreven worden:

$$\frac{d}{dt} V c_A = \phi_{V,\text{in}} \cdot c_{A,\text{in}} - \phi_{V,\text{uit}} \cdot c_{A,\text{uit}} \pm r_A V$$

De concentratie van stof A wordt genoteerd met  $c_A$  en is, vanwege de chemische reactie(s), in mol A per volume-eenheid, met de reactiesnelheid  $r_A$  in mol A per volume-eenheid en per tijdseenheid.

Enkele voorbeelden (nog zonder chemische reacties) hebben laten zien hoe balansvergelijkingen leiden tot eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen die gemakkelijk kunnen worden opgelost met de methode van scheiding van variabelen.

### **1.2.2 Chemische reactoren**

In voorbeeld 1.3 was er geen productieterm. In chemische reactoren is er juist wel sprake van productie (en/of consumptie) van een of meer componenten. Dan moet om de balans te kunnen oplossen de productieterm gespecificeerd worden.

Deze werkwijze zal geïllustreerd worden voor een *eerste-orde chemische reactie* waarbij de snelheid waarmee stof A per volume-eenheid wordt omgezet, aangeduid met  $r_A$  (in mol/m<sup>3</sup>s), recht evenredig is met de concentratie  $c_A$  van A (in mol/m<sup>3</sup>):

$$r_A = k_r c_A \quad (1.24)$$

Hierin is  $k_r$  de *eerste-orde reactiesnelheidsconstante* (eenheid: s<sup>-1</sup>). Als in een chemische reactie stof A wordt verbruikt, geldt voor de productiesnelheid van A dat  $P_A = -r_A \cdot V$  en dat deze dus negatief is. Voor de simpele reactie  $A \rightarrow B$  geldt voor de productie van stof B dat deze alleen van de concentratie  $c_A$  van A afhangt en dus geldt dan  $P_B = +r_A \cdot V$ .

Verschillende typen reactoren zullen nu de revue passeren.

### De batch reactor

Beschouw eerst een ideaal geroerde tank die *ladingsgewijs* wordt bedreven; dat wil zeggen: de tank wordt in één keer gevuld en er stroomt daarna niets in of uit. Hierin wordt A volgens een eerste-orde reactie omgezet (waarin doet voor de balans voor A niet ter zake). Zo'n reactor wordt een *batch reactor* genoemd. Aangezien er geen stromen in en uit de reactor zijn, luidt de massabalans voor stof A in het geval van een constant reactor (controle) volume:

$$V \frac{d}{dt} c_A = 0 - 0 - r_A V = -r_A V = -k_r c_A V \quad (1.25)$$

Door gebruik te maken van de randvoorwaarde  $c_A(t = 0) = c_{A0}$  die de instantane toevoeging van de reactant(en) weergeeft, wordt de oplossing van vergelijking (1.23) verkregen

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \exp(-k_r t) \quad (1.26)$$

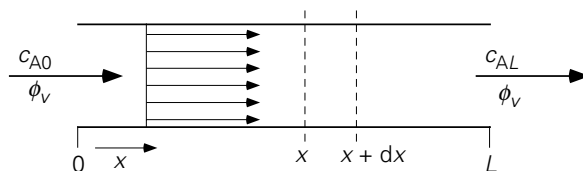
Zoals te verwachten viel, loopt de hoeveelheid A in de tank terug met de tijd. Er wordt immers tijdens het reactieverloop geen A aan de tank toegevoerd, terwijl er wel A omgezet wordt.

### De propstroomreactor

Nu is de beurt aan de *ideale buisreactor* waarin zich een chemische reactie afspeelt. In zo'n ideale buisreactor beweegt elk vloeistofpakketje even snel als alle andere. Men spreekt van *propstroom* (Eng. 'plug flow') en ook van een *propstroomreactor* (Eng. 'plug flow reactor'). In ons geval is de reactie weer eerste-orde (met reactiesnelheidsconstante  $k_r$ ) waarbij A omgezet wordt in B.

Als nu gegeven is dat de concentratie van A aan het begin van de reactor  $c_{A0}$  is, wat is dan de concentratie aan het uiteinde van de buis?

Voor de eenvoud wordt diffusie (wordt pas later behandeld) verwaarloosd en wordt aangenomen dat de vloeistof (ondanks de reactie) een constante dichtheid heeft. De concentratie van A zal, als gevolg van de chemische reactie, in de richting van de uitgang steeds verder afnemen. Om dit verloop (het *profiel*) te vinden dient als controlevolume ergens in de buis een dun plakje van de buis tussen  $x$  en  $x + dx$  beschouwd te worden waarbij  $x$  de coördinaat langs de buis is in de richting van de stroming (zie figuur 1.7). De toestand wordt weer stationair verondersteld, d.w.z. dat er geen veranderingen in de tijd zijn. Door het linkerzijvlak komt er een massastroom van A het controlevolume binnen ter grootte  $\phi_V \cdot c_A$ . Hierbij moet natuurlijk wel de concentratie genomen worden zoals die op positie  $x$  is. Deze wordt weergegeven met  $c_A|_x$ . Door het rechterzijvlak stroomt er  $\phi_V \cdot c_A$  uit, maar nu met  $c_A$  zoals die op positie  $x + dx$  is:  $c_A|_{x+dx}$ . Tenslotte wordt de consumptie van A in het plakje als gevolg van de chemische reactie weer weergegeven door  $r_A V$  waarbij nu wel  $V = A dx$ . De massabalans over het plakje luidt dan



Figuur 1.7. Een propstroomreactor

$$0 = \phi_V \cdot c_A|_x - \phi_V \cdot c_A|_{x+dx} - k_r \cdot c_A \cdot A dx \quad (1.27)$$

waarin  $A$  het oppervlak is van de dwarsdoorsnede van de buis (loodrecht op de stromingsrichting). Merk op dat het linkerlid van de vergelijking nul is, daar de toestand stationair is verondersteld; er kan dus in het controlevolume geen sprake zijn van verandering van de aanwezige massa van A. Door alle termen in het rechterlid te delen door  $dx$  en door de limiet  $dx \rightarrow 0$  te nemen, kan vergelijking (1.27) omschreven worden tot

$$\phi_V \frac{dc_A}{dx} = -k_r \cdot A \cdot c_A \quad (1.28)$$

De oplossing hiervan (gebruik de methode van scheiding van variabelen) is, dankzij de randvoorwaarde  $c_A(x=0) = c_{A0}$ :

$$\frac{c_A(x)}{c_{A0}} = \exp\left(-\frac{k_r \cdot A \cdot x}{\phi_V}\right) \quad (1.29)$$

Daarmee wordt de concentratie aan de uitgang

$$\frac{c_A(L)}{c_{A0}} = \exp\left(-\frac{k_r \cdot AL}{\phi_V}\right) = \exp\left(-\frac{k_r \cdot V}{\phi_V}\right) \quad (1.30)$$

waarin  $V = A \cdot L$  het volume van de buisreactor is.

De hierboven geschetste techniek van het opstellen van een balans over een dun plakje waarvan de afmeting naar nul gaat (limiet  $dx \rightarrow 0$ ), leidt tot een zogenaamde *micro-balans*, zie vergelijking (1.27), en levert gedetailleerde informatie op (namelijk een *profiel*). Omdat de lokale snelheid van de chemische reactie afhangt van de lokale concentratie die in de buisreactor afneemt in de lengterichting, is deze aanpak via een microbalans over een dun plakje echt vereist, ook al heeft de oorspronkelijke vraag alleen betrekking op de concentratie aan het uiteinde van de reactor.

### De Continuous Stirred Tank Reactor (CSTR)

Voorbeeld 1.3 zal nu uitgebreid worden met een chemische reactie. De reactor, een CSTR, bevat een katalysator die de conversie van stof A versnelt. De katalysator kan de reactor niet uit. Aanvankelijk wordt de reactor doorstroomd met een debiet  $\phi_V$  dat geen A bevat. Vanaf tijdstip  $t = 0$  bevat de inkomende stroom  $\phi_V$  een concentratie  $c_{A0}$  aan A.

Hoe verloopt de concentratie van A in de uitgang van de reactor als functie van de tijd?

Wederom moet een massabalans opgesteld worden en de resulterende differentiaalvergelijking opgelost. Als grootte waarvoor de balans moet worden opgesteld dient de massa van A; het controlevolume is het volume van de reactor. De balans luidt

$$\frac{d}{dt} V c_A = \underbrace{\phi_V c_{A0}}_{\text{in}} - \underbrace{\phi_V c_A}_{\text{uit}} - \underbrace{k_r c_A V}_{\text{productie}} \quad (1.31)$$

Voor constant reactor volume en voor constante  $\phi_V$  kan deze vergelijking worden geschreven als:

$$\frac{d}{dt} c_A = - \left( \frac{\phi_V}{V} + k_r \right) c_A + \frac{\phi_V}{V} c_{A0} \quad (1.32)$$

Deze differentiaalvergelijking is een eerste-orde lineaire differentiaalvergelijking van het type

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y + \beta \quad (1.33)$$

waarvan de oplossing wordt besproken in Appendix 1A.

Met de beginvoorwaarde dat op  $t = 0$  geldt  $c_A = 0$  (de reactor bevatte aanvankelijk geen A), is de oplossing van vergelijking (1.31):

$$c_A(t) = \frac{\phi_V / V}{\phi_V / V + k_r} c_{A0} \cdot \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\phi_V}{V} + k_r \right) t \right] \right\} \quad (1.34)$$

Merk op dat zowel  $\phi_V / V$  als  $k_r$  de eenheid  $s^{-1}$  heeft. De uiteindelijke stationaire situatie geldt als een limietgeval en wordt verkregen door  $t \rightarrow \infty$  te substitueren in vergelijking (1.34):

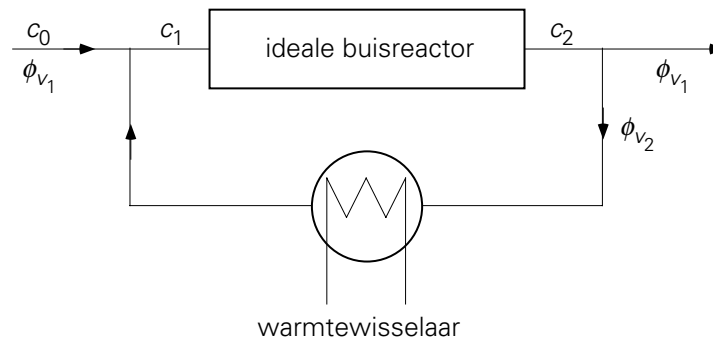
$$c_A = \frac{1}{1 + k_r \frac{V}{\phi_V}} c_{A0} \quad (1.35)$$

Dit resultaat is ook direct uit vergelijking (1.31) af te leiden: in de uiteindelijke stationaire situatie geldt immers dat de  $d/dt$ -term nul is.

Bij vergelijking van de prestaties van de propstroomreactor en de CSTR, met beide dezelfde  $\phi_V / V$  - verhouding, is onmiddellijk duidelijk dat de omzetting in de buisreactor veel groter is. Dit wordt veroorzaakt door een verschil in de gemiddelde concentratie  $\langle c_A \rangle$  tussen beide reactoren. Voor een reactant die omgezet wordt geldt: in de buisreactor is  $\langle c_A \rangle$  altijd groter dan  $c_{AL}$ , terwijl in de tankreactor  $\langle c_A \rangle$  juist altijd gelijk is aan de concentratie aan de uitgang. Aangezien bij een eerste-orde reactie de omzetting recht evenredig is met de concentratie, zal dus de omzetting in de buisreactor groter zijn.

#### **Voorbeeld 1.4.** *Een propstroomreactor met recirculatie*

Ter oefening bezien we nu een praktijksituatie waarin een deel van de uitgaande stroom van een propstroomreactor wordt teruggevoerd, opnieuw de reactor in. Dit wordt gedaan om een betere benutting te krijgen van een reactant, als in een enkele passage slechts een deel van die reactant wordt omgezet; op deze wijze kan dus bespaard worden op de lengte van de reactor. Bovendien kan op deze manier bij een exotherme reactie (veel voorkomend) de temperatuur aan de ingang en daarmee de conversie van reactant A in de reactor ‘goedkoop’ opgekrikt worden met een gedeelte van de warmte van de uitgangsstroom (de meeste reacties verlopen immers sneller bij een hogere temperatuur). In andere gevallen wordt in de recirculatieleiding vaak een warmtewisselaar geplaatst waarmee een deel van de reactiewarmte onttrokken kan worden aan de stroming en elders gebruikt. In figuur 1.8 is deze situatie geschetst.



Figuur 1.8.

In de propstream reactor wordt een stof A omgezet volgens een eerste-orde chemische reactie. Het volumedebiet van toe- en afvoer is  $\phi_{V_1}$ . Om de reactiewarmte af te voeren wordt een volumedebiet  $\phi_{V_2}$  door een warmtewisselaar gerecirculeerd. De concentratie van stof A in de toevoerstream  $\phi_{V_1}$  is  $c_0$ . De concentratie die de reactor binnenstroomt, wordt aangeduid als  $c_1$ , terwijl de concentratie die de reactor verlaat,  $c_2$  heet. Voor de eenvoud wordt aangenomen dat de reactie enkel in de reactor plaatsvindt. Het volume van de reactor is  $V$  en de toestand is stationair. Hoe groot is  $c_2$  t.o.v.  $c_0$ ?

Het debiet  $\phi_{V_1} + \phi_{V_2}$  dat de reactor ingaat, kan gevonden worden door een totale massabalans op te stellen over het T-stuk in de leiding vóór de propstreamreactor. Op soortgelijke wijze volgt de concentratie  $c_1$  uit het opstellen van een massabalans voor A over hetzelfde T-stuk

$$0 = \phi_{V_1}c_0 + \phi_{V_2}c_2 - (\phi_{V_1} + \phi_{V_2})c_1 \quad (1.36)$$

Herschikking van vergelijking (1.36) en introductie van de *recirculatieverhouding*

$a \equiv \frac{\phi_{V_2}}{\phi_{V_1} + \phi_{V_2}}$  leidt tot de volgende uitdrukking voor  $c_1$ :

$$c_1 = \frac{\phi_{V_1}c_0 + \phi_{V_2}c_2}{\phi_{V_1} + \phi_{V_2}} = (1 - a)c_0 + a c_2 \quad (1.37)$$

Uit de eerdere discussie over de propstreamreactor volgt dat voor deze configuratie de exit concentratie  $c_2$  gegeven wordt door:

$$\frac{c_2}{c_1} = \exp\left(-k_r \frac{V}{\phi_{V_1} + \phi_{V_2}}\right) \quad (1.38)$$

Elimineren van  $c_1$  uit vergelijking (1.38) met behulp van vergelijking (1.37) resulteert in:

$$\frac{c_2}{c_0} = \frac{1-a}{\exp\left[(1-a)k_r \frac{V}{\phi_{V_1}}\right] - a} \quad (1.39)$$

Twee limietgevallen verdienen een nadere beschouwing:

- 1)  $a = 0$ , d.w.z. geen recirculatie: voor deze situatie volgt uit vergelijking (1.39):

$$\frac{c_2}{c_0} = \exp\left(-k_r \frac{V}{\phi_{V_1}}\right) \quad (1.40)$$

Uiteraard is dit het resultaat van de propstroomreactor van vergelijking (1.30): er is nu immers geen recirculatie.

- 2)  $a \rightarrow 1$ , d.w.z. dat de recirculatiestroom veel groter is dan  $\phi_{V_1}$ . Nu is, met behulp van de reeksontwikkeling  $\exp x \rightarrow 1 + x$  voor  $x \rightarrow 0$ , vergelijking (1.39) te benaderen met:

$$\frac{c_2}{c_0} = \frac{1}{1 + k_r \frac{V}{\phi_{V_1}}} \quad (1.41)$$

Dit is juist weer het resultaat eerder gevonden – zie vergelijking (1.35) – voor een CSTR in de stationaire situatie!

⑤

### **Samenvatting**

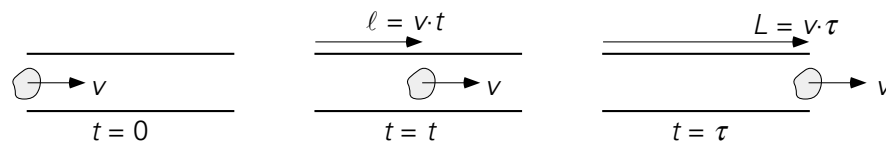
In deze paragraaf zijn enkele chemische reactoren behandeld: de batchreactor, de propstroomreactor (de ideale buisreactor), de Continuous Stirred Tank Reactor (CSTR) en de propstroomreactor met recirculatie. In alle gevallen is gerekend met een eerste-orde reactie.

Steeds komt het er op neer over een geschikt controlevolume een of meerdere massa-balansen op te stellen. Vaak is de volledige reactor het controle volume en dan spreken we over een macrobalans. In het geval van een buisreactor moeten we echter een microbalans opstellen over een dun plakje ergens in de reactor, waarbij de plakdikte  $dx$  heel klein is ( $dx \rightarrow 0$ ); deze aanpak leidt tot een differentiaalvergelijking waaruit dan het concentratieprofiel  $c(x)$  binnen de reactor volgt.

### **1.2.3 Verbliftijdspreiding**

Beschouw een klein vloeistofpakketje dat, als onderdeel van een volume stroom  $\phi_V$ , een buis met volume  $V$ , doorsnede  $A$  en lengte  $L$  instroomt. Op tijdstip  $t = 0$  is het pakketje (of elementje) juist binnen de pijp. Op het tijdstip  $t$  heeft het een weg ter

lengte  $\ell = v \cdot t$  afgelegd (zie figuur 1.9); derhalve is het elementje op het tijdstip  $\tau = L/v$  aan het uiteinde van de buis. De tijd  $\tau$  wordt de *verblijftijd* genoemd.



Figuur 1.9.

Als alle pakketjes in een stroming dezelfde snelheid  $v = \phi_v/A$  hebben, dan geldt voor alle pakketjes dezelfde verblijftijd  $\tau$ .

$$\tau = \frac{L}{v} = \frac{AL}{\phi_v} = \frac{V}{\phi_v} \quad (1.42)$$

Een stroming, waarin alle vloeistofpakketjes (of elementjes) dezelfde verblijftijd hebben, wordt *propstroom* genoemd (zie ook figuur 1.7).

In werkelijkheid is meestal geen sprake van één verblijftijd voor alle pakketjes. Niet alle pakketjes hebben immers dezelfde snelheid en/of leggen dezelfde weg af. In een buis is in werkelijkheid de snelheid op de as het hoogst en aan de wand zelfs nul; propstroom is daarmee een ideaal type stroming dat eigenlijk nooit voorkomt. In een geroerd vat volgen de pakketjes juist door de menging sterk verschillende paden. Het resultaat is dat in alle apparaten in werkelijkheid, behalve van een *gemiddelde verblijftijd*  $\tau$  gegeven door

$$\tau = \frac{V}{\phi_v} \quad (1.43)$$

ook altijd sprake is van een verblijftijdspreiding.

Kennis van deze verblijftijdspreiding kan van belang zijn voor een goede procesvoering. Denk bijvoorbeeld aan de sedimentatie (het “uitzakken”) van vaste deeltjes in een rioolzuiveringsinstallatie. De verblijftijd van *alle* pakketjes vloeistof moet voldoende lang zijn om de deeltjes erin alle uit te laten zakken.

Er zijn meerdere functies waarmee de verblijftijdspreiding kan worden getypeerd; deze zullen hieronder successievelijk besproken worden. Steeds wordt gebruik gemaakt van de dimensieloze tijd  $\theta = t/\tau$  met  $\tau$  gedefinieerd door vergelijking (1.43).

### De E-functie

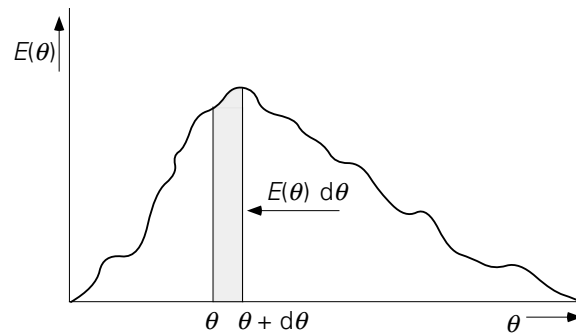
Allereerst kan de verblijftijdspreiding getypeerd worden met behulp van de “leeftijden” van de pakketjes als deze de uitgang passeren: zo wordt de leeftijdsverdeling verkregen, die de *E-functie* wordt genoemd. De definitie van de *E-functie* (“exit age function”) is



$$E(\theta) d\theta = \text{volumefractie van de uitgaande stroom} \quad (1.44)$$

met dimensieloze verblijftijd tussen  $\theta$  en  $\theta + d\theta$

Het recept om  $E(\theta)$  te bepalen zou zijn: neem een monster uit de uitgaande stroom en bepaal hierin de fractie met een dimensieloze verblijftijd tussen  $\theta$  en  $\theta + d\theta$ . Doe dit voor alle  $\theta$ 's tussen 0 en  $\infty$ . Een voorbeeld van een  $E$ -functie is gegeven in figuur 1.10.



Figuur 1.10.

Merk op dat de integraal van  $E(\theta)$  over het interval  $[0, \infty)$  gelijk aan 1 is. Dit is in te zien door te bedenken dat

$$\int_0^{\theta_1} E(\theta) d\theta = \text{volumefractie van het monster van de uitgaande stroom} \quad (1.45)$$

met verblijftijd  $\theta \leq \theta_1$

Elk pakketje dat via de uitstroom het apparaat verlaat, heeft slechts een eindige verblijftijd in het apparaat gekend. Daarom geldt volgens vergelijking (1.45)

$$\int_0^{\infty} E(\theta) d\theta = 1 \quad (1.46)$$

De gemiddelde verblijftijd  $\tau$  kan berekend worden uit de  $E$ -functie volgens

$$\tau = \int_0^{\infty} t E(\theta) d\theta \quad (1.47)$$

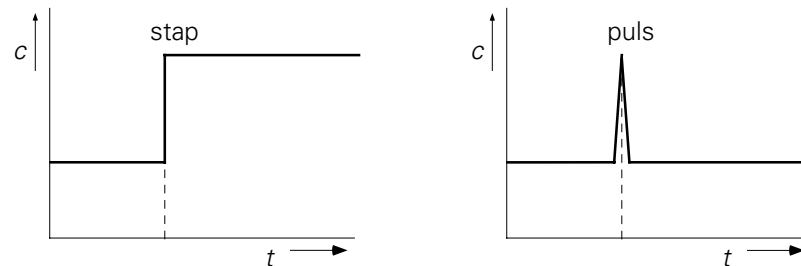
terwijl de standaarddeviatie van de verblijftijdspreiding gekarakteriseerd kan worden met

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (t' - 1)^2 E(t') dt' \quad (1.48)$$

Deze methode om de verblijftijdspreiding te karakteriseren is doorgaans niet zo praktisch, want hoe bepaal je hoe lang een pakketje in een apparaat heeft verbleven?

Om in praktische situaties de verblijftijdspreiding te vinden die bij een bepaald apparaat hoort, worden daarom doorgaans experimenten uitgevoerd waarin men een bekende verandering in de ingangsstroom van het apparaat aanbrengt en de respons aan de uitgang hierop meet als functie van de tijd. Deze procedure wordt overigens niet alleen gebruikt bij een enkel apparaat, maar ook bij een combinatie van apparaten zoals in een fabriek.

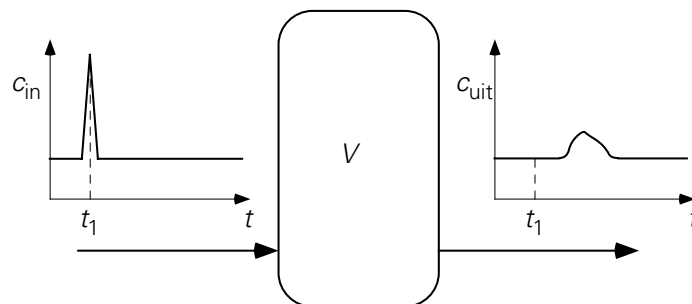
De twee meest voorkomende ingangsveranderingen zijn de “*stap*” en de “*puls*” (zie figuur 1.11). Bij de *stap* wordt op zeker tijdstip een plotselinge verandering van de concentratie van een of andere merkstof (tracer) in de ingangsstroom aangebracht. Vervolgens wordt dit nieuwe signaal gehandhaafd. Bij de *puls* is er sprake van een korte “injectie” van tracer in de ingangsstroom (deze injectie is zo klein en kort dat de stroom  $\phi_V$  vrijwel constant blijft).



Figuur 1.11.

### De C-functie

De *C*-functie geeft de tijdsafhankelijke respons aan de uitgang van een apparaat op een *puls* tracer materiaal aan de ingang. Deze werkwijze is in figuur 1.12 weergegeven.



Figuur 1.12.

De totale hoeveelheid in het apparaat geïnjecteerd materiaal A bedraagt  $M_A$ . Voor de gemiddelde concentratie  $c_0$  van A in het apparaat als nog juist alle A er in zou zitten, volgt dan  $c_0 = M_A/V$  (waar  $V$  het volume van het apparaat is). De *C*-functie is nu gedefinieerd als

$$C(\theta) = \frac{c_{\text{tr,uit}}}{c_0} \quad (1.49)$$

$c_{\text{tr,uit}}$  is de concentratie van de tracer (aangegeven met index tr) aan de uitgang. De massabalans (voor  $t > 0$ ) voor het tracer materiaal in het apparaat luidt

$$\frac{d}{dt} M_{\text{tr}} = \phi_V c_{\text{tr,in}} - \phi_V c_{\text{tr,uit}} = -\phi_V c_{\text{tr,uit}} \quad (1.50)$$

In vergelijking (1.50) is gebruikt dat  $c_{\text{tr,in}} = 0$ , aangezien het tracer materiaal in een puls op  $t = 0$  is ingebracht en de balans is opgesteld voor  $t > 0$ .

Ook de integraal van de  $C$ -functie van 0 tot  $\infty$  is gelijk aan 1. Het bewijs hiervan volgt uit de integratie van het linkerlid van vergelijking (1.50) van  $t = 0$  tot  $t \rightarrow \infty$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} M_{\text{tr}} dt = M_{\text{tr}} \Big|_0^{\infty} = -M_{\text{tr}}(t=0) = -V c_0 \quad (1.51)$$

immers  $M_{\text{tr}}(t \rightarrow \infty) = 0$  : want uiteindelijk zal alle tracer het apparaat uitgespoeld worden. Combineren van vergelijking (1.50) en (1.51) levert

$$V c_0 = \int_0^{\infty} \phi_V c_{\text{tr,uit}} dt \quad (1.52)$$

Rechter- en linkerlid van deze vergelijking delen door  $V c_0$  geeft

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{\phi_V}{V} \frac{c_{\text{tr,uit}}}{c_0} dt = \int_0^{\infty} C(\theta) d\theta \quad (1.53)$$

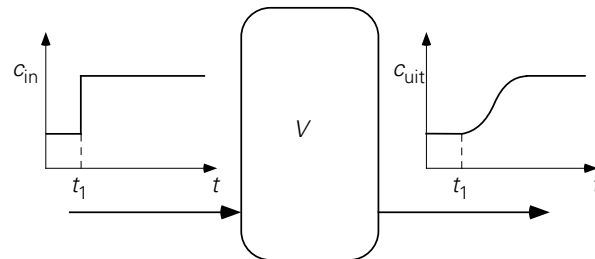
Het recept om de  $C$ -functie te bepalen is dus: volg het concentratieverloop van een tracer aan de uitgang van het apparaat nadat er een tracerpuls aan de ingang is gegeven. Daarbij moet aan de voorwaarde van vergelijking (1.53) voldaan worden.

Aangetoond kan worden dat in een stationaire situatie de  $E$ - en  $C$ -functies identiek zijn:  $C(\theta) = E(\theta)$ . De methoden waarmee zij bepaald worden, zijn evenwel essentieel anders: de  $E$ -functie wordt bepaald uit een enkel monster, terwijl voor de  $C$ -functie de respons aan de uitgang gedurende een voldoende lange periode gevolgd moet worden.

### De $F$ -functie

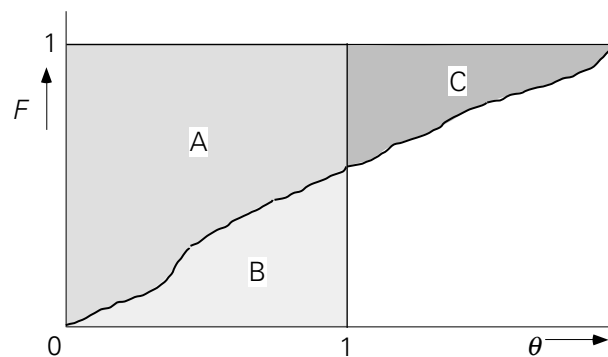
De  $F$ -functie is een andere functie die gevonden kan worden door de concentratie in de uitgang als functie van de tijd te volgen. De  $F$ -functie representeert de respons van de uitgang op een stapfunctie van bijvoorbeeld  $c = 0$  naar  $c = c_{\text{in}}$  aan de ingang (zie figuur 1.13):

$$F(\theta) = \frac{c_{\text{uit}}}{c_{\text{in}}} \quad (1.54)$$



Figuur 1.13.

De  $F$ -functie heeft enkele karakteristieke eigenschappen. Zo gaat  $F \rightarrow 1$  als  $t \rightarrow \infty$  en dus  $\theta \rightarrow \infty$ : uiteindelijk wordt de concentratie in de uitgang immers gelijk aan die in de ingang. In figuur 1.14 is een mogelijke vorm van de  $F$ -functie geschetst.



Figuur 1.14.

Er is nog een kenmerk dat elke  $F$ -functie heeft: de gearceerde oppervlakten B en C in figuur 1.14 zijn even groot. Dit is als volgt af te leiden: de massabalans voor het tracer materiaal in het apparaat luidt ( $t \geq 0$ )

$$\frac{d}{dt} M_{\text{tr}} = \phi_V c_{\text{in}} - \phi_V c_{\text{uit}} \quad (1.55)$$

Integratie voor  $t = 0 \rightarrow \infty$  levert

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} M_{\text{tr}} \cdot dt = \int_0^{\infty} \phi_V (c_{\text{in}} - c_{\text{uit}}) dt \quad (1.56)$$

Het linkerlid van deze vergelijking is weer te herschrijven als

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} M_{\text{tr}} \cdot dt = [M_{\text{tr}}]_0^{\infty} = V c_{\text{in}} \quad (1.57)$$

Immers op  $t = 0$  bevat het apparaat nog geen tracer, dus  $M_{\text{tr}}(t = 0) = 0$ . Combinatie van de vergelijkingen (1.56) en (1.57) levert

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{\phi_V}{V} \left(1 - \frac{c_{\text{uit}}}{c_{\text{in}}}\right) dt = \int_0^{\infty} [1 - F(\theta)] d\theta \quad (1.58)$$

Met andere woorden: de som van de oppervlakten A en C uit figuur 1.14 is exact gelijk aan 1:  $A + C = 1$ . Tevens geldt dat de som van de oppervlakten A en B gelijk aan 1 is (het vierkant AB heeft immers beide zijden met lengte 1). De conclusie is dus dat de oppervlakten B en C gelijk zijn onafhankelijk van de vorm van de  $F$ -functie.

De fysische betekenis van de  $F$ -functie is dat  $F$  gelijk is aan de volumefractie in de uitgaande stroom met een dimensieloze verblijftijd kleiner dan  $\theta$ . Uit de definities van  $C$  en  $E$  volgt dat  $C(\theta)d\theta$  de volumefractie in de uitgaande stroom is met verblijftijd tussen  $\theta$  en  $\theta+d\theta$ ; derhalve geldt:

$$F(\theta) = \int_0^{\infty} C(\theta)d\theta = \int_0^{\infty} E(\theta)d\theta \quad (1.59)$$

De tweede gelijkheid is slechts geldig in een stationaire toestand. Uit vergelijking (1.59) volgt de heel bruikbare relatie:

$$C(\theta) = \frac{dF(\theta)}{d\theta} \quad (1.60)$$

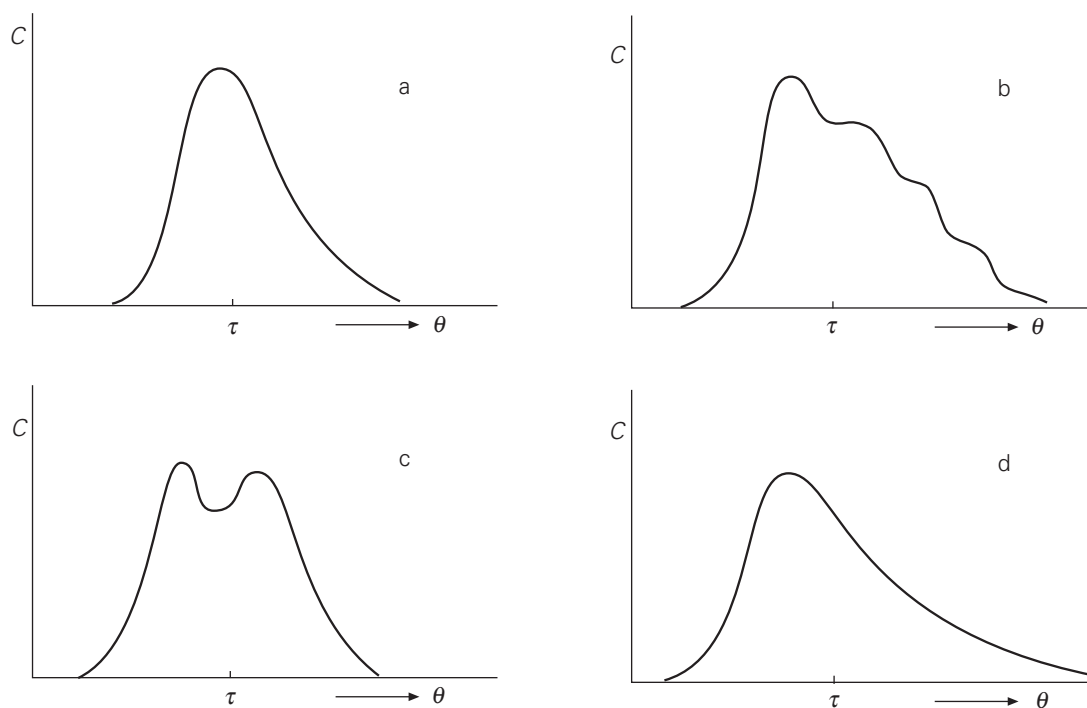
Deze relatie is heel nuttig omdat het vanwege het discrete karakter van de pulsfunctie niet mogelijk is deze als randvoorwaarde op te geven bij het berekenen van een  $C$ -functie voor een ideaal type apparaat uit de differentiaalvergelijking die volgt uit een componentbalans. Zo'n randvoorwaarde bij een differentiaalvergelijking is wel mogelijk bij de stapfunctie voor het berekenen van de  $F$ -functie. De  $C$ -functie volgt dan uit de  $F$ -functie door de eigenschap van vergelijking (1.60) te gebruiken. Zie voorbeelden 1.5 en 1.6 verderop.

### **Realistische en ideale apparaten**

$E$ -,  $C$ - en  $F$ -functies karakteriseren, ieder op hun eigen wijze, de mengtoestand van een vat, of een systeem, die bepaalt toe een systeem reageert op veranderingen van buiten.

In de echte wereld zullen  $F$ - en  $C$ -functies uitsluitend gemeten kunnen worden. In figuur 1.15 zijn enkele van zulke gemeten  $C$ -functies te zien. Figuur 1.15a toont een respons waarbij de verdeling zich behoorlijk netjes centreert rondom de gemiddelde verblijftijd  $\tau$  – het resultaat van een tamelijk nette stromings- of mengtoestand in het betrokken apparaat. In figuur 1.15b zou de stapsgewijze afname in de respons voor tijden groter dan  $\tau$  kunnen duiden op een interne circulatiestroming. A dubbele piek zoals in figuur 1.15c suggereert wellicht dat de vloeistofstroming zich na binnenkomst

in het apparaat splitst in twee stromen die de uitgang bereiken volgens paden van verschillende weglengte. Als het maximum van de verdelingsfunctie eerder aan de uitgang arriveert dan op basis van vergelijking (1.43) voor  $\tau$  verwacht mag worden, zie figuur 1.15d, kan dat zijn als gevolg van een kortsluitstroming tussen ingang en uitgang, waarbij er in het vat een of meer ‘dode zones’ zijn die niet goed doorstroomd worden.



Figuur 1.15.

Door een gemeten responsie te vergelijken met een set berekende verblijftijd-spreidingsfuncties kan soms de stromings- of mengtoestand van een tank of systeem grofweg gekarakteriseerd worden als ideaal geroerd, een propstroom, een aantal ideaal geroerde tanks in serie, of een combinatie van propstroom en ideaal geroerde tanks.

Wij zullen daarom nu aandacht besteden aan een aantal ideale stromingsapparaten – zoals een of meer ideaal geroerde tanks, of een propstroom – waarvoor de  $F$ - en  $C$ -functies berekend kunnen worden. Bedenk daarbij dat deze functies de verblijftijd-spreiding typeren, zodat chemische reacties buiten beschouwing kunnen en zelfs moeten blijven. De verblijftijd-spreiding in een bepaald apparaat wordt immers uitsluitend door de stromingstoestand bepaald.

**Voorbeeld 1.5.**  $F$ - en  $C$ -functies voor een ideaal geroerde tank

Bereken de  $F$ - en  $C$ -functies voor de ideaal geroerde tank, die gevuld is met palmpittenolie. Zie figuur 1.6 en voorbeeld 1.3.

In voorbeeld 1.3 wordt op  $t = 0$  aan de inlaat overgeschakeld op kokosolie. Dit is dus aan de ingang een stap in de kokosolieconcentratie van  $c = 0$  naar  $c = c_{\text{in}}$ . Om de  $F$ - en  $C$ -functies te bepalen moet de concentratie van de tracer (de kokosolie) aan de uitgang bepaald worden als functie van de tijd. De massabalans voor kokosolie wordt gegeven door vergelijking (1.21) en leidt tot de uitdrukking voor de concentratie aan de uitgang gegeven door vergelijking (1.23). Met  $\tau = V/\phi_V$  en  $\theta = t/\tau$  volgt voor de  $F$ -functie:

$$F(\theta) = \frac{c_{\text{uit}}}{c_{\text{in}}} = 1 - \exp(-\theta) \quad (1.61)$$

en daarmee, dankzij vergelijking (1.56), voor de  $C$ -functie:

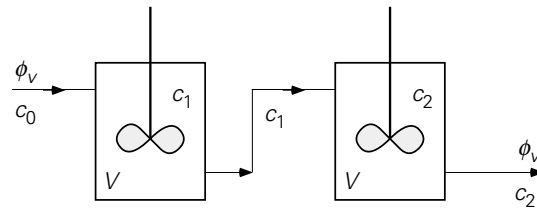
$$C(\theta) = \frac{dF}{d\theta} = \exp(-\theta) \quad (1.62)$$

⑤

**Voorbeeld 1.6.** *F- en C-functie voor 2 ideaal geroerde tanks in serie*

Beschouw twee ideaal geroerde tanks in serie, met in- en uitstroom, zoals te zien in figuur 1.16. De tanks hebben gelijke volumes  $V$ . Op  $t = 0$  wordt bij constant blijvend volumedebiet  $\phi_V$  aan de inlaat plotseling overgeschakeld van tracer-concentratie  $c = 0$  op  $c = c_0$  (stap-methode).

Om de  $F$ - en  $C$ -functies van het systeem van deze twee tanks te bepalen moet de concentratie bij de uitlaat bekend zijn, dus  $c_2(t)$ .



Figuur 1.16.

Massabalans tank 1:

$$V \frac{dc_1}{dt} = \phi_V (c_0 - c_1) \quad \text{met } c_1(0) = 0 \quad (1.63)$$

Massabalans tank 2:

$$V \frac{dc_2}{dt} = \phi_V (c_1 - c_2) \quad \text{met } c_2(0) = 0 \quad (1.64)$$

De oplossing van vergelijking (1.63) luidt:

$$c_1 = c_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\phi_V}{V} t\right) \right] \quad (1.65)$$

Vergelijking (1.64) is niet zo eenvoudig op te lossen, omdat  $c_1$  een functie van de tijd is. Dus moet de oplossing voor  $c_1$  – vergelijking (1.64) – ingevuld worden in vergelijking (1.63):

$$V \frac{dc_2}{dt} = \phi_V c_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\phi_V}{V} t\right) \right] - \phi_V c_2 \quad \text{met } c_2(0) = 0 \quad (1.66)$$

Dit is een inhomogene lineaire differentiaalvergelijking. Meerdere methoden om zo'n inhomogene differentiaalvergelijking op te lossen worden gepresenteerd in Appendix 1B. De oplossing van vergelijking (1.65) is:

$$c_2(t) = c_0 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\phi_V}{V} t \right) \cdot \exp\left(-\frac{\phi_V}{V} t\right) \right] \quad (1.67)$$

Met de definities:  $\tau = 2V/\phi_V$  (aangezien het totale volume van dit systeem van belang is, dus  $2V$ ) en  $\theta = t/\tau$  volgt voor de  $F$ -functie:

$$F(\theta) = \frac{c_2(\theta)}{c_0} = 1 - (1 + 2\theta) \exp(-2\theta) \quad (1.68)$$

en voor de  $C$ -functie:

$$C(\theta) = \frac{dF}{d\theta} = 4\theta \exp(-2\theta) \quad (1.69)$$

•

### Voorbeeld 1.7. $F$ -functie bij een propstroom

De ideale propstroomreactor is al besproken in § 1.2.2 (zie figuur 1.7). Nu gaat het om de  $F$ -functie van de ideale propstroom, zonder dat er een chemische reactie plaatsvindt. In een propstroom hebben alle vloeistofpakketjes de snelheid  $v$ . Nu wordt vanaf  $t \geq 0$  een tracer geïnjecteerd in de inlaatstroom (concentratie  $c_0$ ). Elk vloeistofelement heeft exact dezelfde verblijftijd  $\tau$  die wordt gegeven door vergelijking (1.42).

Er is dus geen sprake van een verblijftijdspreiding: voor  $t < \tau$  komt er geen tracer uit, terwijl voor  $t \geq \tau$  de tracer er uitkomt met steeds concentratie  $c_0$ . Voor de  $F$ -functie geldt dus:

$$F(\theta) = 0 \quad \text{voor } \theta < 1 \quad (1.70)$$

$$F(\theta) = 1 \quad \text{voor } \theta \geq 1$$



### Samenvatting

In een apparaat dat doorstroomd wordt, doen niet alle pakketjes even lang over de reis van in- naar uitgang. In dit verband zijn de begrippen verblijftijd, gemiddelde verblijftijd, dimensieloze (verblijf)tijd en verblijftijdspreiding ingevoerd. Kennis van deze zgn. verblijftijdspreiding is van belang om het apparaat goed te kunnen bedienen. Er zijn drie functies besproken om de verblijftijdspreiding weer te geven:

de *E*-functie: geeft de verblijftijden van de delen van een monster uit de uitgaande stroom op één tijdstip weer;

de *C*-functie: geeft de reactie van de uitgang op een *puls* aan de ingang;

de *F*-functie: geeft de reactie van de uitgang op een *stap* aan de ingang.

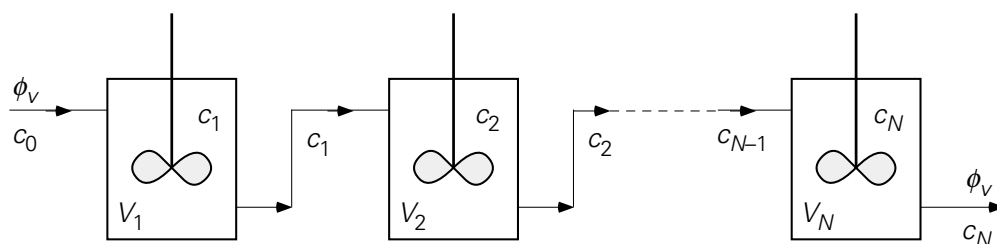
Er is een verband afgeleid tussen de *F*- en *C*-functies:

$$C(\theta) = \frac{dF}{d\theta}$$

Voor een systeem bestaande uit een of meer ideaal geroerde tanks zijn uitdrukkingen af te leiden voor de *F*-functie van het systeem.

#### 1.2.4 Meer tanks in serie

De ideale propstroomreactor van § 1.2.2 (figuur 1.7) is te benaderen door een groot aantal ideaal geroerde tank reactoren in serie te zetten (zie figuur 1.17) en stationair te bedienen. Dit zal hieronder worden aangetoond met behulp van de balansen.



Figuur 1.17.

Na de eerste tank is de tijdsonafhankelijke concentratie immers (zie § 1.2.2)

$$\frac{c_1}{c_0} = \left( 1 + k_r \frac{V_1}{\phi_v} \right)^{-1} = \left( 1 + \frac{k_r V / \phi_v}{N} \right)^{-1} \quad (1.71)$$

Hierbij is gebruikt dat  $V_1 = V_2 = \dots = V/N$  ( $N$  is het aantal tanks in serie,  $V$  het volume van alle tanks tezamen). De concentratie  $c_1$  is de concentratie in de ingaande stroom van tank 2, dus geldt er

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(1 + \frac{k_r V / \phi_V}{N}\right)^{-1} \quad (1.72)$$

of met behulp van vergelijking (1.71)

$$\frac{c_2}{c_0} = \left(1 + \frac{k_r V / \phi_V}{N}\right)^{-2} \quad (1.73)$$

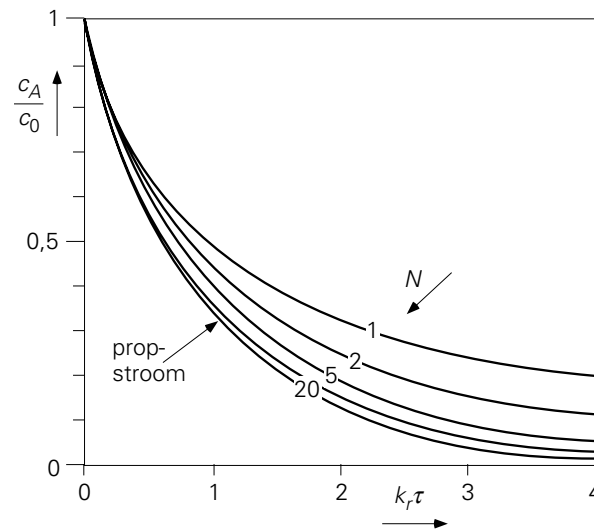
Uiteindelijk wordt voor de concentratie na de  $N$ -de tank gevonden:

$$\frac{c_N}{c_0} = \left(1 + \frac{k_r V / \phi_V}{N}\right)^{-N} \quad (1.74)$$

Voor grotere  $N$  zullen de tankreactoren in serie steeds meer gaan lijken op de ideale buisreactor. Elk plakje van een propstroomreactor is als het ware een ideaal geroerd vaatje. Uiteindelijk in de limiet  $N \rightarrow \infty$  zijn beide systemen hetzelfde, immers

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k_r \tau}{N}\right)^{-N} = \exp(-k_r \tau) \quad (1.75)$$

In figuur 1.18 zijn voor een aantal waarden van  $N$  de curves van  $c_N$  als functie van  $k_r \tau$  weergegeven met  $\tau = V / \phi_V$ . Tevens is het resultaat van de ideale propstroomreactor afgebeeld.



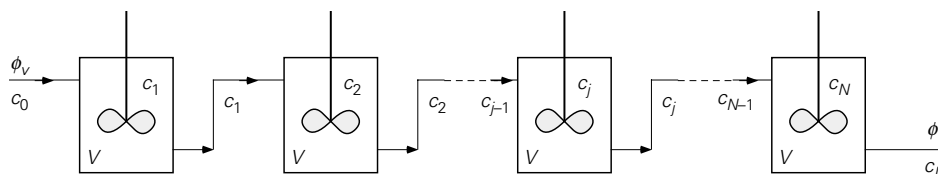
Figuur 1.18.

**Voorbeeld 1.8.** *F- en C-functies voor  $N$  ideaal geroerde tanks in serie*

Voor het bepalen van de  $F$ - en  $C$ -functies van  $N$  tanks in serie dienen  $N$  tijdsafhankelijke massabalansen beschouwd te worden zonder een bronterm voor chemische reacties. In figuur 1.19 is de situatie geschetst.

De tanks hebben alle een gelijk volume  $V$ . Op  $t = 0$  wordt bij constant blijvende volumestroom aan de inlaat plotseling overgeschakeld van  $c = 0$  op  $c = c_0$  (stap-

methode). Om de  $F$ -functie te bepalen moet de concentratie bij de uitlaat bekend zijn, dus  $c_N(t)$ .



Figuur 1.19.

Massabalans tank 1:

$$V \frac{dc_1}{dt} = \phi_v(c_0 - c_1) \quad \text{met } c_1(0) = 0 \quad (1.76)$$

Massabalans tank  $j$ :

$$V \frac{dc_j}{dt} = \phi_v(c_{j-1} - c_j) \quad \text{met } c_j(0) = 0 \quad (1.77)$$

of:

$$\frac{dc_j}{dt} - \frac{N}{\tau} c_{j-1} + \frac{N}{\tau} c_j = 0 \quad \text{waarbij } \tau = \frac{NV}{\phi_v} \quad (1.78)$$

De oplossing van vergelijking (1.78) wordt gegeven door:

$$c_j = \exp\left(-\frac{Nt}{\tau}\right) \int_0^t \frac{N}{\tau} c_{j-1} \exp\left(\frac{Nt}{\tau}\right) dt \quad (1.79)$$

In principe is uitwerking hiervan voor een willekeurige tank in de serie niet moeilijk, maar wel bewerkelijk. De concentratie van al zijn voorgangers moet immers eerst uitgerekend worden. Vergelijking (1.79) wordt door substitutie van  $\zeta = \exp(Nt/\tau)$  en delen door  $c_0$  herschreven tot:

$$\frac{c_j}{c_0} = \frac{1}{\zeta} \int_1^{\zeta} \frac{c_{j-1}}{c_0} d\zeta \quad (1.80)$$

Uitwerking voor 1 tank is simpel:

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{1}{\zeta} \int_1^{\zeta} d\zeta = \frac{\zeta - 1}{\zeta} = 1 - \frac{1}{\zeta} \quad (1.81)$$

Voor 2 tanks is dat ook niet moeilijk:

$$\begin{aligned}\frac{c_2}{c_0} &= \frac{1}{\zeta} \int_1^{\zeta} \frac{c_1}{c_0} d\zeta = \frac{1}{\zeta} \int_1^{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta = \frac{1}{\zeta} (\zeta - 1 - \ln \zeta) \\ &= 1 - \frac{1}{\zeta} (1 + \ln \zeta)\end{aligned}\quad (1.82)$$

Voor 3 tanks is het al bewerkelijker en levert dit:

$$\begin{aligned}\frac{c_3}{c_0} &= \frac{1}{\zeta} \int_1^{\zeta} \frac{c_2}{c_0} d\zeta = \frac{1}{\zeta} \int_1^{\zeta} \left[1 - \frac{1}{\zeta} (1 + \ln \zeta)\right] d\zeta \\ &= \frac{\zeta - 1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta} \ln \zeta - \frac{1}{2\zeta} (\ln \zeta)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{\zeta} \left[1 + \ln \zeta + \frac{1}{2} (\ln \zeta)^2\right]\end{aligned}\quad (1.83)$$

Voor  $N$  tanks zet dit zich gelukkig voort en geldt:

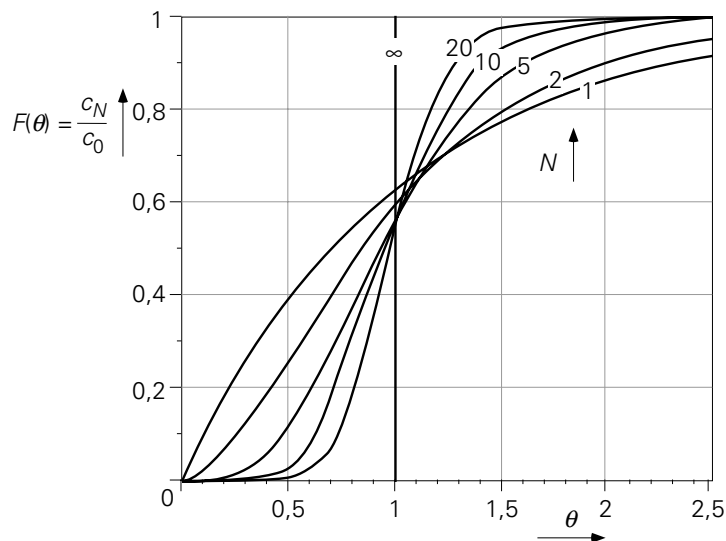
$$\frac{c_N}{c_0} = 1 - \frac{1}{\zeta} \left[1 + \ln \zeta + \frac{1}{2} (\ln \zeta)^2 + \dots + \frac{1}{(N-1)!} (\ln \zeta)^{N-1}\right] \quad (1.84)$$

De  $F$ -functie volgt door in vergelijking (1.84)  $\theta = t/\tau$  en  $\zeta = \exp(N\theta)$  te substitueren:

$$\begin{aligned}F(\theta) &= 1 - \exp(-N\theta) \cdot \\ &\quad \cdot \left[1 + N\theta + \frac{1}{2} (N\theta)^2 + \dots + \frac{1}{(N-1)!} (N\theta)^{N-1}\right]\end{aligned}\quad (1.85)$$

De  $C$ -functie volgt uit  $dF(\theta)/d\theta$ .

In figuur 1.20 staat  $F(\theta)$  uit als functie van  $\theta$ ; daaruit blijkt dat  $F(\theta)$  bij toenemende  $N$  steeds steiler gaat lopen. Bij oneindig grote  $N$  is er geen spreiding in verblijftijd meer: de  $F$ -functie wordt gelijk aan die voor een buis met propstroom. Dan moet overigens wel het volume van elke tank oneindig klein zijn, anders is de verblijftijd zelf oneindig.



Figuur 1.20.

### Samenvatting

Een propstroomreactor kan benaderd worden door een groot aantal ideaal geroerde tank reactoren in serie te plaatsen. Tegelijkertijd is de  $F$ -functie van een lange serie oneindig kleine ideaal geroerde tanks gelijk aan de  $F$ -functie van een propstroom.

## 1.3 De energiebalans

### 1.3.1 Inleiding

In § 1.2 stond massa centraal. In deze paragraaf zal de aandacht gericht worden op energie. Toch zullen we hier dezelfde techniek en hetzelfde recept gebruiken om een balans op te stellen over een controlevolume. Daarnaast vertoont een energiebalans dezelfde, vertrouwde basisvorm:

$$\frac{d}{dt} = \text{in} - \text{uit} + \text{productie}$$

Energie manifesteert zich in vele soorten die veelal zonder meer in elkaar omgezet kunnen worden, al gaat daarbij altijd wel wat energie ‘verloren’ in de vorm van nutteloze warmte. Tot op zekere hoogte is zo’n energieconversieproces net zoiets als een chemische reactie die de ene stof omzet in een of meer andere.

We zullen hoofdletters gebruiken om een hoeveelheid energie in een controlevolume aan te duiden, precies zoals we  $M$  gebruikten voor de totale massa (in kg) in een controlevolume. Hier, zullen we hoofdletters gebruiken voor de zgn. extensieve variabelen:  $E$  voor de totale energiehoeveelheid in een controlevolume,  $H$  voor de

totale enthalpie,  $U$  voor de totale hoeveelheid thermische energie,  $S$  voor totale entropie, allemaal in J.

Naar analogie met het werken met de dichtheid  $\rho$  en met componentenconcentraties  $c$ , alle in  $\text{kg/m}^3$ , in de context van massabalansen, zullen we hier met het oog op energiebalansen kleine letters gebruiken voor *energieconcentraties* zoals  $e$ ,  $h$  en  $u$ , allemaal met de eenheid J/kg. We kiezen hier uitdrukkelijk voor het werken op massabasis om effecten van druk en temperatuur op het controlevolume te omzeilen.

Onderstaande tabel geeft een overzicht van de meest voorkomende vormen van energie in termen van zulke energieconcentraties:

Vorm	Concentratie van energie (uitgedrukt per massa-eenheid)
kinetische energie	$\frac{1}{2} v^2$
potentiële energie	$gz$
inwendige energie	$u$
druk-energie	$p/\rho$
enthalpie	$h (= u + p/\rho)$

De *inwendige energie* (ook wel aangeduid met *thermische energie*) staat voor

- (i) de thermische bewegingen die de individuele moleculen uitvoeren volgens hun vrijheden van translatie, rotatie (ook inwendig) en vibratie, en
- (ii) de korte-dracht moleculaire wisselwerking tussen de moleculen onderling.

Daarmee hangt de inwendige energie ook af van de vorm en de samenstelling van de moleculen. Inwendige energie kan dus opgevat worden als een stoffeigenschap.

Bij omstandigheden van constant volume geldt  $du = c_v dT$  en wordt voor  $u$  vaak  $c_v T$  ingevuld (zie intermezzo hieronder). Voor vloeistoffen (vanwege hun geringe thermische uitzettingscoëfficiënt) geldt in goede benadering  $c_v = c_p$  en daarmee ook  $u = c_p T$ .

### Intermezzo

Volgens de eerste hoofdwet van de thermodynamica geldt (voor een systeem van constante samenstelling en massa):

$$dU = T dS - p dV$$

De entropie,  $S$ , van een systeem is op te vatten als een functie van  $\{T, V\}$ . Daarmee kan voor  $dS$  geschreven worden:

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV$$

Dus voor de verandering van de totale inwendige energie,  $U$ , kunnen we ook schrijven:

$$dU = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left[ T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - p \right] dV$$

De eerste term in het rechterlid representeert de soortelijke warmte bij constant volume, gedefinieerd als

$$c_V = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_V$$

Waarbij we overgegaan zijn van de extensieve grootte  $S$  (in J) op de specifieke entropie  $s$  (in J/kg). Voor een systeem met constant volume draagt uiteraard alleen de soortelijke warmte bij aan verandering van de specifieke inwendige energie:

$$du = c_V dT$$

Bedenk dat dit voor een systeem met constant volume een exacte uitdrukking is, ook al is de soortelijke warmte in principe een functie van bijvoorbeeld de temperatuur. In integrale vorm wordt de verandering van de inwendige energie, wederom bij constant volume, gegeven door:

$$u - u_{\text{ref}} = \int_{T_{\text{ref}}}^T c_V dT \approx c_V (T - T_{\text{ref}}) \quad \text{voor constante } V$$

De eerste gelijkheid is weer exact, terwijl bij de tweede de benadering is toegepast, dat de soortelijke warmte in eerste orde constant is als  $T$  niet te veel verschilt van de referentietemperatuur  $T_{\text{ref}}$ . Voor de inwendige energieconcentratie,  $u$ , kunnen we dus als benadering gebruiken:  $u = c_V T$ . Als er sprake is van een faseovergang, is voorzichtigheid geboden. De latente warmte ( $\Delta h$ , ook weer in J/kg) van de faseovergang moet dan ook in beschouwing worden genomen.

De  $p/\rho$ -term uit tabel 1.3 verdisconteert een soort ‘potentiële’ energie en duidt op het vermogen van een gas of vloeistof om te stromen onder invloed van drukverschillen. In termen van energie is drukenergie om te zetten in bijvoorbeeld kinetische energie: een vloeistof (of gas) gaat stromen onder invloed van drukverschillen in de vloeistof (of het gas). Van nature gaat deze stroming van de gebieden met hoge druk naar die met een lage druk.

Ook in de eerste hoofdwet van de thermodynamica is al te zien, dat druk een soort energieconcentratie is:  $dU = TdS - pdV$ . De verandering van de totale inwendige energie ( $dU$ ) van het systeem is voor een deel veroorzaakt door de arbeidsterm,  $pdV$ . Met andere woorden,  $p$  kan opgevat worden als een energieconcentratie per volume eenheid, en  $p/\rho$  dus als energieconcentratie per massa eenheid. Door gebruik te maken

van intensieve variabelen ( $T, p, \dots$ ) en extensieve variabelen ( $U, S, V, \dots$ ) kan in de thermodynamica eenvoudig afgeleid worden dat geldt:  $U = TS - PV$ . Dus voor de inwendige energie per massa-eenheid vinden we  $u \equiv \frac{U}{M} = Ts - \frac{p}{\rho}$ , waarmee

bovenstaande interpretatie van  $p/\rho$  bevestigd wordt.

De totale energie van een systeem is in veel gevallen de som van de inwendige, potentiële en kinetische energie. In termen van energieconcentraties kunnen we dan definiëren

$$e \equiv u + gz + \frac{1}{2}v^2 \quad (1.86)$$

Bedenk dat de energieconcentraties bepaald zijn ten opzichte van een geschikt gekozen referentieniveau. Bij balansen gaat het echter doorgaans om *veranderingen* in energieconcentraties; referentieniveaus doen er dan niet toe. Wel moet men dan bedacht zijn op faseovergangen en de daarmee samenhangende energie- of enthalpieveranderingen  $\Delta h$  (in J/kg). Verder worden alle energieconcentraties in vergelijking (1.86) bij voorkeur uitgedrukt in de eenheid J/kg; dat geldt ook voor de kinetische en potentiële energie.

In de meeste toepassingen van ‘Transportverschijnselen’ is bovenstaande definitie van  $e$  afdoende. Waar chemische reacties een rol spelen, moet evenwel ook de *chemische enthalpie* (vaak in J/mol) beschouwd worden die de opbouw van een molecuul uit zijn atomen en de bijbehorende interacties van kern en elektronen in rekening brengt. Zo komt bij verbranding van methaan chemische enthalpie vrij in de vorm van warmte: de energie ‘opgeslagen’ in een mol  $\text{CH}_4$  komt beschikbaar, daar de producten  $\text{CO}_2$  en  $\text{H}_2\text{O}$  energetisch gezien lager op de energieladder staan. Ofschoon in chemische reactoren chemische-enthalpieveranderingen vaak dominant zijn, zal deze energievorm hier verder buiten beschouwing blijven.

Een ander begrip dient hier geïntroduceerd te worden: *energiedissipatie*. Dissipatie staat voor de bevinding dat de omzetting van de ene energievorm naar de andere van nature altijd in één richting verloopt. De nuttige vormen, zoals kinetische, potentiële en (voor een deel, zie verderop) druk-energie, eindigen uiteindelijk allemaal als inwendige energie. Algemener gezegd: dissipatie is het omzetten van (voor ons mensen meestal nuttige) ‘mechanische energie’ naar ‘thermische energie’ (dat wil zeggen naar chaotische kinetische energie van individuele moleculen). Het mechanisme voor dissipatie is *wrijving*.

#### **Voorbeeld 1.9.** *De stuitende bal*

Als een tennisbal van een zekere hoogte boven de vloer losgelaten wordt, verliest de bal potentiële energie op zijn weg naar beneden en wint kinetische energie. Tegelijkertijd wordt er een beetje energie van de bal over gedragen naar de lucht,



die ook gaat stromen en dus kinetische energie verkrijgt. Bovendien wordt energie gedissipeerd ten gevolge van wrijving met de omringende lucht. Bij de ‘botsing’ met de vloer wordt de kinetische energie omgezet in ‘elastische energie’ en er wordt een deel gedissipeerd.

Na de stuit is de elastische energie weer omgezet in kinetische energie die op haar beurt weer overgaat in potentiële energie (en weer voor een klein deel in de lucht ‘verdwijnt’) totdat alle kinetische energie op is en de bal zijn nieuwe ‘hoogste’ punt bereikt. Uiteraard herhaalt de cyclus zich nog enkele keren voordat de bal uiteindelijk stil op de vloer ligt en alle kinetische en potentiële energie gedissipeerd is.

⑤

### **Samenvatting**

Er zijn vele energiesoorten die allemaal in elkaar omgezet kunnen worden. De focus was hier op de inwendige, of thermische, energie  $u$  en op de druk-energie  $p/\rho$ . De fysische achtergronden van deze twee ‘types’ energie zijn besproken. Ook het concept ‘energiedissipatie’ is aan de orde gekomen: het eenrichtingsverkeer waarbij mechanische energie omgezet wordt in thermische energie (warmte) door wrijving. Ter voorbereiding op het opstellen van energiebalansen is het concept ‘energieconcentratie’ ingevoerd en is ook de specifieke totale-energieconcentratie gedefinieerd:  $e = u + \frac{1}{2}v^2 + gz$ .

We gebruiken kleine letters voor energieconcentraties (in J/kg), terwijl hoofdletters staan voor extensieve grootheden (in J).

### **1.3.2 De totale-energiebalans**

Energie is een *behouden grootheid*, net als massa. Dit is een belangrijk uitgangspunt in de natuurkunde. Voor de balansvergelijking betekent dit, dat de productieterm identiek aan nul is, mits echt de totale energie beschouwd wordt – dus inclusief soorten energie (chemische, elektrische, nucleaire ...) die niet opgenomen zijn in vergelijking (1.86). Als we dus de totale energie van een systeem met gegeven volume beschouwen, kan de energie-inhoud enkel veranderen door in- of uitstroom van energie over de grensvlakken van dit volume heen:

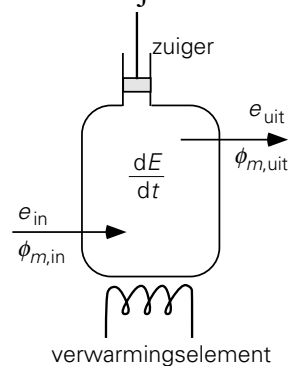
$$\frac{dE}{dt} = \text{energiestroom in} - \text{energiestroom uit}$$

Er is dus geen productieterm in deze vergelijking opgenomen, omdat energie niet uit het niets geproduceerd kan worden. Bovenstaande vergelijking is, geheel vergelijkbaar met vergelijking (1.3) voor massa, een *behoudswet*.

Bij het opstellen van een energiebalans voor een specifieke energiesoort (of een combinatie van soorten) is het belangrijk om niet alleen het transport van de gekozen energiesoort in rekening te brengen zoals in de energiebehoudswet hierboven, maar ook de omzetting (de productie) van de gekozen soort naar andere soorten (en vice versa) op te nemen in de balans. De algemene vorm van een balans voor een specifieke energiesoort heeft weer dezelfde structuur als de massabalans voor een specifieke component, vergelijking (1.5):

$$\frac{d}{dt} = \text{stroom in} - \text{stroom uit} + \text{productie} \quad (1.87)$$

Vanaf nu zullen we ons concentreren op de totale energie van een systeem gedefinieerd als de som van de inwendige, de potentiële en de kinetische energie:  $E = U + E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$ , met bijbehorende energieconcentratie  $e = u + gz + \frac{1}{2}v^2$ . In figuur 1.21 is een controlevolume geschetst met de bijbehorende mogelijke energiestromen.



Figuur 1.21.

De instationaire term van het linkerlid van de totale-energiebalans die aangeeft hoe snel de totale energie in het controlevolume  $V$  verandert, is:

$$\frac{d}{dt} E$$

Deze term is met behulp van de energieconcentratie  $e$  (per massa-eenheid) te schrijven als

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (\rho V e) \quad (1.88)$$

Er zijn nu meerdere vormen van *energiestromen* mogelijk:

- Een energiestroom doordat er *massa* het controlevolume in (of uit) stroomt. Deze massa bezit zelf al energie. De massastroom draagt de energie als het ware “onder zijn arm” mee. Analoog aan de transporttermen ‘in’ en ‘uit’ van component A in de vergelijkingen (1.9) en (1.10) schrijven we de transporttermen ‘in’ en ‘uit’ van

energie (in J/s) ook als het product van een debiet en een concentratie, nl. als massadebiet (in kg/s) maal energieconcentratie (J/kg):

$$\phi_{m,\text{in}} \cdot e_{\text{in}} \quad \text{en} \quad \phi_{m,\text{uit}} \cdot e_{\text{uit}}$$

- Een energiestroom doordat er *warmte* (bijvoorbeeld via een verwarmingselement) het controlevolume instroomt (of uitstroomt met behulp van een koelelement). Met deze energiestroom is geen massastroom gemoeid. We noteren deze stroom met

$$\phi_q$$

- Een energiestroom, ook weer over de randen van het controlevolume heen, als gevolg van *arbeid* verricht per tijdseenheid door of op de ‘buitenwereld’. Die arbeid kan van buitenaf verricht worden op het controlevolume door middel van een zuiger, roeder, pomp of compressor, dus via zuigerstangen of draaiende assen. Ook kan arbeid verricht door de buitenwereld op het controlevolume doordat een massastroom over een van de oppervlakken van het controlevolume naar binnen stroomt tegen de daar heersende druk in.

Omgekeerd kan er vanuit het controlevolume ook arbeid verricht worden op de buitenwereld, door middel van een zuiger of een turbine (die uiteindelijk bijvoorbeeld een maalmachine aandrijft of via een dynamo elektrische stroom levert) of door een massastroom die door een van de oppervlakken van het controlevolume naar buiten stroomt tegen de buitendruk in. De totale (netto) ‘stroom’ als gevolg van *arbeid* (op en/of vanuit het controlevolume) wordt genoteerd als

$$W \quad (\text{van ‘Work’})$$

Tenslotte is er nog *energieproductie* (per tijdseenheid)  $P_e$  in het inwendige van  $V$  mogelijk. Dan kan het bijvoorbeeld gaan om warmteproductie zoals in een chemische reactor als gevolg van een exotherme chemische reactie of in een metalen draad ten gevolge van een elektrische stroom. Eigenlijk is de aanwezigheid van de productieterm  $P_e$  het gevolg van de zelfgekozen beperking dat  $E$  niet alle vormen van energie bevat, maar slechts de inwendige, potentiële en kinetische energie. Zonder die beperking zou er immers geen productieterm zijn: het is onmogelijk om energie uit het niets te produceren. *Energie is immers een behouden grootheid*. Als we ons vanaf nu beperken tot alleen de energiesoorten genoemd in de tabel aan het begin van dit hoofdstuk, dan is de productieterm  $P_e$  in de energiebalans gelijk aan nul.

Door de bovenstaande uitdrukkingen voor de verschillende bijdragen te substitueren in vergelijking (1.87) komen we tot de algemene vorm van de totale-energiebalans

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (\rho V e) = \phi_{m,\text{in}} \cdot e_{\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} \cdot e_{\text{uit}} + \phi_q + W \quad (1.89)$$

Verder is het handig om de energiestroom als gevolg van arbeid,  $W$ , op te splitsen in twee delen:

- een deel  $\phi_w$  dat staat voor de arbeid als gevolg van de werking van zuigers, roerders, pompen, compressoren en/of turbines, en
- een deel dat te maken heeft met massastromen die het controlevolume in- en/of uitstromen en dan arbeid verricht tegen de ter plaatse heersende druk:

Als er een ‘pakketje’ fluïdum met een snelheid  $v$  in een tijdsinterval  $dt$  door een oppervlak  $A$  het controlevolume instroomt, dan werkt er gedurende  $dt$  een kracht  $p \cdot A$  op het pakketje, dat zelf in dat tijdsinterval zich over een afstand  $dx = v \cdot dt$  verplaatst. Hiermee is dus een hoeveelheid energie  $dE = F \cdot dx = pA \cdot vdt$  gemoeid. In de balans hebben we de energie *per tijdseenheid* nodig (d.w.z. het vermogen) en die is juist gelijk aan  $pA \cdot v$ , ofwel aan  $\phi_v \cdot p = \phi_m \cdot p/\rho$ .

Deze opsplitsing van  $W$  in twee soorten arbeid leidt tot drie termen in de totale-energiebalans, vergelijking (1.89):

$$W = \phi_w + \left[ \phi_{m,\text{in}} \frac{p}{\rho} \Big|_{\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} \frac{p}{\rho} \Big|_{\text{uit}} \right] \quad (1.90)$$

Daarmee is vervolgens vergelijking (1.89) te herschrijven tot

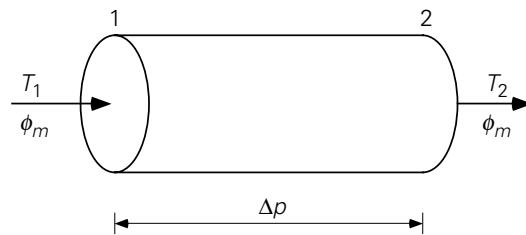
$$\frac{d\rho eV}{dt} = \phi_{m,\text{in}} \left( e + \frac{p}{\rho} \right)_{\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} \left( e + \frac{p}{\rho} \right)_{\text{uit}} + \phi_q + \phi_w \quad (1.91)$$

De arbeid (per tijdseenheid),  $\phi_w$ , is nu dus enkel arbeid verricht door de buitenwereld als gevolg van mechanische apparaten zoals turbines en pompen.

In veel gevallen, vooral als de druk in het beschouwde systeem (in een goede benadering) als constant beschouwd mag worden en zeker als faseovergangen aan de orde zijn met hun bijbehorende dichtheidsveranderingen en verrichte arbeid, is het handig en verstandig te werken in termen van de specifieke *enthalpie*  $h = u + p/\rho$  in de ‘in’ en ‘uit’ stromen (alle grootheden in J/kg).

#### **Voorbeeld 1.10.** *Transport van water door een buis*

Er gaat een constante stroom water door een horizontale cilindrische buis (zie figuur 1.22) ten gevolge van een aangelegd drukverschil. Dit drukverschil bedraagt 2 bar (=  $2 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>) en het massadebiet 1 kg/s. De buis heeft een (constante) diameter  $D$  van 2 cm en is goed geïsoleerd. Het water heeft een dichtheid  $\rho$  van  $10^3$  kg/m<sup>3</sup>, een soortelijke warmte bij constant volume  $c_v$  van 4,2 kJ/kg·K en mag, zoals gewoonlijk bij dit soort condities, niet-samendrukbaar worden verondersteld.



Figuur 1.22.

Beantwoord de volgende vragen:

- Geef de energiebalans en bereken de temperatuurstijging van het water.
- Welk vermogen moet een pomp hebben om deze temperatuurstijging te kunnen veroorzaken?

Beschouw een controlevolume dat zich uitstrekt van een punt, aangeduid als punt 1, juist stroomafwaarts van de pomp, tot punt 2 aan het open uiteinde van de pijp (zie figuur 1.22). Stel over dit controlevolume een massabalans en een (totale) energiebalans op. Aangezien er sprake is van een stationaire toestand, geldt:

$$\phi_{m,\text{in}} = \phi_{m,\text{uit}} = \phi_m \quad \text{en} \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

Voorts is  $\phi_w = 0$  (geen pomp) en  $\phi_q = 0$  (geen uitwisseling van warmte tussen pijp en omgeving). De energiebalans over de gehele buis luidt daarmee:

$$0 = \phi_m \left[ u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 - \left( u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 \right) \right] \quad (1.92)$$

Vergelijking (1.92) wordt veel eenvoudiger wanneer:  $z_1 = z_2$  (horizontale buis),  $\rho_1 = \rho_2$  (water niet-samendrukbaar) en  $v_1 = v_2$  (mits de doorsnede van de buis en de dichtheid  $\rho$  van het water constant zijn).

De energiebalans wordt daarmee:

$$u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \quad (1.93)$$

Vanwege het opgelegde drukverschil  $p_1 - p_2 > 0$ , volgt  $u_1 < u_2$ . Met andere woorden: *druk-energie wordt omgezet in inwendige energie*. Zoals we gezien hebben, geldt volgens de thermodynamica bij constante  $\rho$  bij benadering:

$$u_1 - u_2 = c_v(T_1 - T_2) \quad (1.94)$$

Uit de vergelijkingen (1.93) en (1.94) volgt dan

$$T_2 - T_1 = \frac{p_1 - p_2}{\rho c_v} \quad (1.95)$$

Invullen van de numerieke gegevens levert een nutteloze temperatuurstijging van 0,048 K op!

De temperatuurstijging van het water is daarmee een voorbeeld van dissipatie van mechanische energie. De pomp die het water aan het begin van de buis op de hogere druk brengt, moet deze energie (per massa-eenheid) leveren. Een steady-state energiebalans over een ideale pomp<sup>1</sup> in het geval van een incompressibele vloeistof luidt:

$$0 = \phi_m \left( \frac{p_0}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right) + \phi_w \quad (1.96)$$

Als het water alleen dankzij de pomp door de buis stroomt en de aanzuigleiding heel kort is, dan is de druk  $p_0$  vlak voor de pomp gelijk aan de druk aan het einde van de buis:  $p_0 = p_2$ . Met dit gegeven volgt:

$$\phi_w = \phi_m \frac{p_1 - p_2}{\rho} = 1 \cdot \frac{2 \cdot 10^5}{10^3} = 200 \text{ W} \quad (1.97)$$

Dit resultaat is uiteraard gelijk aan  $\phi_m (u_2 - u_1)$ : het vermogen dat de pomp levert wordt uiteindelijk teruggevonden als inwendige energie.

◻

### Voorbeeld 1.11. *Compressie van een gas*

Lucht wordt met behulp van een compressor (een ‘luchtpomp’, zie figuur 1.23) bij stationaire condities gecomprimeerd van 1 bar tot 5 bar. Het vermogens-verbruik van de compressor is  $6 \cdot 10^3$  W. De massastroom door de compressor is 108 kg/h en de in- en uitlaatleiding hebben beide een diameter van 5 cm. De kamertemperatuur bedraagt 20 °C.

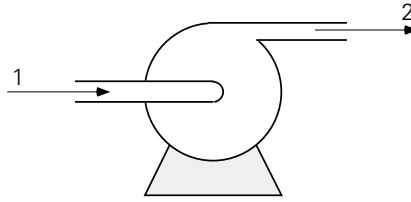
Hoe heet is het gas dat de compressor verlaat?

Vanwege de stationaire toestand in het controlevolume (= de compressor, zie figuur 1.23) zijn  $dM/dt$  en  $dE/dt$  beide gelijk aan nul.

Uit de massabalans volgt:

$$\phi_{m,1} = \phi_{m,2} = \phi_m \quad (1.98)$$

<sup>1</sup> Een ideale pomp brengt vloeistof enkel op een hogere druk zonder warmteontwikkeling binnen de pomp; veronderstel verder  $v_1 = v_2$



Figuur 1.23.

Als we veronderstellen dat de compressor geen warmte via de wand direct aan de omgevingslucht afgeeft (dus  $\phi_q = 0$ ), dan luidt de energiebalans:

$$0 = \phi_m \left[ u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 - \left( u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 \right) \right] + \phi_w \quad (1.99)$$

$v_1$  en  $v_2$  kunnen uitgedrukt worden in  $\phi_m$ , de lokale dichtheden  $\rho_1$  en  $\rho_2$ , en de doorsnede  $A$  ( $= \pi D^2/4$ ) van de in- en uitlaat:

$$v_1 = \frac{\phi_m}{A} \frac{1}{\rho_1} \quad \text{en} \quad v_2 = \frac{\phi_m}{A} \frac{1}{\rho_2} \quad (1.100)$$

Lucht mag onder deze omstandigheden als ideaal gas beschouwd worden:

$$p = \rho \frac{RT}{M} \quad (1.101)$$

$$u = \frac{5}{2} \frac{RT}{M} = \frac{5}{2} \frac{p}{\rho}$$

Deze laatste gelijkheid vindt zijn oorsprong in de statistische fysica. Bij temperaturen die niet extreem hoog zijn, d.w.z. waarbij de vibraties binnen moleculen nog niet een grote rol spelen, heeft elk twee-atomig molecuul, zoals de zuurstof- en stikstofmoleculen in lucht, vijf vrijheidsgraden – drie voor translatie en twee voor rotatie. Volgens het equipartitie-theorema is met elke vrijheidsgraad een energie van  $\frac{1}{2} RT$  per mol gemoeid, ofwel  $\frac{1}{2} RT/M$  per kg.

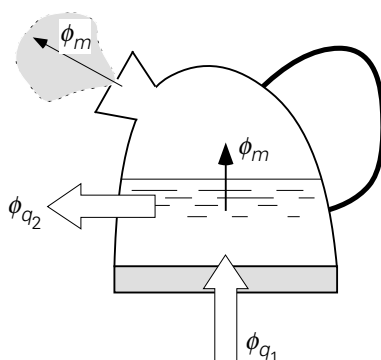
De energiebalans wordt nu na enig invulwerk:

$$0 = \phi_m \left[ \frac{7}{2} \left( \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\phi_m}{A} \right)^2 \left( \frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \right] - \phi_w \quad (1.102)$$

Invullen van de numerieke gegevens levert:  $\rho_1 = 1,19 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_2 = 3,54 \text{ kg/m}^3$ ,  $T_2 = 492 \text{ K}$  en  $\Delta T = 199 \text{ K}$ ! In de praktijk wordt de uitgaande gasstroom daarom veelal gekoeld – dat impliceert ook weer energiedissipatie!

**Voorbeeld 1.12. De fluitketel**

In dit voorbeeld zal de balansentechniek gebruikt worden om een elementaire beschrijving te ontwikkelen van het opwarmen en laten koken van water in een fluitketel. Bekijk hiertoe de fluitketel in figuur 1.24 en veronderstel dat het opwarmen geschiedt door een constante  $\phi_{q_1}$ . Voor de eenvoud wordt verder verondersteld dat het warmteverlies naar de omgeving ( $\phi_{q_2}$ ) ook constant is. Het opwarmen van de ketel zelf laten we voor het gemak buiten beschouwing.



Figuur 1.24.

Beschouw eerst de situatie van het opwarmen van het water (het water kookt nog niet). Onder deze omstandigheden kan de verdamping wel verwaarloosd worden; afhankelijk van de watertemperatuur maken we daarmee slechts een kleine fout. We nemen de inhoud van de fluitketel als controlevolume en kijken dan alleen naar de vloeistof en laten de waterdamp dus buiten beschouwing. (Overigens zijn de massa van alle water in de fluitketel, dus inclusief de waterdamp in de ruimte boven de vloeistof, en de massa van de vloeistof nagenoeg aan elkaar gelijk.) Daarmee wordt de massabalans voor het water (aangeduid door subscript  $l$  van ‘liquid’):

$$\frac{d}{dt}M_l = 0 \quad (1.103)$$

De energiebalans luidt, dankzij  $c_v = c_p$  voor een niet-samendrukbare vloeistof en mits  $c_p$  onafhankelijk is van de temperatuur:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(M_l c_p T) = M_l c_p \frac{dT}{dt} = \phi_{q_1} - \phi_{q_2} \quad (1.104)$$

Met andere woorden: de watertemperatuur stijgt met een constante snelheid:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\phi_{q_1} - \phi_{q_2}}{M_l c_p} \quad (1.105)$$

Met  $T = T_0$  op  $t = 0$  resulteert bovenstaande differentiaalvergelijking in een uitdrukking voor de vloeistoftemperatuur als functie van de tijd



$$T = T_0 + \frac{\phi_{q1} - \phi_{q2}}{M_l c_p} t \quad (1.106)$$

Beschouw vervolgens de situatie dat het water kookt. Er is nu wel een substantiële massastroom (voornamelijk waterdamp) de fluitketel uit die we nu echt niet meer kunnen verwaarlozen. Dat impliceert dat we ook de hoeveelheid (massa) waterdamp in de ruimte boven de vloeistof beter niet meer kunnen verwaarlozen. De massabalans over het controlevolume, nl. de inhoud van de fluitketel, wordt dan (met subscript  $v$  voor ‘vapour’, de dampfase):

$$\frac{dM_l}{dt} + \frac{dM_v}{dt} = 0 - \phi_m = -\phi_m \quad (1.107)$$

Ook als  $M_v$  wel verwaarloosd zou worden, blijft er in vergelijking (1.107) een zinnig resultaat over, omdat het niet onredelijk is te veronderstellen dat tijdens het koken op korte termijn de hoeveelheid waterdamp in de fluitketel constant blijft: er verlaat op elk moment evenveel waterdamp de fluitketel als er vloeibaar water in damp overgaat.

Overigens gaat die vloeistof-damp overgang gepaard met een volumeverandering. De gevormde damp moet dus arbeid op de omgeving (de buitenlucht) uitoefenen, terwijl de druk in de fluitketel constant blijft. Deze overwegingen spelen een rol als we de energiehuishouding van het koken willen analyseren. Wederom bedienen we ons hierbij van wat bekend is uit de thermodynamica. Voor een gesloten systeem, d.i. een systeem zonder massastromen in en/of uit, weten we uit de thermodynamica:

$$\delta Q = dU + p dV \quad (1.108)$$

In plaats van te werken met de inwendige energie,  $U$ , kunnen we ook de enthalpie,  $H$ , gebruiken:

$$H \equiv U + pV \quad (1.109)$$

Hiermee is behoud van energie te schrijven als:

$$\delta Q = dH - V dp \quad (1.110)$$

We zien dus dat, voor een processen bij constant volume ( $dV = 0$ ) en constante druk ( $dp = 0$ ), enthalpie een heel handige grootte is vanwege  $dU/dt = dH/dt$ . Dit geldt te meer omdat in de rechterkant van de vergelijking (1.91) de enthalpie toch ook al voorkomt in de in- en uittermen (als gevolg van massastromen in en uit). Voor het kookproces in het fluitketeltje (een open systeem, vanwege de uitgaande stroom waterdamp) komen we op basis van vergelijking (1.91) en met  $\phi_w = 0$  tot de

volgende enthalpiebalans voor de totale inhoud van het fluitketeltje (vloeistof plus dampfase):

$$\frac{dH}{dt} = \phi_{m,\text{in}} h_{\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} h_{\text{uit}} + \phi_q \quad (1.111)$$

In vergelijking (1.111) zijn weer alle effecten van kinetische en potentiële energie verwaarloosd – zowel in de  $d/dt$ -term aan de linkerkant als in de in- en uitgaande massastromen aan de rechterkant van de vergelijking – omdat deze erg klein zijn ten opzichte van de verschillende enthalpietermen. Voor de totale enthalpie in het controlevolume kunnen we schrijven:

$$H = h_l M_l + h_v M_v \quad (1.112)$$

Tenslotte, de ingaande massastroom is nul en de uitgaande enthalpie is  $h_v$ . Omdat zowel druk als temperatuur constant zijn bij het koken zijn de enthalpieconcentraties,  $h_l$  en  $h_v$ , ook constant. Dus kan voor vergelijking (1.111) geschreven worden:

$$h_l \frac{dM_l}{dt} + h_v \frac{dM_v}{dt} = -\phi_m h_v + \phi_{q_1} - \phi_{q_2} \quad (1.113)$$

Combineren van de vergelijkingen (1.107) en (1.113), en gebruik maken van de notatie  $\Delta h_v = h_v - h_l$  voor de verdampingsenthalpie (in kJ/kg) resulteert in

$$-\frac{dM_l}{dt} \Delta h_v = \phi_{q_1} - \phi_{q_2} \quad (1.114)$$

Uitgaande van de oorspronkelijke vloeistofmassa  $M_{l0}$  in de fluitketel wordt de uitdrukking voor  $M_l$  als functie van de tijd

$$M_l = M_{l0} - \frac{\phi_{q_1} - \phi_{q_2}}{\Delta h_v} t \quad (1.115)$$

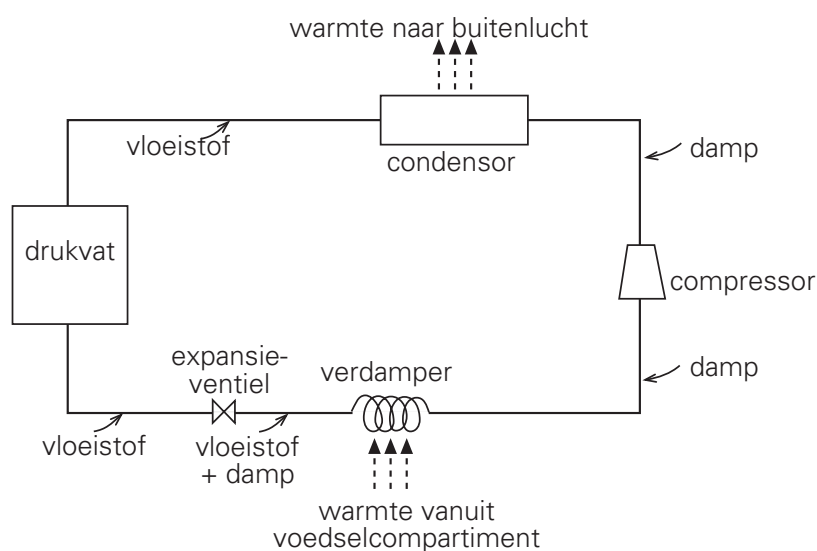
Met andere woorden: het toevoeren van warmte aan een ketel kokend water zorgt – niet verrassend – enkel voor vermindering van de watermassa door de faseovergang bij het constante atmosferische kookpunt bij constante atmosferische druk (als we de heel kleine, overigens constante drukval over de uitstroomopening verwaarlozen): dit resulteert (met name omdat we kinetische en potentiële energiebijdragen verwaarlozen) in de afvoer van waterdamp via het uitstroomdebiet  $\phi_m$ .

Besef wel dat we in de gehele analyse de warmtecapaciteit van de fluitketel zelf buiten beschouwing hebben gelaten.

**Voorbeeld 1.13.** *De koelkast*

De lucht in het voedselcompartiment van een koelkast wordt gekoeld met behulp van een koelmiddel (gewoonlijk een freon) dat in een gesloten circuit circuleert. Dat koelen lukt alleen als het koelmiddel in de warmtewisselaar op een lagere temperatuur is dan de lucht in het voedselcompartiment. Het koelmiddel onttrekt warmte aan het voedselcompartiment en staat deze weer af aan de buitenlucht, en doet dit met behulp van faseovergangen (verdampen, condenseren): voorwaar een complex transportproces.

Het koelcircuit (zie figuur 1.25) bestaat uit vijf essentiële componenten. De eerste component is een drukvat (ook wel aangeduid als het vloeistofvat) waarin het koelmiddel een vloeistof is als gevolg van een hoge druk en temperatuur (bijvoorbeeld, 7 bar en 30°C). De vloeistof passeert dan een expansieventiel: stroomafwaarts van dat ventiel is de druk lager (bijvoorbeeld 1,8 bar) en als gevolg daarvan verdampt ('flasht') een deel van de vloeistof instantaan door afkoeling tot het kookpunt (-15°C) bij die lagere druk. Het resulterende damp-vloeistof mengsel stroomt dan door de warmtewisselaar (of verdamper) die zich in het te koelen voedselcompartiment bevindt. Door warmte te onttrekken aan de lucht in dat voedselcompartiment zal het resterende vloeibare koelmiddel ook verdampen, nog steeds bij de lagere temperatuur en bijbehorend kookpunt. Het koude koelmiddel uit de verdamper wordt vervolgens door een compressor weer op de oorspronkelijke, hoge druk gebracht; in deze compressiestap stijgt uiteraard ook de temperatuur, bijvoorbeeld tot 45°C. De dan warme damp staat vervolgens in een warmtewisselaar of condensor (buiten de koelkast, aan de achterkant) warmte af aan de omgevingslucht zodat de damp weer condenseert en als vloeistof wordt teruggevoerd aan het drukvat.



Figuur 1.25.

Laat ons nu meer in detail kijken naar het expansieventiel en een energiebalans opstellen voor dat ventiel in een stationaire situatie. Het ventiel is een passieve component (d.w.z. dat er geen arbeid  $\phi_w$  wordt verricht) en we zullen warmte-uitwisseling met de omgeving verwaarlozen ( $\phi_q = 0$ ). Dit betekent dat vergelijking (1.91) reduceert tot

$$0 = \phi_{m,\text{in}} \left( e + \frac{p}{\rho} \right)_{\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} \left( e + \frac{p}{\rho} \right)_{\text{uit}} \quad (1.116)$$

Voor het ventiel geldt uiteraard  $\phi_{m,\text{in}} = \phi_{m,\text{uit}}$ . Aangezien hier een faseovergang aan de orde is, met een behoorlijke verandering in dichtheid en met bijbehorende expansiearbeid, is een beschrijving in termen van enthalpie vereist. Dan leidt vergelijking (1.116) tot

$$0 = \left( h + \frac{1}{2}v^2 + gz \right)_{\text{in}} - \left( h + \frac{1}{2}v^2 + gz \right)_{\text{uit}} \quad (1.117)$$

Als resultaat van het verdampingsproces dient het damp-vloeistof mengsel uit het ventiel met zijn lagere (mengsel)dichtheid een hogere snelheid te hebben dan het vloeibare koelmiddel naar het ventiel (om te voldoen aan bovenstaande massabalans). De resulterende toename in kinetische energie is echter nog steeds klein vergeleken met de enthalpie van het inkomende vloeibare koelmiddel en met de verdampingsenthalpie. Verwaarlozing van de veranderingen in kinetische en potentiële energie – precies zoals in het vorige voorbeeld – versimpelt vergelijking (1.117) tot

$$h_{l,\text{in}} = \left[ x h_v + (1-x) h_l \right]_{\text{uit}} \quad (1.118)$$

waarin  $x$  staat voor de fractie van het koelmiddel dat is verdampt – subscript  $v$  en  $l$  staan voor respectievelijk damp en vloeistof. Door enthalpie data van het koelmiddel in kwestie bij de vigerende temperaturen en drukken op te zoeken in tabellen met thermodynamische eigenschappen kan deze fractie  $x$  berekend worden; in bovenstaand geval bedraagt  $x$  ongeveer 27%.

5

### Samenvatting

In principe heeft een totale-energiebalans over een controlevolume dezelfde basisvorm als een componentenmassabalans, en omvat transport- en productietermen. Bij het opstellen van een totale-energiebalans moeten alle drie de types energie (interne of thermische, kinetische, en potentiële energie) meegenomen worden:

$$e = u + \frac{1}{2}v^2 + gz$$

Uiteraard is er het convectieve transport van energie door massastromen het controlevolume in en uit. Ook de *enthalpie*  $h = u + p/\rho$  speelt een rol bij energiebalansen, zowel bij de massastromen in en uit als wanneer een faseovergang aan de orde is. Verder kan er arbeid door of op de buitenwereld verricht worden, en kan er warmte uitgewisseld worden met de omgeving – allemaal effecten die in een energiebalans thuishoren.

Middels een energiebalans kunnen omzettingen van het ene type energie in een of meer andere gemakkelijk worden aangetoond en in rekening gebracht. De algemene vorm van een totale-energiebalans luidt:

$$\frac{d\rho V e}{dt} = \phi_{m,\text{in}} \left( e + \frac{p}{\rho} \right)_{\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} \left( e + \frac{p}{\rho} \right)_{\text{uit}} + \phi_q + \phi_w$$

Het concept van dissipatie van mechanische energie in warmte middels wrijving is met behulp van een aantal voorbeelden geïllustreerd.

### 1.3.3 De thermische-energiebalans

Tot nu toe is de totale energie beschouwd, maar soms is het handiger enkel naar een specifieke vorm van energie te kijken, bijvoorbeeld de thermische of inwendige energie  $U$ . De balans voor  $U$  luidt:

$$\frac{d}{dt} U = \frac{d}{dt} (\rho V u) = \phi_{m,\text{in}} \cdot u_{\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} \cdot u_{\text{uit}} + \phi_q + P_u \quad (1.119)$$

Het linkerlid van de vergelijking representeert, zoals gebruikelijk, de verandering in de tijd van de inwendige energie  $U$  in het controlevolume. De eerste twee termen van het rechterlid zijn het verschil tussen in- en uitstroom van inwendige energie door

massastromen. De derde term brengt de netto warmtestroom die het volume in- of uitgaat in rekening. Tenslotte staat de laatste term  $P_u$  voor productie van inwendige (thermische) energie binnen in het controlevolume ten gevolge van *dissipatie* (wrijvingseffecten) en voor productie van inwendige energie door *arbeid* die op het systeem verricht wordt.

Bedenk dat zuigers, pompen, compressoren en turbines geen thermische energie toevoeren en/of onttrekken aan het controlevolume, maar ‘mechanische’ energie: een term als gevolg van de actie van zuigers, pompen, compressoren en turbines hoort dus niet thuis in een thermische-energiebalans. Let wel: thermische energie is zeker *geen* behouden grootheid. Balansvergelijking (1.119) is dus ook zeker geen *behoudswet*. De vraag is nu een uitdrukking te vinden voor de productieterm  $P_u$ .

Beschouw daartoe nog eens de totale-energiebalans, vergelijking (1.91) of, voor een stationaire situatie, vergelijking (1.92), waarin onder meer de termen  $\phi_m \cdot [u + p/\rho]_{\text{in}}$  en  $\phi_m \cdot [u + p/\rho]_{\text{uit}}$  voorkomen. Deze termen staan voor de enthalpie-afname van ingang naar uitgang. Voor deze enthalpie-afname geldt:

$$dh = du + p \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} \cdot dp \quad (1.120)$$

De eerste twee termen aan de rechterkant hebben met warmte te maken en dienen expliciet in een thermische-energiebalans voor te komen: volgens de Eerste Hoofdwet van de thermodynamica geldt, geformuleerd op massabasis, immers

$$\delta Q = du + p \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (1.121)$$

waarin  $\delta Q$  staat voor de verandering van de warmte-inhoud (per kg). Uit deze hoofdwet is het duidelijk dat arbeid bij constante druk en onder adiabatische condities verricht op het systeem effect heeft op de inwendige energie van het systeem. Bedenk wel dat vergelijking (1.121) betrekking heeft op een *reversibel proces*: de bewegings-energie van de moleculen kan gebruikt worden om deze dichter bij elkaar te brengen, en vice versa.

Vanwege vergelijking (1.121) dient in een thermische-energiebalans zoals vergelijking (1.119) naast de term  $\phi_m \cdot du$  dus ook de term  $\phi_m \cdot p d(1/\rho)$  expliciet voor te komen. Die term is dus het gevolg van het verschil in dichtheid van ingaande en uitgaande massastromen. Op een soortgelijke manier als bij de opsplitsing van de energieproductie  $W$  als gevolg van arbeid in de aanloop naar vergelijking (1.90), halen we in vergelijking (1.119) nu de *reversibele* arbeidsterm  $\phi_m \cdot p d(1/\rho)$  uit de productieterm  $P_u$  en schrijven deze bij de stromen in en uit. Wat overblijft van  $P_u$  is een *irreversibele* energie-omzetting: de *dissipatie* van mechanische energie in warmte

ten gevolge van wrijving binnen het controlevolume. Deze wrijving, dus productie van thermische energie (warmte), is het gevolg van de weerstand die er binnen het controlevolume geboden wordt aan de stroming *van ingang naar uitgang* en is dus evenredig met het (massa)debiet. Voor deze dissipatieterm schrijven we daarom  $\phi_m e_{diss}$  waarin

$e_{diss} \equiv$  de hoeveelheid mechanische energie die per eenheid van massa irreversibel omgezet wordt in thermische energie (warmte).

Voor een stationaire situatie, waarin uiteraard de in- en uitgaande massastromen gelijk zijn ( $\phi_{m,in} = \phi_{m,uit} = \phi_m$ ), kan vergelijking (1.119) dan herschreven worden naar de vorm

$$0 = \phi_m \left[ u_{in} - u_{uit} - \int_{in}^{uit} p \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] + \phi_q + \phi_m e_{diss} \quad (1.122)$$

die wel de stationaire *thermische energiebalans* of de stationaire *warmtebalans* wordt genoemd.

Bovenstaande afleiding van de stationaire thermische-energiebalans, met de discussie over enthalpieveranderingen, illustreert hoe zorgvuldig met de productieterm in een balans moet worden omgegaan, wanneer, zoals bij thermische energie, de betrokken grootte *niet behouden* blijft.

### **Samenvatting**

Analoog aan de totale-energiebalans is ook een thermische-energiebalans op te stellen. Met behulp van de Eerste Hoofdwet van de thermodynamica is de productie van inwendige energie te splitsen in een reversibel arbeidsdeel en een irreversibel deel, de dissipatie. Daarmee luidt de stationaire inwendige-energiebalans

$$0 = \phi_m \left[ u_{in} - u_{uit} - \int_{in}^{uit} p \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] + \phi_q + \phi_m e_{diss}$$

en sluit deze mooi aan op de totale-energiebalans waarbij de dissipatie als producent van thermische energie duidelijk naar voren komt.

### **1.3.4 De mechanische-energiebalans en de Bernoulli-vergelijking**

Nu de totale-energiebalans en de stationaire thermische-energiebalans geformuleerd zijn, is de constructie van de stationaire mechanische-energiebalans eenvoudig, aangezien

$$E_{tot} - E_{thermisch} = E_{mechanisch} \quad (1.123)$$

Dientengevolge leidt vergelijking (1.122) aftrekken van de stationaire versie van vergelijking (1.91) tot de stationaire mechanische-energiebalans

$$0 = \phi_m \cdot \left[ \frac{1}{2} v_{\text{in}}^2 - \frac{1}{2} v_{\text{uit}}^2 + g(z_{\text{in}} - z_{\text{uit}}) + \int_{\text{uit}}^{\text{in}} \left( \frac{1}{\rho} \right) dp \right] + \phi_w - \phi_m e_{\text{diss}} \quad (1.124)$$

Deze vergelijking wordt doorgaans iets anders geschreven, namelijk met de indices 1 en 2 voor ‘in’ respectievelijk ‘uit’:

$$0 = \phi_m \left[ \frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2) + g(z_1 - z_2) + \int_2^1 \left( \frac{1}{\rho} \right) dp \right] + \phi_w - \phi_m e_{\text{diss}} \quad (1.125)$$

Merk op, dat de productieterm hier een negatief teken heeft. Dit is in overeenstemming met het feit dat dissipatie mechanische energie vernietigt (zowel  $\phi_m$  als  $e_{\text{diss}}$  zijn immers altijd positief).

Hier moet nog wel opgemerkt worden dat de mechanische-energiebalans op een veel strakkere wijze kan worden afgeleid uit de impulsbalansen (zie verderop in dit boek), en wel door scalaire vermenigvuldiging met de snelheidsvector  $\vec{v}$ . De thermische-energiebalans volgt dan juist door de mechanische-energiebalans van de totale-energiebalans af te trekken.

In dit boek is voor de andere werkwijze gekozen: enerzijds om de route via impulsbalansen en de daarbij behorende wiskundige manipulaties te vermijden, anderzijds om de student vertrouwd te maken met het idee dat voor elke grootte (behouden of niet) een balansvergelijking opgesteld kan worden. Daarbij moet dan wel goed nagedacht worden over de fysica van de productieterm; soms is het daarbij zelfs nodig of handig deze productieterm te modelleren. (Zulks is bijvoorbeeld het geval bij het beschrijven en simuleren van turbulente stromingen.) Voor *behouden grootheden* (zoals massa en totale energie) is de productieterm uiteraard nul.

### De Bernoulli-vergelijking

Nu volgen een aantal voorbeelden van het gebruik van de mechanische-energiebalans voor het bijzondere geval dat er *geen arbeid* op het systeem wordt verricht ( $\phi_w = 0$ ) en dat de *dissipatie verwaarloosbaar* klein is ( $e_{\text{diss}} \approx 0$ ). In zulke gevallen, en mits  $\rho$  constant is, versimpelt de stationaire mechanische-energie-balans van vergelijking (1.125) zich tot de zgn. *Bernoulli-vergelijking* :

$$\frac{1}{2} v_1^2 + g z_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 + \frac{p_2}{\rho} \quad (1.126)$$

of:

$$\frac{1}{2} v^2 + g z + \frac{p}{\rho} = \text{constant} \quad (1.127)$$



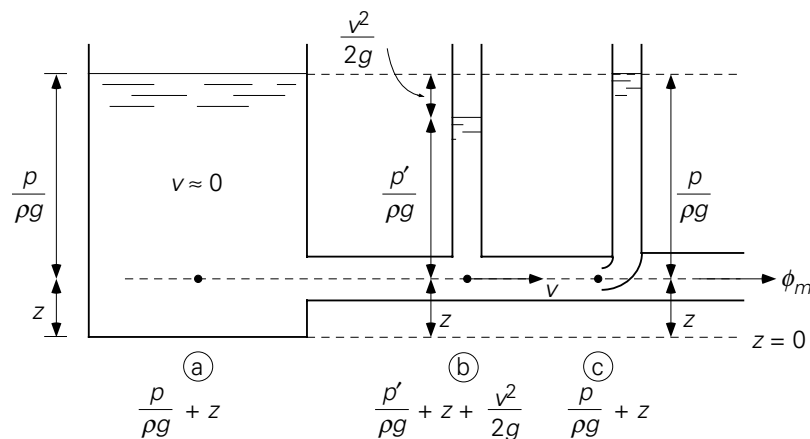
Deze vergelijking geldt in feite slechts langs een stroomlijn; voor verschillende stroomlijnen zal de constante in vergelijking (1.127) verschillende waarden aannemen. Feitelijk kunnen vloeistofpakketjes op weg langs stroomlijnen onder de aangegeven condities hun mechanische energie niet veranderen<sup>2</sup>. De enig mogelijke omzetting is die van de ene vorm van mechanische energie in een andere – in overeenstemming met de voorwaarden waaronder vergelijking (1.127) geldt. De termen in vergelijking (1.127) hebben alle de dimensie energie per massa-eenheid.

Afhankelijk van het te beschouwen systeem wordt vergelijking (1.127) ook wel herschreven in termen van drukhoogten, waarbij alle termen dan de dimensie lengte hebben:

$$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} = \text{constant} \quad (1.128)$$

Het werken in termen van hoogten wordt geïllustreerd in figuur 1.26. Toepassing van de Bernoulli-vergelijking op successievelijk de punten a, b en c (alle drie op dezelfde horizontale lijn) leert dat:

$$\frac{p}{\rho g} = \frac{p'}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\rho g} \quad (1.129)$$



Figuur 1.26.

Dit is in de figuur aangegeven: de druk  $p'$  bij punt b is lager dan de druk  $p$  bij punt a of punt c. Immers, in punt b heeft de vloeistof snelheid, dus kinetische energie, en daardoor is de druk  $p'$  kleiner is dan de druk  $p$  bij punt a. Bij punt c – precies in de omgebogen opening van de standpijp – staat de vloeistof weer stil en is de druk dus weer gelijk aan die in punt a. Derhalve zal punt c een grotere vloeistofkolom kunnen ‘dragen’ dan punt b; anders geformuleerd: de kinetische energie die in punt b aan-

<sup>2</sup> Voor een meer gedetailleerde discussie wordt verwezen naar bijv. Bird, R.B., E.W. Stewart en E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Wiley, 2nd Ed., 2002.

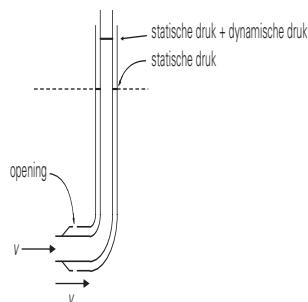
wezig is, is in punt c weer geheel in druk-energie omgezet. Punt c is een zogenaamd *stuwpunt* (Eng. ‘stagnation point’).

De twee hoogten in het middendeel van vergelijking (1.129) hebben ook ieder hun eigen naam, namelijk (*statische*) *drukhoogte* (Eng. ‘(static) pressure head’) en *snelheidshoogte* (Eng. ‘velocity head’). De ‘ontbrekende’ druk bij punt b (zie figuur 1.26) ter grootte van  $\frac{1}{2}\rho v^2$  – zie ook het middendeel van vergelijking (1.129) – noemt men wel de *dynamische druk* (Eng. ‘dynamic pressure’), terwijl  $p$  de *statische druk* (Eng. ‘static pressure’) wordt genoemd en  $\rho gz$  aangeduid wordt als de *hydrostatische druk* (Eng. ‘hydrostatic pressure’).

De druk in de omgebogen opening van de standpijp bij punt c heet wel de *stuwpuntdruk* of *stagnatiedruk* (Eng. ‘stagnation pressure’) en is de som van de lokale statische druk en de lokale dynamische druk. Deze begrippen keren alle weer terug bij de behandeling van de omstroming van en krachten op voorwerpen in § 2.3.1.

### De Pitotbuis

Met de hierboven besproken opstelling is in principe de vloeistofsnelheid te meten. De belangrijkste voorwaarde is dat dissipatie inderdaad verwaarloosbaar is. De *pitotbuis* (zie figuur 1.27) laat zien hoe het principe van de opstelling van figuur 1.26 vorm heeft gekregen in een compact apparaatje.



Figuur 1.27.

Het apparaatje bestaat uit twee omgebogen concentrische buizen. De binnenste buis meet de lokale stagnatiedruk zijnde de som van statische druk en dynamische druk, de buitenste buis meet enkel de statische druk. ‘Voldoende ver’ voor de buis is de druk immers  $p$  en de snelheid  $v$ ; dus geldt weer (op één hoogte):

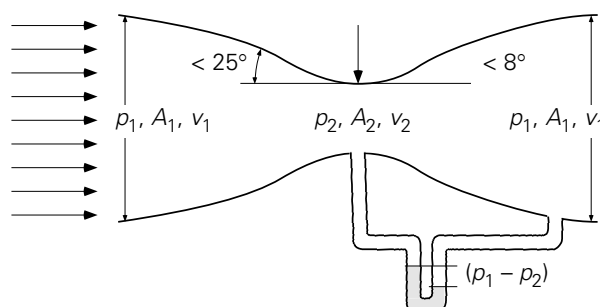
$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constant} \quad (1.130)$$

De stroming komt recht op de ingang van de binnenste buis af. Om te voorkomen dat de stroming (in een stationaire situatie) de buis in komt, dient een tegenwerkende kracht uitgeoefend te worden op het fluïdum. Dit wordt gedaan door de hogere druk aan de ingang – de lokale stuwdruk. Voor de buitenste buis geldt iets anders: de

stroming gaat met snelheid  $v$  langs het gaatje in de buitenste buis en heeft niet de neiging het gaatje in die buitenste buis binnen te gaan. Dus hoeft er ook geen tegenwerkende kracht te worden uitgeoefend en is daar ook geen hogere druk nodig. [Integendeel: elk drukverschil over het gaatje in de buitenste buis zou resulteren in een stroming die buitenste buis in of uit.] Het verschil tussen de twee gemeten drukken is daarmee de dynamische druk,  $\frac{1}{2}\rho v^2$ , en is daarmee een rechtstreekse maat voor de snelheid van het fluïdum.

### *De Venturibuis*

Ook de *Venturibuis* is een meetinstrument waarbij vanwege de constructie de energiedissipatie verwaarloosbaar klein is ( $e_{diss} \approx 0$ ). In het stroomkanaal (zie figuur 1.28) wordt een geleidelijke vernauwing (tophoek  $< 25^\circ$ ) gevolgd door een nog geleidelijker verwijding (tophoek  $< 8^\circ$ ) om aan  $e_{diss} \approx 0$  te voldoen. Zolang aan de twee criteria voor de tophoek wordt voldaan, kan men er zeker van zijn dat de stroomlijnen (waarlangs de Bernoulli-vergelijking geldt) netjes de vorm van de geometrie volgen en dat nergens wervels en energiedissipatie optreden.



*Figuur 1.28.*

Het massadebiet  $\phi_m$  dat in een stationaire situatie door het stroomkanaal gaat, is nu af te leiden uit een massabalans, de Bernoulli-vergelijking en het drukverschil tussen punt 1 ver voor (of ver na) de keel (de nauwste doorsnede) en punt 2 in de keel. Noem daartoe de oppervlakten van de dwarsdoorsneden bij de punten 1 en 2 respectievelijk  $A_1$  en  $A_2$ . Dan volgt uit de massabalans voor deze stationaire conditie:

$$\phi_m = \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 \quad (1.131)$$

en uit de Bernoulli-vergelijking (mits de vloeistof als onsamendrukbaar beschouwd mag worden, d.w.z.  $\rho = \text{constant}$ ):

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} \quad (1.132)$$

Combineren van de vergelijkingen (1.131) en (1.132) geeft de gezochte uitdrukking voor het massadebiet:

$$\phi_m = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2^2}{A_1^2}\right)}} \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \quad (1.133)$$

Merk op dat ook bij dit apparaat gebruik gemaakt is van de mogelijkheid om mechanische energievormen in elkaar om te zetten, namelijk: drukenergie wordt kinetische energie, die weer drukenergie wordt.

**Voorbeeld 1.14.** *Rookgassen door een schoorsteen*

De rookgassen van een fornuis worden toegevoerd aan de voet van een grote, hoge schoorsteen, die op de grond staat. De schoorsteen heeft een constante diameter. De rookgassen zijn op een constante temperatuur van 227 °C, terwijl de buitenlucht op 20 °C is. De druk  $p_1$  onderin de schoorsteen is  $\Delta p_m$  beneden de atmosferische druk  $p_a$  van 1 bar (gemeten op grondniveau). De warmteverliezen van de rookgassen in de schoorsteen naar de omgeving zijn verwaarloosbaar. Bovendien is er geen noemenswaardige energiedissipatie.

Hoe hoog is, op basis van deze gegevens en voor  $\Delta p_m = 250$  Pa, de schoorsteen?

Alvorens deze vraag beantwoord kan worden, dient eerst nagegaan te worden waarom de rookgassen eigenlijk de schoorsteen uitstroomt. Het komt immers op onderdruk (t.o.v. de 1 bar omgevingsdruk) de schoorsteen binnen? Aan de bovenzijde van de schoorsteen is evenwel de luchtdruk ook beneden 1 bar gezakt. In de buitenlucht daalt de druk immers, als de kolom lucht die “gedragen” wordt kleiner wordt. De omgevingsdruk op de hoogte  $H$  van de schoorsteenopening is dus niet  $p_0$ , maar  $p_0 - \rho_a gH$  (met  $\rho_a$  de dichtheid van lucht bij 20 °C = 1,2 kg/m<sup>3</sup>) en moet daarmee lager uitkomen dan de druk  $p_0 - \Delta p_m$  onderin de schoorsteen.

Voor de schoorsteen volgt uit vergelijking (1.125), met  $\phi_w = 0$  en gegeven de constante diameter van de schoorsteen:

$$0 = \int_0^H \frac{1}{\rho_g} dp + gH \quad (1.134)$$

De drukval van de onderkant tot de bovenrand van de schoorsteen is heel klein – controleer dit achteraf met behulp van vergelijking (1.135) – en er is gegeven dat de warmteverliezen naar de buitenlucht verwaarloosbaar zijn. Dientengevolge veranderen druk en temperatuur van de rookgassen niet of nauwelijks, en daarom mag ook de dichtheid  $\rho_g$  van de rookgassen als constant beschouwd worden (0,65 kg/m<sup>3</sup> at 227 °C). Dit betekent dat vergelijking (1.134) zich vereenvoudigt tot een Bernoulli-vergelijking:

$$0 = \frac{1}{\rho_g} [(p_0 - \rho_a gH) - (p_0 - \Delta p_m)] + gH \quad (1.135)$$

$$\rightarrow H = \frac{\Delta p_m}{(\rho_a - \rho_g) g} \quad (1.136)$$

Invullen van de gegevens levert  $H = 46,3\text{m}$  op.

Uit vergelijking (1.136) volgen een paar triviale regels voor het ontwerp van een schoorsteen: een grotere  $\Delta p_m$  vraagt om een hogere schoorsteen (bij gelijke  $\rho_a$  en  $\rho_g$ ); hetere rookgassen (dus een lagere  $\rho_g$ ) laten een lagere schoorsteenhoogte toe (dankzij een betere ‘trek’).

5

### Samenvatting

In deze paragraaf is de stationaire mechanische-energiebalans geconstrueerd door het verschil te nemen van de (stationaire) totale-energiebalans en de (stationaire) thermische-energiebalans.

$$0 = \phi_m \left[ \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + g(z_1 - z_2) + \int_2^1 \left( \frac{1}{\rho} \right) dp \right] + \phi_w - \phi_m e_{diss}$$

De productieterm hierin is altijd negatief: dissipatie vernietigt mechanische energie. Vervolgens is gekeken naar een aantal gevallen waarin geen arbeid verricht wordt en de energiedissipatie verwaarloosbaar klein is, terwijl  $\rho = \text{constant}$ . Dan gaat de stationaire mechanische-energiebalans over in de Bernoulli-vergelijking:

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{constant}$$

Deze laatste geeft behoud van mechanische energie weer: er zijn wel omzettingen van druk-energie, kinetische energie en zwaartekrachtsenergie in elkaar mogelijk, maar de som van de drie blijft constant.

Tenslotte zijn de Pitotbuis en de Venturibuis behandeld, alsmede de begrippen drukhoogte, statische hoogte, snelheidshoogte, statische druk, hydrostatische druk, dynamische druk, stuwdruk en stagnatiedruk.

## 1.4 De impulsbalans

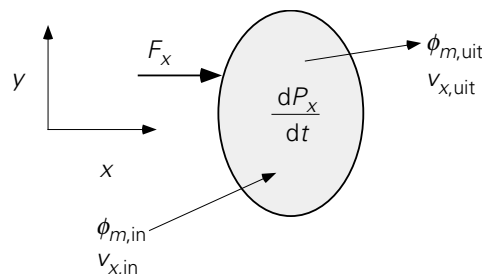
Na de massa- en energiebalans nog de impulsbalans. De grootte waarvoor nu een balans opgesteld moet worden, is dus de impuls  $\vec{P}$ , gewoonlijk opgevat als het product van de bewegende massa  $m$  (in kg) en zijn snelheid  $\vec{v}$  (in m/s). De eenheid waarin  $\vec{P}$

wordt uitgedrukt, is dan Ns, naar analogie van de eenheid Nm (of J) voor energie  $E$ . Bij impuls is er, zoals de notatie al laat zien, een extra complicatie ten opzichte van massa en energie. Impuls is namelijk, net als een kracht, een *vector*grootheid; dat wil zeggen: om de impuls vast te leggen moeten er drie componenten gespecificeerd worden. Dit in tegenstelling tot massa of energie die met slechts één waarde vastgelegd worden (men noemt massa en energie een scalar).

Voor impuls zijn derhalve drie balansen nodig. Vanzelfsprekend komen bij gebruik van orthogonale assenstelsels, zoals het veel gebruikte Cartesiaanse stelsel  $(x, y, z)$ , de drie impulscomponenten  $(p_x, p_y, p_z$  – de impulsconcentraties per massa-eenheid, in Ns/kg, of per volume-eenheid, in Ns/m<sup>3</sup>) slechts afzonderlijk in deze balansen voor (let wel dat hier nu even met  $p$  – met subscript! – niet de druk bedoeld wordt.). Met andere woorden: in de balans voor de impuls in de  $x$ -richting ( $p_x$ ) komen geen termen voor die  $p_y$  of  $p_z$  bevatten.

Eerst wordt nu de impulsbalans in de (willekeurig gekozen)  $x$ -richting geïntroduceerd. De algemene vorm van de  $x$ -impulsbalans luidt weer (voor het controlevolume  $V$  uit figuur 1.29):

$$\frac{dP_x}{dt} = \text{stroom van } x\text{-impuls in} - \text{stroom van } x\text{-impuls uit} + \text{productie van } x\text{-impuls} \quad (1.137)$$



Figuur 1.29.

Alle termen van deze vergelijking hebben de eenheid Ns/s. De linkerterm stelt weer de verandering in de tijd voor van de totale hoeveelheid  $x$ -impuls in het controlevolume<sup>3</sup> is te schrijven  $P_x = M \cdot v_x$ , in Ns.

<sup>3</sup> De snelheid  $v_x$  is eigenlijk een gemiddelde snelheid gedefinieerd als

$$\langle v_x \rangle = \frac{\int \rho v_x dV}{\int \rho dV}$$

De stromen in en uit zijn in dit geval weer het gevolg van een massastroom die  $x$ -impuls met zich meedraagt. Ze hebben dus de vorm van  $\phi_m \cdot \{x\text{-impuls per eenheid van massa}\}$ . Uit de klassieke mechanica volgt dat de  $x$ -impuls van een massa  $m$  gelijk is aan  $mv_x$ . Hieruit volgt dat de  $x$ -impulsconcentratie (per massa-eenheid) gelijk is aan  $(mv_x)/m = v_x$ . *De snelheid in de  $x$ -richting is derhalve op te vatten als de concentratie (per massa-eenheid) van  $x$ -impuls*, in Ns/kg. (Vanaf nu zal het symbool  $p$  niet meer voor impuls gebruikt worden, doch uitsluitend voor druk.) Daarmee worden, weer geheel analoog aan de uitdrukkingen (1.9) en (1.10) en ook analoog aan de energiestromen in en uit in vergelijking (1.84), de stromen  $x$ -impuls in en uit

$$\phi_{m,\text{in}} \cdot v_{x,\text{in}} \quad \text{respectievelijk} \quad \phi_{m,\text{uit}} \cdot v_{x,\text{uit}}$$

Analoog geldt dat de concentratie van  $x$ -impuls per volume-eenheid gegeven wordt door  $\rho v_x$ , in Ns/m<sup>3</sup>.

Rest nog de productie van  $x$ -impuls. Ook hiervoor kan teruggegrepen worden op de klassieke mechanica. In feite is de Tweede Wet van Newton

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = \sum F_x \quad (1.138)$$

al een eenvoudige vorm van de door ons gezochte  $x$ -impulsbalans. Het linkerlid is de verandering van de  $x$ -impuls van het lichaam. Deze verandering is het gevolg van de  $x$ -componenten van de krachten die op het lichaam werken. Derhalve stelt het rechterlid van vergelijking (1.138), de som van krachten in de  $x$ -richting, dus de impulsproductie voor. Een kracht kan dus opgevat worden als een *producent van impuls* (Ns) per tijdseenheid (s).

Uit de klassieke mechanica volgt voorts dat er twee soorten krachten onderscheiden kunnen worden:

- zogenaamde *body forces* die op de massa in het controlevolume werken; de bekendste exponent hiervan is de zwaartekracht,
- krachten die op het oppervlak van een controlevolume aangrijpen; dit zijn bijvoorbeeld de drukkrachten en de wrijvingskracht (of de schuifspanning – zie volgend hoofdstuk).

Op dit punt wijkt de impulsbalans af van de massa- en energiebalans. Terwijl bij de laatste twee balansen productie altijd in het inwendige plaatsvindt, is bij de impulsbalans er de mogelijkheid dat impulsproductie aan de oppervlakken geschiedt. (Verderop zal aangetoond worden dat dit verschil deels is op te heffen door het invoeren van zekere impulsstromen die de wrijvingskrachten aan het oppervlak van het controlevolume vervangen.)

Met alle bovenstaande overwegingen is de algemene vorm van de  $x$ -impulsbalans :

$$\frac{d}{dt}(Mv_x) = \phi_{m,\text{in}} \cdot v_{x,\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} \cdot v_{x,\text{uit}} + \sum F_x \quad (1.139)$$

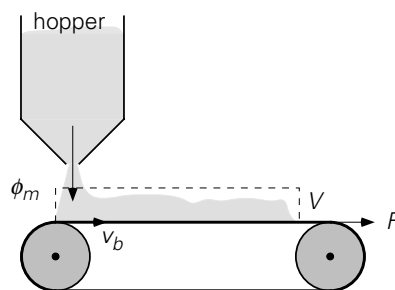
Het is goed om te bedenken, dat de massastromen niet noodzakelijkerwijs in de  $x$ -richting hoeven te staan (zie figuur 1.29). Indien de situatie stationair is en de transporttermen in vergelijking (1.139) elkaar compenseren (of gelijk aan nul zijn) reduceert de  $x$ -impulsbalans tot een *krachtenbalans*:

$$0 = \sum F_x \quad (1.140)$$

Voor de  $y$ -impuls en  $z$ -impuls zijn uiteraard soortgelijke balansen op te schrijven.

**Voorbeeld 1.15. De lopende band**

Een horizontaal opgestelde lopende band, die met een snelheid  $v_b = 1,0$  m/s beweegt, vangt zand op, dat uit een hopper (dat is een vultrechter) komt. Het zand valt verticaal omlaag met een massastroom van 225 kg/s. De lopende band is aanvankelijk leeg en wordt geleidelijk met zand gevuld (maar raakt nog niet vol). Reken de kracht uit die nodig is om de band voort te trekken. Neem hierbij aan dat de band wrijvingsloos over de lagere beweegt.



Figuur 1.30.

De eerste vraag die beantwoord moet worden is: waarom moet er een kracht op de band uitgeoefend worden als deze toch wrijvingsloos beweegt? Het antwoord is: het zand dat voortdurend op de band valt, moet voortdurend op de juiste horizontale snelheid gebracht worden en dient daartoe impuls in de horizontale richting (de  $x$ -richting) te ontvangen! Hiervoor is uiteraard een kracht in de horizontale richting nodig. Om deze kracht uit te rekenen dient een impulsbalans opgesteld te worden over een volume dat al het zand omvat dat op de band ligt (zie figuur 1.30). Kies het controlevolume aan de rechterzijde zo groot dat in het tijdsinterval  $dt$  geen zand het controlevolume verlaat.

Deze balans voor  $x$ -impuls luidt hier::

$$\frac{d}{dt}(M_z v_b) = \phi_{p_x,\text{in}} - \phi_{p_x,\text{uit}} + \sum F_x \quad (1.141)$$



hierin is  $M_z$  de massa van het zand dat op de band ligt. Deze balans versimpelt doordat er geen  $x$ -impuls het controlevolume in of uit stroomt. De som van de krachten is enkel  $F$ , de kracht die de band voorttrekt. De instationaire term is met behulp van een massabalans over hetzelfde volume te vereenvoudigen, immers

$$\frac{d}{dt}M_z = \phi_{m,\text{in}} - 0 = \phi_{m,\text{in}} \quad (1.142)$$

Door nu de vergelijkingen (1.141) en (1.142) te combineren en te gebruiken dat  $v_b$  constant is, volgt

$$F = v_b \cdot \phi_m = 225 \text{ N} \quad (1.143)$$

Hetzelfde resultaat kan overigens gevonden worden als het zand het einde van de bad heeft bereikt en er zand van de band af naar beneden valt; in dat geval stroomt er dus wel zand het controlevolume uit.

⑤

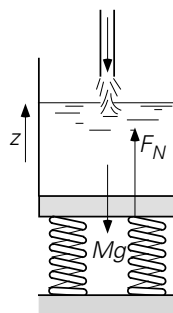
#### Voorbeeld 1.16. *Het vullen van een vat*

Dit voorbeeld behandelt ook weer de koppeling tussen impulsstroom en kracht als producent van impuls.

In een fabriek worden vaten gevuld met vloeistof. Dit is een geautomatiseerd proces, waarbij het gewicht van de vaten met behulp van een weegschaal bepaald wordt. Om de gedachten te bepalen: de vultijd is ongeveer 20 seconden en de snelheid  $v$  van de verticale vloeistofstraal, die in het vat komt, is constant en bedraagt 10 m/s.

Welk percentage overgewicht moet de weegschaal aanwijzen, voordat de gewenste hoeveelheid vloeistof in het vat zit en er gestopt kan worden met vullen?

Als controlevolume wordt nu het gehele vat gekozen. Ofschoon de vloeistof in het vat niet geheel stil zal staan als gevolg van de menging door de inkomende vloeistofstraal, zal gemiddeld genomen de vloeistof in het vat geen verticale impuls hebben. Als gevolg daarvan is het linkerlid (de  $d/dt$ -term) van de balans voor verticale impuls nul en luidt de impulsbalans (zie figuur 1.31):



Figuur 1.31.

$$0 = -(\rho A v) \cdot v - 0 - M \cdot g + F_N \quad (1.144)$$

waarbij  $A$  het oppervlak van de doorsnede van de inlaat is en  $F_N$  de kracht die de weegschaal op het vat uitoefent. Vergelijking (1.144) zegt dat de weegschaal niet alleen het vat moet dragen (compensatie van  $M \cdot g$ ), maar ook de impuls uit de instromende vloeistof moet halen (negatieve productie, of vernietiging, van verticale impuls). De massa  $M$  is een functie van de tijd, die eenvoudig bepaald kan worden uit een massabalans over de tank:

$$\frac{dM}{dt} = \rho A v \quad (1.145)$$

Dit integreren met de randvoorwaarde  $M = 0$  op  $t = 0$  levert dat op de vultijd  $\tau$  geldt

$$M(\tau) = \rho A v \tau \quad (1.146)$$

Voor het percentage overgewicht volgt dan:

$$\frac{F_N - M \cdot g}{M \cdot g} = \frac{\rho A v^2}{\rho A v g \tau} = \frac{v}{g \tau} = 5\% \quad (1.147)$$

⑤

### Voorbeeld 1.17. Een hangende druppel

Aan het uiteinde van een verticaal opgesteld glazen capillair, dat een buitendiameter van 2 mm heeft, worden heel langzaam afzonderlijke waterdruppels gevormd. De stroming door het capillair is verwaarloosbaar klein.

Als de oppervlaktespanning van water  $70 \cdot 10^{-3}$  N/m bedraagt, bereken dan met een krachtenbalans de diameter van de druppels die van het capillair vallen.

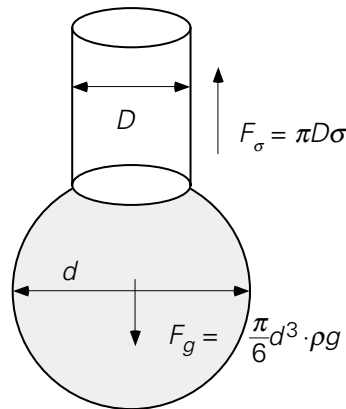
Een impulsbalans over het controlevolume (de druppel) zal vanwege de zeer lage snelheden resulteren in een krachtenbalans: zowel de toename van de massa van de druppel (de  $d/dt$ -term van het linkerlid van de impulsbalans) als de instroom van impuls de druppel in gedurende een tijdsinterval  $dt$  zijn verwaarloosbaar klein, d.w.z. veel kleiner dan de optredende krachten. Deze vereenvoudiging wordt wel aangeduid als een 'quasi-steady-state' benadering.

De krachten die optreden zijn de zwaartekracht  $F_g$  en de oppervlaktespanningskracht  $F_\sigma$  van de vloeistof die in contact met de rand van het capillair staat, zie figuur 1.32. Hierbij is dan wel de opwaartse kracht van de lucht op de druppel verwaarloosd. De twee dominante krachten hebben een verschillende richting, en komen dus ook met een verschillend teken in een krachtenbalans voor. De krachtenbalans wordt daarmee:

$$\sum F = 0 = F_\sigma + (-F_g) = \pi D \sigma - \frac{\pi}{6} d^3 \rho g \quad (1.148)$$

zodat:

$$d = \sqrt[3]{\frac{6D\sigma}{\rho g}} = 4,4 \text{ mm} \quad (1.149)$$



Figuur 1.32.

**Opmerkingen over oppervlaktespanning:**

De moleculen midden in een vloeistof ondervinden van de omringende moleculen krachten die elkaar opheffen. Dit geldt niet voor moleculen die aan de lucht grenzen; daar werkt een resulterende kracht die loodrecht op het oppervlak naar de vloeistof gericht is. Een hoeveelheid vloeistof waarop geen uitwendige krachten werken, neemt de bolvorm aan; de oppervlakte-energie heeft dan zijn minimumwaarde. De vloeistof is als het ware door een elastisch vlies omsloten.

Bij vergroten van het vloeistofoppervlak komen er meer moleculen in de grenslaag en wordt er arbeid verricht tegen de aantrekkingskrachten van de moleculen in de vloeistof in. De arbeid (of energie), in joule, nodig om het oppervlak met  $1 \text{ m}^2$  te vergroten, wordt gerepresenteerd door de *oppervlaktespanning*  $\sigma$ , uitgedrukt in  $\text{J/m}^2$ . Een alternatief is te kijken naar de kracht die nodig is om een oppervlak over een afstand  $b$  te vergroten: deze is  $\sigma b$  (N), wat maakt dat  $\sigma$  ook wel uitgedrukt wordt in N/m.

Aan de rand van een capillair is sprake van een lokale en gecompliceerde krachtenbalans bij de driefase-contactlijn water-lucht-glas. De vloeistofmoleculen in de grenslaag kunnen door een vaste stof sterker worden aangetrokken (*adhesie*) dan door de vloeistof zelf (*cohesie*), waardoor bijvoorbeeld de vloeistof stijgt in een capillair van die vaste stof.

In dit voorbeeld is de *adhesiekracht* gelijk aan de oppervlaktespanning maal de 'lengte'  $\pi D$  van de contactlijn.

**Samenvatting**

Impuls, in Ns, is een vector. Er zijn dus drie impulsbalansen: voor elke component één. Het verdient aanbeveling te denken in termen van impulsconcentraties:  $v$ , in Ns/kg, of  $\rho v$ , in Ns/m<sup>3</sup>. De drie impulsbalansen hebben weer de vertrouwde basisvorm met een  $d/dt$ -term, in- en uittermen, en productieterm(en):

$$\frac{d}{dt}(Mv_x) = \phi_{m,\text{in}} \cdot v_{x,\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} \cdot v_{x,\text{uit}} + \sum F_x$$

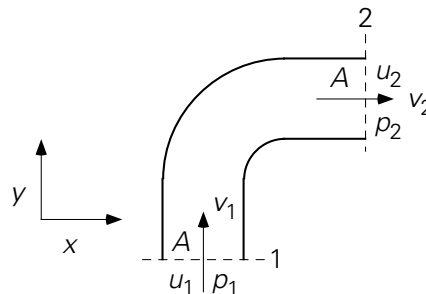
Uiteraard komen in de  $x$ -impulsbalans geen termen met  $y$ - of  $z$ -impuls voor.

Krachten kunnen gezien worden als producenten van impuls, in Ns/s. Ook hier geldt weer dat er geen krachten in de  $y$ - of  $z$ -richting in de  $x$ -impulsbalans voorkomen.

Soms kan een impulsbalans vereenvoudigd worden tot een krachtenbalans, bijv. als in een quasi-steady-state benadering de overige termen van een impulsbalans tegen elkaar wegvallen.

## 1.5 Voorbeelden van gecombineerd gebruik van massa-, energie- en impulsbalansen

**Voorbeeld 1.18.** *Stroming door een bochtstuk*



*Figuur 1.33.*

Er stroomt water door een 90° bocht in een goed geïsoleerde buis die horizontaal is opgesteld: figuur 1.33 laat een bovenaanzicht zien. De buis heeft een constante doorsnede  $A$ ; het water wordt als niet-samendrukbaar (incompressibel) opgevat. De toestand is stationair. Stel de massabalans, de energiebalans en de impulsbalansen voor de gehele bocht op.

Er is sprake van een stationaire toestand en dus is het linkerlid in alle vier de balansen (let op: er zijn twee impulsbalansen aan de orde!) gelijk aan 0.

• *Massabalans:*

$$0 = \rho v_1 A - \rho v_2 A \rightarrow v_1 = v_2 \quad (1.150)$$

Kennelijk is de snelheid in grootte onveranderd, maar de richting is natuurlijk wel veranderd.

• *Energiebalans:*

$$0 = \rho v_1 A \cdot \left( e_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) - \rho v_2 A \cdot \left( e_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \quad (1.151)$$

Dankzij vergelijking (1.150) volgt dan direct::

$$u_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = u_2 + \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \quad (1.152)$$

Vanwege weer vergelijking (1.150) en met  $z_1 = z_2$  volgt:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = u_2 - u_1 \quad (1.153)$$

Dit resultaat impliceert dat de drukval slechts is te voorspellen als de grootte van de energiedissipatie bekend is, en omgekeerd.

• *Impulsbalans in de y-richting:*

$$0 = \rho v_1 A \cdot v_1 - \rho v_2 A \cdot 0 + \sum F_y \quad (1.154)$$

In de tweede term van het rechterlid staat dat er door de uitgaande stroom geen impuls in de  $y$ -richting wordt meegenomen. De krachten die op de vloeistof werken in de  $y$ -richting zijn de drukkracht  $+p_1 A$  (door de buitenwereld uitgeoefend in de positieve  $y$ -richting op de vloeistof die al het bochtstuk is) en de reactiekracht van de wand op de vloeistof  $+F_{y,w \rightarrow f}$  (in de positieve of negatieve  $y$ -richting; dat volgt uit het teken); dus:

$$F_{y,w \rightarrow f} = -\rho v_1^2 A - p_1 A \quad (1.155)$$

De wand moet dus een kracht in de negatieve  $y$ -richting leveren en een kracht  $F_{y,f \rightarrow w}$  ( $= -F_{y,w \rightarrow f}$ ) in de positieve  $y$ -richting opnemen (actie = - reactie, Derde Wet van Newton). Deze kracht  $F_{y,f \rightarrow w}$  staat dus voor de som van de drukkracht op de vloeistof en de reactiekracht die ontstaat als de  $y$ -impuls van de instromende vloeistof geheel wordt opgenomen door de wand.

• *Impulsbalans in de x-richting:*

$$0 = \rho v_1 A \cdot 0 - \rho v_2 A \cdot v_2 + \sum F_x \quad (1.156)$$

In de eerste term van het rechterlid staat dat er door de ingaande stroom geen impuls in de  $x$ -richting wordt meegenomen.

De krachten die op de vloeistof werken in de  $x$ -richting zijn de drukkracht  $-p_2A$  (want het gaat om de drukkracht uitgeoefend door de buitenwereld op de vloeistof die nog juist in het bochtstuk is en die kracht staat in de negatieve  $x$ -richting) en de reactiekracht van de wand op de vloeistof  $+F_{x,w \rightarrow f}$  (in de positieve of negatieve  $x$ -richting; dat volgt uit het teken); dus:

$$F_{x,w \rightarrow f} = \rho v_2^2 A + p_2 A \quad (1.157)$$

De wand moet dus een kracht in de positieve  $x$ -richting leveren en een kracht  $F_{x,f \rightarrow w}$  ( $= -F_{x,w \rightarrow f}$ ) in de negatieve  $x$ -richting opnemen (weer actie =  $-$  reactie, Derde Wet van Newton).

Een fraaie illustratie van het gecombineerd effect van  $F_{x,f \rightarrow w}$  en  $F_{y,f \rightarrow w}$  is de ronddraaiende beweging van een tuinsproeier waarbij de uitredende vloeistof het molentje in rotatie brengt (in tegengestelde richting). Of in de kwispelende beweging van een losse tuinslang waar water uitspuit.

Hierboven is steeds aangenomen dat de snelheidsverdelingen aan in- en uitlaat uniform zijn (geen snelheidsverschillen in de doorsnede). In dat geval is de binnenstromende impuls in de  $x$ -richting inderdaad  $\rho A v_1 \cdot v_1$ . Is dit niet het geval, dan moet voor het binnenstromende impulsdebiet in de  $y$ -richting geschreven worden:

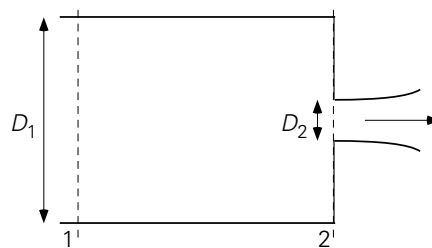
$$\rho \int v_1^2 dA \quad \text{of, kortweg} \quad \rho A \langle v_1^2 \rangle \quad (1.158)$$

waarin de haakjes een middeling over de doorsnede voorstellen.

⑤

### Voorbeeld 1.19. De brandslang

Aan het uiteinde van een horizontaal gehouden brandslang (inwendige diameter  $D_1 = 10$  cm) bevindt zich een flens; uit een rond gat (diameter  $D_2 = 4$  cm) in die flens spuit een krachtige waterstraal. De snelheid van het water juist in de spuitopening is 15 m/s. De waterstraal spuit vrij de buitenlucht in (zie figuur 1.34). De toestand is stationair.



Figuur 1.34.

Bepaal de kracht  $F$ , in grootte en richting, die de flens op het water uitoefent. Veronderstel hierbij dat de energiedissipatie verwaarloosd mag worden. (Ook mag

de contractie van de waterstraal net na de uitstroomopening buiten de beschouwing gehouden worden.)

Om  $F$  te bepalen zullen de massabalans, de mechanische-energiebalans, en de impulsbalans voor de horizontale richting gebruikt moeten worden. Alle drie de balansen hebben hetzelfde controlevolume: het hele buissegment tussen de vlakken 1 en 2 uit figuur 1.34. Vlak 1 moet voldoende ‘ver’ stroomopwaarts van de flens gekozen worden; vlak 2 loopt precies langs de binnenzijde van de flens. De berekening van  $F$  gaat als volgt:

De massabalans over het controlevolume is:

$$0 = \rho A_1 v_1 - \rho A_2 v_2 \rightarrow v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 v_2 = 2,4 \text{ m/s} \quad (1.159)$$

De mechanische-energiebalans over het hetzelfde controlevolume luidt:

$$0 = \rho A_1 v_1 \cdot \left( \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} \right) - \rho A_2 v_2 \cdot \left( \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \quad (1.160)$$

Dit levert dus dat er een drukval tussen 1 en 2 is: de toename van de kinetische energie wordt gehaald uit de afname van de drukenergie. Invullen van de massabalans levert

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad (1.161)$$

wat feitelijk de Bernoulli-vergelijking is (immers: stationair; geen arbeid; geen warmteuitwisseling; constante  $\rho$ ; geen energiedissipatie). Omdat de druk in de vrij uitstromende straal gelijk is aan de druk van de buitenlucht ( $p_2 = 1 \text{ bar}$ ) is dus de druk in de slang  $p_1 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

Deze drukken komen ook voor in de impulsbalans in de stromingsrichting:

$$0 = \rho A v_1 \cdot v_1 - \rho A_2 v_2 \cdot v_2 + p_1 A_1 - p_2 A_2 + F \quad (1.162)$$

In deze vergelijking zijn behalve  $F$  alle grootheden nu bekend; invullen levert dan:  $F = -1286 \text{ N}$ . De kracht die de flens op het water uitoefent, heeft dus een richting die tegengesteld is aan de richting van de stroming.

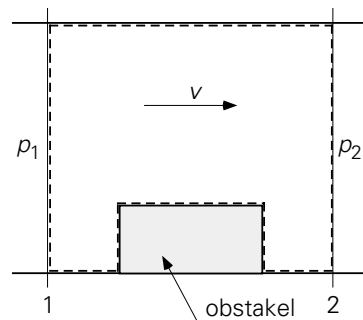
Merk op dat de druk in twee vergelijkingen voorkomt: zowel in de mechanische-energiebalans als in de impulsbalans(en). In het algemeen geldt: welke vergelijking

voor welk doel gebruikt kan of moet worden, hangt helemaal van het beschouwde probleem af.

5

**Voorbeeld 1.20. Stroming om een obstakel**

Door een horizontale leiding met een constante diameter  $D = 5$  cm stroomt 2 liter water per seconde. In de leiding bevindt zich een obstakel. Dit obstakel vormt een (extra) weerstand voor de stroming, terwijl omgekeerd de stroming een kracht  $F$  uitoefent op het obstakel. De toestand is stationair. Met behulp van een druksensor wordt de drukval gemeten over het stuk leiding waarin het obstakel zich bevindt. In dit pijpstuk mag de wrijving aan de wand van de pijp worden verwaarloosd ten opzichte van de stromingsweerstand van het obstakel. Het drukverschil is 980 Pa. Bepaal eerst de kracht  $F$  die het water op het obstakel uitoefent, en vervolgens hoeveelheid energie wordt gedissipeerd per s.



Figuur 1.35.

Stel hiertoe een balans op voor de impuls in de stromingsrichting over het stuk van de leiding waarover de drukval is gemeten (zie figuur 1.35). Merk op dat de vlakken 1 en 2 zo ver van het obstakel gekozen moeten worden dat de stroming in beide vlakken geen weet (meer) heeft van de aanwezigheid van het obstakel. De impulsbalans is dan

$$0 = \phi_v \cdot \rho v_1 - \phi_v \cdot \rho v_2 + p_1 \cdot \frac{\pi}{4} D^2 - p_2 \cdot \frac{\pi}{4} D^2 - F \quad (1.163)$$

Omdat geldt  $v_1 = v_2$  (vanwege de massabalans) en  $p_1 - p_2 = 980$  Pa (gemeten) gaat vergelijking (1.163) over in:

$$F = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot (p_1 - p_2) = 1,92 \text{ N} \quad (1.164)$$

Ten gevolge van wrijving langs het oppervlak van het obstakel en in het zog achter het obstakel (in wervels) wordt er mechanische energie gedissipeerd (omgezet in warmte). Deze energiedissipatie volgt met behulp van de mechanische-energiebalans:



$$0 = -\phi_m \frac{p_2 - p_1}{\rho} - \phi_m e_{fr} \quad (1.165)$$

Hieruit volgt simpel de hoeveelheid mechanische energie die per tijdseenheid vernietigd wordt:

$$\phi_m e_{fr} = 1,96 \text{ J/s} \quad (1.166)$$

In dit voorbeeld kon de energiedissipatie uitgerekend worden, omdat de drukval over het obstakel gemeten en daardoor bekend was. In het algemeen zal dat niet zo zijn en zal gebruik gemaakt moeten worden van een model voor  $e_{fr}$ , zodat *drukvalberekeningen* aan leidingsystemen mogelijk zijn. Deze materie komt in hoofdstuk 5 aan de orde.

⑤

**Voorbeeld 1.21.** *Uitstroming uit een vat door een gat*

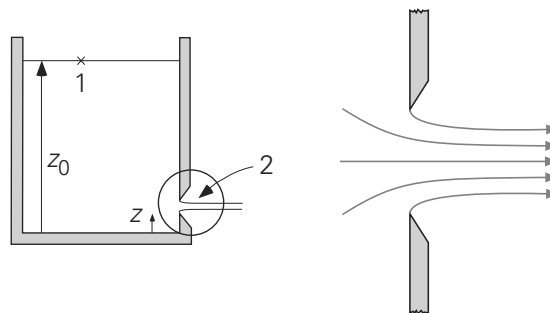
In een groot vat, dat tot een hoogte  $z_0$  gevuld is met water, zit in de wand onder de waterspiegel ter hoogte  $z$  een gat met een diameter  $D$  die veel kleiner is dan de vatdiameter. Uiteraard stroomt er water door dit gaatje naar buiten. Neem aan dat het gaatje een scherpe rand heeft, zodat bij gebrek aan wand wrijving een ondergeschikte rol zal spelen.

Hoe hangt het debiet door het gaatje af van de vloeistofhoogte  $z_0$ ?

Toepassing van de Bernoulli-vergelijking tussen de punten 1 en 2 (zie figuur 1.36) – waar beide drukken gelijk zijn aan de omgevingsdruk  $p_0$  – levert voor de snelheid  $v$  in het gaatje (met  $v = v_2$  en  $v_1 \ll v_2$ )

$$v = \sqrt{2g(z_0 - z)} \quad (1.167)$$

En derhalve geldt voor het debiet door het gaatje:



Figuur 1.36.

$$\phi_v = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot v = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \sqrt{2g(z_0 - z)} \quad (1.168)$$

In de praktijk is het debiet kleiner dan berekend met vergelijking (1.168) doordat contractie van de uittredende vloeistofstraal optreedt: de *traagheid* (Eng. ‘inertia’) van de vloeistof die van alle kanten radiaal naar de uitstroomopening toestroomt, maakt dat de vloeistof niet instantaan zijn radiale snelheid (impuls) verliest en daardoor niet de gehele uitstroomopening gebruikt. Pas wat verderop, stroomafwaarts, *d.i.* buiten de uitstroomopening, worden de stroomlijnen parallel en ook op dat punt is de druk  $p_2$  in de waterstraal pas echt gelijk aan de omgevingsdruk  $p_0$  – dat punt blijkt dus het punt 2 verondersteld voor vergelijking (1.167). Op dat punt is de doorsnede van de waterstraal dus kleiner dan de doorsnede van de uitstroomopening.

Gewoonlijk wordt dit contractie-effect daarom in rekening gebracht door een *uitstroomcoëfficiënt*  $C_d$  (Eng. ‘discharge coefficient’) op te nemen in het rechterlid van vergelijking (1.168), met  $C_d < 1$  feitelijk de verhouding van de doorsnede van de vloeistofstraal op het punt waar de stroomlijnen parallel worden, tot de doorsnede van de uitstroomopening:

$$\phi_v = C_d \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \sqrt{2g(z_0 - z)} \quad (1.169)$$

Het boven besproken verschijnsel wordt algemeen aangeduid met de term *vena contracta*. Doorgaans wordt het (soms wel heel) kleine effect van wrijvingsverliezen ook ondergebracht in genoemde uitstroomcoëfficiënt, maar bij scherpe randen van de uitstroomopening is de rol van wrijving feitelijk verwaarloosbaar. De kleinst mogelijke waarde van  $C_d$  is 0,6 en treedt op bij turbulente stroming (bij een hoge waarde van het Reynolds-getal: zie hoofdstuk 2) door een gat met een zeer scherpe rand. De waarde van  $C_d$  neemt toe naarmate de randen van de uitstroomopening aan de intrede kant meer afgerond zijn en de contractie van de uittredende vloeistofstraal kleiner is.

⑤

## Appendix 1A

Veel balansvergelijkingen resulteren in een eerste orde lineaire differentiaalvergelijking van de vorm

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad (A.1)$$

Deze differentiaalvergelijking is eerste orde en lineair omdat zowel de afgeleide van  $y$  als  $y$  zelf alleen tot de macht 1 voorkomt. De vergelijking drukt uit dat  $dy/dx$ , dus de

verandering van  $y$  met  $x$ , lineair van  $y$  zelf afhangt. Merk op dat  $\lambda$  zowel positief als negatief kan zijn.

Omdat het differentiëren van  $y$  leidt tot een uitdrukking die weer de functie  $y$  zelf teruggeeft, is  $e^{\lambda x}$ , ook wel geschreven als  $\exp(\lambda x)$ , een oplossing van deze differentiaalvergelijking. De algemene oplossing van bovenstaande differentiaalvergelijking is daarmee  $y = C_1 e^{\lambda x}$ , waarbij  $C_1$  een nader te bepalen constante is - d.w.z. dat  $C_1$  niet van  $x$  afhangt en dus bij differentiëren naar  $x$  nul geeft. Voor een specifieke situatie wordt  $C_1$  gevonden met behulp van de rand- of beginvoorwaarde dat  $y = y_0$  op  $x = 0$ , resulterend in de ene oplossing  $y = y_0 e^{\lambda x}$ . Steeds waar  $dy/dx$  van  $y$  zelf afhangt, is de oplossing voor  $y$  een  $e$ -macht.

Een andere methode om bovenstaande differentiaalvergelijking op te lossen is de methode van het *scheiden van variabelen*. Deze laatste methode is met name handig als het rechterlid - zoals vaak het geval is - een ingewikkelder uitdrukking is die wel nog steeds een lineaire functie van  $y$  is. Bij scheiding van variabelen worden de afhankelijke variabele  $y$  en de onafhankelijke variabele  $x$  gescheiden: alle  $y$ 's gaan (door delen) naar het linkerlid en alle  $x$ 'en gaan (door vermenigvuldigen) naar het rechterlid; vergelijking (A.1) wordt dan

$$\frac{dy}{y} = \lambda dx \quad (\text{A.2})$$

Deze vergelijking integreren geeft

$$\int \frac{dy}{y} = \ln y = \lambda x + C_2 \quad (\text{A.3})$$

Dit resultaat kan omgewerkt worden tot een expliciete uitkomst voor  $y$ :

$$y = \exp(\lambda x + C_2) = C_2' \exp(\lambda x) \quad (\text{A.4})$$

waarin de integratieconstante  $C_2$  - en dus ook  $C_2'$  - gevonden moet worden door de rand- of beginvoorwaarde  $y = y_0$  op  $x = 0$  - vaak geschreven als  $y(x=0) = y_0$  - in te vullen in (A.4), omdat de oplossing (A.4) ook geldt op  $x = 0$ ; dan volgt  $C_2' = y_0$ . Bedenk dat elke integratiestap een integratieconstante oplevert, waarvoor een rand- of beginvoorwaarde vereist is om tot een specifieke oplossing te geraken.

Vaak is bij transportverschijnselen een ingewikkelder versie van differentiaalvergelijking (A.1) aan de orde. Die kan algemeen worden weergegeven als

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y + \beta \quad (\text{A.5})$$

waarin  $\alpha$  en  $\beta$  constanten zijn. Voor de oplossing van deze differentiaalvergelijking is *scheiding van variabelen* een zeer geschikte methode. Deze scheidingsstap resulteert in

$$\frac{dy}{\alpha y + \beta} = dx \quad (\text{A.6})$$

De volgende stap is nu er voor te zorgen dat in de teller van het linkerlid achter de 'd' dezelfde uitdrukking komt te staan als in de noemer van het linkerlid, opdat integratie van het linkerlid de uitdrukking  $\ln(\alpha y + \beta)$  op zal leveren. Daartoe worden eerst linker- en rechterlid van vergelijking (A.6) vermenigvuldigd met  $\alpha$ :

$$\frac{\alpha dy}{\alpha y + \beta} = \alpha dx \quad (\text{A.7})$$

Vervolgens wordt – mits  $\alpha$  en  $\beta$  constanten zijn, d.w.z. niet van  $y$  en  $x$  afhangen - het linkerlid in stapjes omgewerkt:

$$\frac{\alpha dy}{\alpha y + \beta} = \frac{d\alpha y}{\alpha y + \beta} = \frac{d(\alpha y + \beta)}{\alpha y + \beta} \quad (\text{A.8})$$

waarbij bedacht moet worden dat de afgeleide van  $(\alpha y + \beta)$  precies de  $\alpha$  is waarmee vergelijking (A.6) vermenigvuldigd is. Substitutie van vergelijking (A.8) in vergelijking (A.7) resulteert in

$$\ln(\alpha y + \beta) = \alpha x + C_3 \quad (\text{A.9})$$

Daaruit volgt weer

$$\alpha y + \beta = \exp(\alpha x + C_3) = C_3' \exp(\alpha x) \quad (\text{A.10})$$

Dan wordt  $C_3'$  gevonden door  $x = 0$ ,  $y = y_0$  in te vullen in vergelijking (A.10):

$$C_3' = \alpha y_0 + \beta \quad (\text{A.11})$$

Uiteindelijk volgt dan hiermee de expliciete oplossing voor  $y$ :

$$y = \frac{-\beta}{\alpha} + \frac{\alpha y_0 + \beta}{\alpha} \exp(\alpha x) \quad (\text{A.12})$$

## Appendix 1B

In het vakgebied van de fysische transportverschijnselen zijn soms ook *inhomogene lineaire differentiaalvergelijkingen* aan de orde. Die hebben de vorm

$$\frac{dy}{dx} = ay + b(x) \quad (\text{B.1})$$

Dit type vergelijkingen vormt een uitbreiding van het type differentiaalvergelijking (A.5) doordat de tweede term in het rechterlid nu een functie is van de onafhankelijke variabele  $x$ . Er zijn meerdere, sterk verwante methoden om dit type inhomogene differentiaalvergelijkingen (B.1) op te lossen.

Allereerst de route via de homogene differentiaalvergelijking: de eerste stap is de homogene variant van vergelijking (B.1) op te lossen, dus

$$\frac{dy}{dx} = ay \quad (\text{B.2})$$

De oplossing daarvan is:

$$y = K_1 \exp(ax) \quad (\text{B.3})$$

Let wel dat  $K_1$  niet bepaald mag worden met behulp van een begin- of randvoorwaarde, omdat elke begin- of randvoorwaarde behoort bij de *totale* oplossing voor vergelijking (B.1) en niet bij een deeloplossing. Uiteraard voldoet vergelijking (B.3) niet als oplossing van vergelijking (B.1): bij substitutie van oplossing (B.3) in linkerlid en rechterlid van vergelijking (B.1) zouden we  $0 = b(x)$  vinden. Bij oplossing (B.3) dient dus nog een term opgeteld te worden, en wel zo, dat wel voldaan wordt aan vergelijking (B.1). Omdat de vorm van die extra term sterk af zal hangen van  $b(x)$ , is er geen algemeen geldige vorm voor die term en moet die zogenaamde *particuliere oplossing* via *trial en error* (geholpen door enige ervaring) gevonden worden. Dit is een nadeel van deze methode. Als de particuliere oplossing eenmaal is gevonden, moet deze opgeteld worden bij deeloplossing (B.3), waarna de integratieconstante volgt door toepassing van de begin- of randvoorwaarde.

Als  $b(x)$  een exponentiële functie van  $x$  is, zeg  $b(x) \propto \exp(\gamma x)$ , dan kan de particuliere oplossing gevonden worden door een oplossing van de vorm  $k + h(x) \cdot \exp(\gamma x)$  te proberen. Dan worden  $k$  en  $h(x)$  (hopelijk) gevonden door deze probeerfunctie te substitueren in vergelijking (B.1). Zo niet, dan dient een andere probeerfunctie gezocht te worden. Het resultaat moet een vergelijking zijn waarin een aantal termen voorkomen die  $\exp(\gamma x)$  bevatten alsmede enkele termen zonder  $\exp(\gamma x)$ :  $k$  wordt gevonden uit de termen zonder  $\exp(\gamma x)$  – omdat die overblijven als alle termen met  $\exp(\gamma x)$  verdwijnen voor  $x = 0$  of voor  $x \rightarrow \infty$ , afhankelijk van het teken van  $\gamma$  – waarna  $h(x)$  volgt uit de rest van de vergelijking.

Als  $b(x)$  een lineaire functie van  $x$  is, dan kan de particuliere oplossing gevonden worden door te kijken naar de eindsituatie (voor  $x \rightarrow \infty$ ) als tenminste  $dy/dx$  dan heel klein is geworden.

Een tweede manier om differentiaalvergelijking (B.1) op te lossen is door middel van *variatie van constanten* waarbij op basis van oplossing (B.3) wordt beproefd of

$$y = K(x) \exp(ax) \quad (\text{B.4})$$

aan vergelijking (B.1) kan voldoen. Substitutie van vergelijking (B.4) in vergelijking (B.1) geeft dan

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dK(x)}{dx} \exp(ax) + aK(x) \exp(ax) \\ &= ay + b(x) = aK(x) \exp(ax) + b(x) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

waaruit volgt

$$\frac{dK(x)}{dx} \exp(ax) = b(x) \quad (\text{B.6})$$

en dus

$$K(x) = \int b(x) \exp(-ax) dx \quad (\text{B.7})$$

waarmee

$$y = \exp(ax) \int b(x) \exp(-ax) dx \quad (\text{B.8})$$

Let wel dat de integratieconstante die resulteert bij de integratie in het rechterlid van vergelijking (B.8) ook vermenigvuldigd dient te worden met  $\exp(ax)$ . De integratieconstante die resulteert bij de integratie in het rechterlid, wordt weer afgehandeld met de begin- of randvoorwaarde.

Een derde methode om differentiaalvergelijking (B.1) op te lossen is met een *integrerende factor*. In deze methode wordt de differentiaalvergelijking eerst herschreven tot

$$\frac{dy}{dx} - ay = b(x) \quad (\text{B.9})$$

Vervolgens wordt de gezochte oplossing  $y(x)$  vermenigvuldigd met een functie  $F(x)$  waarvoor moet gelden dat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [F(x) y(x)] &= F(x) \frac{dy(x)}{dx} + \frac{dF(x)}{dx} y(x) \\ &= F(x) \left[ \frac{dy}{dx} - ay \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Hieruit volgt dat  $F(x)$  moet voldoen aan

$$\frac{dF(x)}{dx} = -aF(x) \quad (\text{B.11})$$

waarvoor  $F(x) = \exp(-ax)$  een oplossing is. Dit resultaat substitueren in vergelijking (B.10) en combineren met vergelijking (B.9) geeft

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\exp(-ax) y(x)] &= \exp(-ax) \left[ \frac{dy}{dx} - ay \right] = \\ &= b(x) \exp(-ax) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

waaruit door integratie weer volgt

$$\exp(-ax) y(x) = \int b(x) \exp(-ax) dx \quad (\text{B.13})$$

Speciaal wanneer  $b(x)$  ook een exponentiële functie is, wordt de integratie van het rechterlid heel rechttoe rechtaan. Dankzij vergelijking (B.13) wordt de uiteindelijke oplossing van vergelijking (B.1) dan

$$y(x) = \exp(ax) \int b(x) \exp(-ax) dx \quad (\text{B.14})$$

Let wel dat de integratieconstante die resulteert bij de integratie in het rechterlid van vergelijking (B.14), ook vermenigvuldigd dient te worden met  $\exp(ax)$ . Daarna volgt de integratieconstante door toepassing van de begin- of randvoorwaarde.

# 2 Mechanismen, kentallen, krachten

## 2.1 Moleculair transport

---

### 2.1.1 *Bewegende moleculen*

Tot nu toe is voornamelijk gekeken naar stroming van massa, energie of impuls ten gevolge van ‘collectief’ gedrag. Er stroomde massa van een bepaalde component, energie van welk type dan ook, of impuls het controlevolume in (of uit) doordat dit als het ware ‘onder de arm’ werd meegenomen door een massastroom die het controlevolume in (of uit) stroomde. Je zou kunnen zeggen dat hierbij de moleculen ‘samen’gaan. De vorm van de uitdrukkingen voor de stromen in en uit is altijd een product van een massa- (of volume-)stroom en een concentratie in die stroom (per massa- of volume-eenheid). Dergelijke stromen zijn vormen van *convectief transport*.

Individuele moleculen zijn echter ook in staat om transport van massa, energie en impuls tot stand te brengen. Op moleculaire schaal bewegen de moleculen in een vloeistof of gas immers nogal chaotisch, kriskras door elkaar ten gevolge van hun warmtebeweging. Elk molecuul transporteert zo zijn eigen massa, impuls en kinetische energie. Door middel van botsingen is het molecuul in staat om zijn impuls en energie geheel of gedeeltelijk over te dragen aan andere moleculen. Op deze wijze is er op den duur ook nettotransport over grotere afstanden mogelijk. In een vaste stof is de beweeglijkheid van de individuele moleculen uiteraard veel geringer, maar ook dan zijn moleculen dankzij vibraties uitstekend in staat warmte door te geven, door te geleiden, middels botsingen met hun burens.

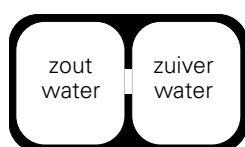
Niettegenstaande het feit dat dit zogenaamde *moleculaire transport* zijn oorzaak vindt in de bewegingen van individuele moleculen is het toch goed uit te drukken in ‘gemiddelde grootheden’ (continuümgrootheden) zoals dichtheid, (massa)-concentratie en temperatuur. Deze paragraaf beschrijft bovengenoemd transport op fenomenologische wijze.

#### *Diffusie*

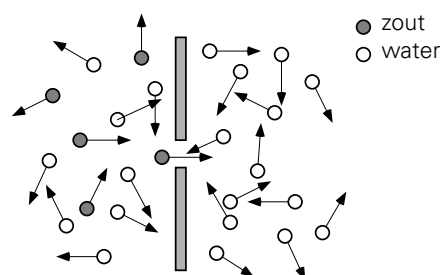
Om wat meer inzicht te krijgen in het mechanisme van moleculair transport dient het volgende experiment. Een reservoir is in twee gelijke delen verdeeld door een scheidingswand waarin een klein gat zit (zie figuur 2.1). De rechterzijde van het reservoir is geheel gevuld met zuiver water, de linkerzijde met zout water. De drukken aan beide zijden zijn zodanig dat er geen convectieve stroming van het ene naar het



andere compartiment plaatsvindt. Na voldoende lang wachten zullen beide zijden echter in gelijke mate zout water bevatten. Deze evenwichtssituatie zal nooit spontaan terugkeren naar de situatie waarin één zijde zuiver en de andere zijde zout water bevat. Hoe is dit te verklaren? Een close-up van het gaatje (zie figuur 2.2) maakt dit duidelijk.



Figuur 2.1.



Figuur 2.2.

Van beide kanten vindt op de scheidingswand een waar bombardement van moleculen plaats, en dus ook op het denkbeeldige vlak van het gaatje: net zoveel moleculen vinden hun weg door het gaatje van links naar rechts als in de omgekeerde richting, waarbij de drukken in de beide compartimenten gelijk blijven. Als we echter kijken naar de zoutmoleculen<sup>4</sup>, is het verhaal anders. Het aantal zoutmoleculen dat van de ene of de andere kant het gat weet te vinden, hangt af van de aantalldichtheid (of concentratie) van zoutmoleculen aan die kant. Aanvankelijk komen er enkel zoutmoleculen van links naar rechts door het gaatje: rechts zijn er immers nog geen zoutmoleculen. In de loop van de tijd neemt het aantal zoutmoleculen in het rechtercompartiment toe, en daarmee ook het aantal zoutmoleculen dat weer naar links kan terugkeren. Het *netto*transport van links naar rechts neemt langzamerhand af totdat de zoutconcentraties aan beide zijden gelijk zijn.

Het hierboven beschreven proces staat bekend als *moleculaire diffusie* en vindt zijn oorsprong in macroscopische concentratieverschillen. Verwacht mag worden dat de resulterende netto massastroom  $\phi_m$  op eenvoudige wijze van dit concentratieverschil afhangt: hoe groter het concentratieverschil hoe sterker de stroom, en hoe groter de afstand tussen de plaatsen van hoge en lage concentratie hoe zwakker de stroom (omdat moleculen er langer over doen een grotere afstand te overbruggen).

### Geleiding

Een analoge redenering geldt voor moleculair warmtetransport. Hier is de drijvende ‘kracht’ een temperatuurverschil. Temperatuur is eigenlijk de resultante van de kinetische energie van een zeer groot aantal atomen. Denk in dit verband maar aan een

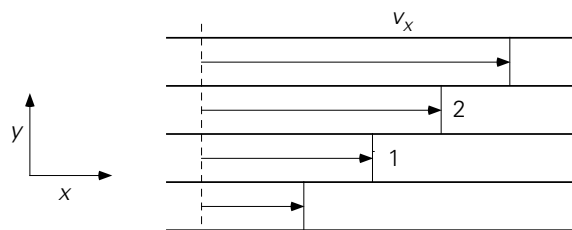
<sup>4</sup> Spreken over zoutmoleculen is feitelijk onzin, daar het oplossen van zout altijd gepaard gaat met dissociatie tot ionen. Dit is weer zo’n typisch voorbeeld van het gebruiken van een ‘engineering point of view’: het ‘uitkleden’ van de fysische werkelijkheid en het introduceren van allerlei vereenvoudigingen tot het te onderzoeken verschijnsel in essentie en in het volle licht zichtbaar wordt en gemakkelijk beschreven kan worden.

koperen staaf waarvan de linkerzijde een hogere temperatuur heeft dan de rechterzijde. Dit betekent dat gemiddeld de moleculen aan de linkerzijde een grotere kinetische energie hebben dan die ter rechterzijde. In een vaste stof botsen naburige moleculen voortdurend – als gevolg van hun trillingen rondom hun vaste positie. Het effect van deze botsingen is dat de snel trillende moleculen hun kinetische energie overdragen aan de langzaam trillende. Derhalve daalt de temperatuur aan de linkerkant van de staaf een beetje, terwijl de temperatuur rechts stijgt. Dit gaat door totdat de temperatuur aan beide zijden gelijk is en uiteraard het nettotransport van energie (warmte) nul is. De conclusie is dat een temperatuurverschil aanleiding geeft tot een energiestroom, namelijk transport van kinetische energie van moleculen.

Vanuit een macroscopisch standpunt bezien is hier gewoon sprake van een warmtetransport, of een warmte‘stroom’. Dit mechanisme van warmtetransport is niet enkel voorbehouden aan vaste stoffen; ook binnen gassen en vloeistoffen treedt dit mechanisme op. In deze laatste twee media wordt energie niet alleen via botsingen tussen naburige moleculen doorgegeven, maar ook door de kriskras-bewegingen van de moleculen. ‘Warme’ moleculen diffunderen naar een ‘koude’ plaats waar ze warmte afstaan terwijl ‘koude’ moleculen van die koude plaats weg bewegen naar plaatsen waar ze warmte opnemen. Warmtetransport als gevolg van de activiteit van individuele moleculen wordt aangeduid met de term *geleiding*. De netto warmte‘stroom’ wordt aangeduid met  $\phi_q$ .

### Impuls

Tenslotte is het ook mogelijk dat impuls door individuele moleculen wordt getransporteerd. Nu nemen de moleculen hun eigen impuls mee. Dit effect is vrij eenvoudig in te zien door naar de individuele moleculen in een *laminare* (=gelaagde, Eng. ‘laminar’) stroming te kijken. Conceptueel bestaat zo’n stroming uit aan elkaar grenzende lagen (*in het Latijn: laminae*, meervoud van *lamina*) waarbij de snelheid van laag tot laag een beetje verschillend is (zie figuur 2.3). Eenvoudigheidshalve wordt even een zuivere stof verondersteld (dat wil zeggen, dat alle moleculen hetzelfde zijn). Moleculen in laag 1 hebben gemiddeld gesproken een snelheid  $v_{x,1}$  gesuperponeerd boven op hun kriskras-beweging. Voor laag 2 geldt uiteraard dat dit gemiddeld  $v_{x,2}$  is.

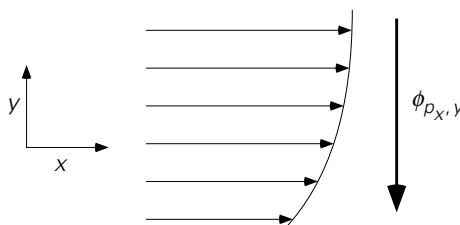


Figuur 2.3.

Een molecuul (met molecuulmassa  $m$ ) dat vanuit laag 1 naar laag 2 ‘diffundeert’ zal daar gemiddeld een impuls  $mv_{x,1}$  naar toe brengen. Ook hier is het handig om bij  $v_{x,1}$

aan een  $x$ -impulsconcentratie (in Ns/kg) te denken, zoals uitgelegd in § 1.4. Dan staat  $mv_{x,1}$  dus voor de  $x$ -impuls van dat molecuul. Evenzo zal een molecuul uit laag 2 gemiddeld een impuls  $mv_{x,2}$  naar laag 1 brengen. Bij deze diffusie gaan er (ongeveer) evenveel moleculen van laag 1 naar laag 2 als omgekeerd. Hierdoor zakt de totale impuls in laag 2: ‘impulsrijke’ moleculen worden vervangen door ‘impulsarme’. Voor laag 1 geldt juist het omgekeerde. Bovendien botsen moleculen bij aankomst in een nieuwe laag met hun nieuwe burens en wisselen daarbij  $x$ -impuls uit – daarmee de snelheidsverschillen tussen de *laminae* verkleinend.

Vanuit macroscopische standpunt bezien is er weer sprake van een netto-impulsstroom; let wel *er wordt nu  $x$ -impuls in de  $y$ -richting getransporteerd!* Zie figuur 2.4. Dit netto  $x$ -impulstransport, aangeduid<sup>5</sup> met  $\phi_{p_x}$ , is in dit geval in de negatieve  $y$ -richting, van laagjes met een hogere naar laagjes met een lagere  $x$ -impulsconcentratie, omdat  $dv_x/dy$  positief is.



Figuur 2.4.

### Samenvatting

Voor moleculair transport, op grond van de thermische beweging van individuele moleculen, geldt:

concentratieverschil → massatransport  $\phi_m$  (van een bepaalde component)

temperatuurverschil → energietransport  $\phi_q$  (of warmtestroom)

snelheidsverschil → impulstransport  $\phi_p$

In het eerste geval spreken we van diffusie, in het tweede van (warmte) geleiding. In het derde geval moeten we duidelijk maken welke impuls in welke richting getransporteerd wordt door de individuele moleculen: bij een laminaire stroming in de  $x$ -richting resulteert de snelheidsgradiënt  $dv_x/dy$  in een netto-transport van  $x$ -impuls in de  $y$ -richting. Als  $dv_x/dy$  positief is gaat het moleculaire impulstransport in de negatieve  $y$ -richting, terwijl voor negatieve  $dv_x/dy$  het transport in de positieve  $y$ -richting verloopt.

<sup>5</sup> In deze elementaire beschouwing gebruiken wij, conform het gebruik van het symbool  $P_x$  in § 1.4, de symbolen  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  om de impuls in de respectievelijke richtingen te duiden. Verderop zullen we weer overgaan op de gebruikelijke  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  voor impulsconcentraties danwel snelheden.

### 2.1.2 Fick, Fourier, Newton

Om te komen tot een praktische beschrijving van alle drie de bovengenoemde moleculaire transportmechanismen zijn eenvoudige vergelijkingen opgesteld – geldig voor een grote klasse stoffen – die de drijvende krachten, bovengenoemde ‘verschillen’, koppelen aan de transportsnelheden. Zoals bij de bespreking van massadiffusie al is opgemerkt, geeft een groter concentratieverschil  $\Delta c$  aanleiding tot een grotere transportsnelheid, terwijl een grotere afstand  $L$  waarover dit verschil staat tot een kleinere transportstroom leidt. Het blijkt dat de verhouding  $\Delta c/L$  bepalend is. Dit blijkt niet alleen over eindige afstanden te gelden, maar ook lokaal.

Nauwkeuriger geformuleerd: de afgeleide van de concentratie  $c$  naar de plaats  $x$ , dus de lokale  $dc/dx$ , is maatgevend voor de lokale massastroom. Uiteraard stroomt de massa van een plaats met hoge concentratie naar een met lage concentratie; derhalve is de stroom  $\phi_m$  een functie van  $(-dc/dx)$ . Een soortgelijke redenering is van toepassing op warmtegeleiding en moleculair impulstransport als functie van respectievelijk temperatuurgradiënt en snelheidsgradiënt.

Het is verder eenvoudig in te zien dat, zoals bij iedere debiet of transport, ook de grootte van moleculair transport recht evenredig is met de grootte van het vlak waardoor het transport plaatsvindt. Daarom is het handig om het begrip *flux* in te voeren. Een flux is een stroom of transport per oppervlakte eenheid (het vlak staat loodrecht op de transportrichting). Als er dus een massastroom  $\phi_m$  door het oppervlak  $A$  gaat (met  $A$  loodrecht op de richting van  $\phi_m$ ) dan is de flux

$$\phi_m'' = \frac{\phi_m}{A} \quad (2.1)$$

Het superscript '' geeft aan dat het hier<sup>6</sup> om een flux gaat, d.w.z. om een stroom (of debiet) per m<sup>2</sup>.

De vergelijkingen voor het moleculaire transport van een component, van warmte, en van impuls worden dan ook gegeven in termen van hun fluxen. In de meest eenvoudige benadering wordt een flux recht evenredig gesteld met de bijbehorende gradiënt. De drie vergelijkingen luiden dan:

---

<sup>6</sup> Verderop zullen we bij  $\phi$  ook gebruik maken van een enkele ' om aan te geven dat het om een stroom per lengte-eenheid gaat: dus bv.  $\phi_m'$ .

$$\text{massaflux} \quad \phi''_{m,x} = -D \frac{dc}{dx} \quad \text{de wet van Fick} \quad (2.2)$$

$$\text{warmteflux} \quad \phi''_{q,x} = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad \text{de wet van Fourier} \quad (2.3)$$

$$\text{y-impulsflux} \quad \phi''_{p_y,x} = -\mu \frac{dv_y}{dx} \quad \text{de (viscositeits)wet van Newton} \quad (2.4)$$

Alle drie de stromen staan in de  $x$ -richting. Natuurlijk impliceert de wet van Newton dat er ook een  $x$ -impulsflux in de  $y$ -richting mogelijk is. Het minteken in deze wetten maakt dat het transport altijd van hoge naar lage concentratie verloopt; de richting van de flux (in positieve dan wel negatieve  $x$ -richting) hangt natuurlijk altijd af van het teken van de betrokken gradiënt (waarde van de gradiënt kleiner dan wel groter dan nul).

De evenredigheidscoëfficiënt  $D$  heet de *diffusiecoëfficiënt* en heeft als SI-eenheid  $\text{m}^2/\text{s}$ . De coëfficiënt  $\lambda$  staat voor de *warmtegeleidingscoëfficiënt* die als SI-eenheid  $\text{W}/\text{mK}$  heeft. De coëfficiënt  $\mu$  is de *dynamische viscositeit* met als SI-eenheid  $\text{Ns}/\text{m}^2$ ; deze laatste SI-eenheid laat zien dat  $\mu$  staat voor de impuls (in  $\text{Ns}$ ) die in een laminaire stroming per oppervlakte-eenheid wordt getransporteerd over het grensvlak heen tussen twee *laminae*.

De wet van Fourier is het meest algemeen toepasbaar van de 3 wetten. De wet van Fick geldt enkel voor binaire systemen (dit zijn systemen van slechts twee componenten) en is ook dan nog aan verdere restricties onderhevig. Dit komt in hoofdstuk 4 nog uitgebreid aan de orde. Ook de wet van Newton is slechts beperkt geldig. Vloeistoffen en gassen die aan deze wet gehoorzamen, noemt men *Newtonse vloeistoffen*. Dergelijke vloeistoffen zijn eerder uitzondering dan regel. Vloeistoffen die niet aan de wet van Newton gehoorzamen, worden *niet-Newtonse vloeistoffen* genoemd. Ook dit komt later (in hoofdstuk 5) nog uitgebreid ter sprake.

In overeenstemming met onze eerdere aanbeveling om te werken in concentraties van componenten, energie en impuls zouden we deze wetten liever formuleren in termen van :

*massaconcentratieverschil* → *massastroom*

*energieconcentratieverschil* → *energiestroom*

*y-impulsconcentratieverschil* → *y-impulsstroom*

De diffusiewet van Fick voldoet al aan die wens. De overige twee zijn voor het bijzondere geval van stoffen met een *constante*  $\rho c_p$  respectievelijk *constante*  $\rho$  te herschrijven:

$$\text{Fourier: } \phi_{q,x}'' = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{d}{dx}(\rho c_p T) = -a \frac{d}{dx}(\rho c_p T) \quad (2.5)$$

mits  $\rho c_p = \text{constant}$

$$\text{Newton: } \phi_{p_y,x}'' = -\mu \frac{dv_y}{dx} = -\frac{\mu}{\rho} \frac{d}{dx}(\rho v_y) = -\nu \frac{d}{dx}(\rho v_y) \quad (2.6)$$

mits  $\rho = \text{constant}$

De combinatie  $\rho c_p T$  is de concentratie van thermische energie (eenheid  $\text{J/m}^3$ ). De coëfficiënt  $a \equiv \lambda/\rho c_p$  heet de *warmtevereffeningscoëfficiënt* en heeft weer dezelfde eenheid als  $D$ , nl.  $\text{m}^2/\text{s}$ . De combinatie  $\rho v_y$  is de  $y$ -impulsconcentratie (in  $\text{Ns/m}^3$ ); de bijbehorende coëfficiënt  $\nu \equiv \mu/\rho$  is de *kinematische viscositeit* (eenheid weer  $\text{m}^2/\text{s}$ ).

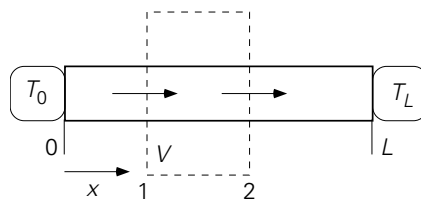
Merk op dat de vergelijkingen (2.2), (2.5) en (2.6) volstrekt analoog zijn, waarbij alle drie coëfficiënten  $D$ ,  $a$  en  $\nu$  dezelfde eenheid  $\text{m}^2/\text{s}$  hebben. Deze analogie tussen moleculair stoftransport, warmtetransport en impulstransport was ook al een typisch kenmerk bij de techniek van het balansen opstellen en bij het beschrijven van convectief transport in hoofdstuk 1.

Let wel: de numerieke waarden van de dynamische viscositeit  $\mu$  en de kinematische viscositeit  $\nu$  kunnen meerdere orden van grootte verschillen; zo geldt voor water (bij  $T = 20^\circ\text{C}$  en  $p = 1 \text{ bar}$ ) dat  $\mu = 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$  en  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Het is dus zaak deze twee viscositeiten goed uit elkaar te houden.

### Voorbeeld 2.1. Warmtegeleiding in een koperen staaf

Een koperen staaf (met constante dwarsdoorsnede en lengte  $L$ ) wordt aan beide uiteinden op constante temperatuur gehouden:  $T_0$  op  $x = 0$  resp.  $T_L$  op  $x = L$  met  $T_0 > T_L$ . De staaf is verder thermisch geïsoleerd van de omgeving.

Wat is in de stationaire situatie het temperatuurprofiel in de staaf? Hoe groot is dan de warmtestroom door de staaf?



Figuur 2.5.

Omdat gevraagd wordt naar het temperatuurprofiel *in* de staaf, heeft het geen zin als controlevolume de gehele staaf te kiezen en een zgn. *macro-warmtebalans* op te stellen: deze zou hooguit de gemiddelde temperatuur van de staaf kunnen koppelen aan warmtestromen in en uit. In plaats daarvan dient een klein,

representatief controlevolume gekozen te worden binnen de staaf, zoals geschetst in figuur 2.5, en dan over dat kleine(re) controlevolume een zgn. *micro-warmtebalans* op te stellen.

Omdat de staaf afgezien van de beide uiteinden geïsoleerd is, zal het warmte-transport uitsluitend in de lengterichting van de staaf (van het ene uiteinde naar het andere) plaatsvinden. Het controlevolume mag daarom wel de gehele dwarsdoorsnede van de staaf beslaan: in de dwarsrichting gebeurt verder toch niets. Het betreft hier derhalve een zuiver ééndimensionaal transportprobleem (zonder warmteproductie).

In een stationaire situatie luidt de warmtebalans voor het controlevolume  $V$  van figuur 2.5 derhalve:

$$0 = \phi_q \Big|_{x=x_1} - \phi_q \Big|_{x=x_2} \quad (2.7)$$

waarbij, vanwege het gegeven  $T_0 > T_L$ , de eerste term aan de rechterkant de 'instroom' voorstelt en de tweede term de 'uitstroom'. Vanwege de constante dwarsdoorsnede van de staaf

$$0 = \phi_q'' \Big|_{x=x_1} - \phi_q'' \Big|_{x=x_2} \quad (2.8)$$

Aangezien er enkel sprake van warmtegeleiding is, kan voor de fluxen geschreven worden

$$\phi_q'' \Big|_{x=x_1} = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_1} \quad \text{en} \quad \phi_q'' \Big|_{x=x_2} = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_2} \quad (2.9)$$

Dit substitueren in vergelijking (2.8) laat zien dat de twee warmtefluxen door de vlakken 1 en 2 gelijk zijn, m.a.w. dat – mits  $\lambda$  constant is – de temperatuur-gradiënt onafhankelijk is van de plaats:

$$\frac{dT}{dx} = C_1 = \text{constant} \quad (2.10)$$

Oplossen van deze heel eenvoudige differentiaalvergelijking geeft, met behulp van de randvoorwaarden  $x = 0 \rightarrow T = T_0$  en  $x = L \rightarrow T = T_L$ :

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0 \quad (2.11)$$

Het temperatuurprofiel is dus lineair en daarmee wordt de warmtestroom door de staaf

$$\phi_q = -\lambda A \frac{dT}{dx} = \lambda (T_0 - T_L) \cdot \frac{A}{L} \quad (2.12)$$

waarbij  $A$  het oppervlak van de dwarsdoorsnede van de staaf is.

Bedenk dat eerder, in § 1.2.2, ook een klein controlevolume *binnen* de reactor werd gekozen – om het concentratieprofiel langs de reactor te bepalen. Toen kozen we een dun plakje  $dx$ , vanwege de chemische reactie, om de afgeleide  $dc/dx$  en de bijbehorende differentiaalvergelijking te verkrijgen. Dat is in het geval hierboven niet nodig. Wel illustreert bovenstaande voorbeeld opnieuw het gebruik van een *microbalans* om een profiel, in dit geval een temperatuurprofiel, af te leiden.

5

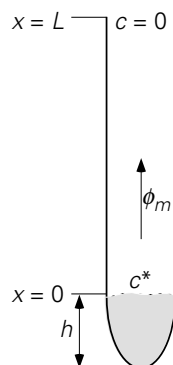
### Voorbeeld 2.2. Verdamping van naftaleen uit een buis

Een lange, smalle buis (lengte 25 cm, inwendige diameter  $D = 1$  cm) is gedeeltelijk gevuld met vast naftaleen. De bovenkant van de buis staat in open verbinding met de lucht (zie figuur 2.6). De buislengte boven het naftaleen is 20 cm. De temperatuur van de omgeving is 20 °C.

Hoe lang duurt het voordat een laagje van 1 mm dikte van het naftaleen verdampt is?

Gegevens naftaleen:

diffusiecoëfficiënt in lucht	$D = 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
dichtheid vast naftaleen	$\rho = 1150 \text{ kg/m}^3$
molaire massa	$M = 106 \text{ kg/kmol}$
dampspanning bij 20 °C	$p^* = 0,05 \text{ mm Hg}$



Figuur 2.6.

Een massabalans opstellen voor het vaste naftaleen in de buis levert:

$$\frac{dM}{dt} = \rho A \frac{dh}{dt} = -\phi_{m,\text{uit}} = -A \cdot \phi_{m,\text{uit}}'' \quad (2.13)$$



Hierin is  $A$  de oppervlakte van een dwarsdoorsnede van de buis. Om verder te komen moet de flux van dampvormig naftaleen bepaald worden. Er verdwijnt enkel naftaleen ten gevolge van diffusie. Aan het naftaleen-lucht-grensvlak heerst in de gasfase de naftaleenconcentratie  $c^*$ , die met behulp van de ideale gaswet te schatten is uit de locale dampspanning  $p^*$ :

$$c^* = M \frac{p^*}{RT} \quad (2.14)$$

waar  $p^*$  de evenwichtsdampspanning is boven het vaste naftaleen die van de temperatuur afhangt. Boven aan de buis is door de open verbinding met de omringende lucht nauwelijks naftaleen aanwezig:  $c(L) \approx 0$ . Er is dus duidelijk een drijvend concentratieverschil tussen  $x = 0$  en  $x = L$ , en derhalve is er transport door diffusie.

Aangezien vast naftaleen slechts zeer langzaam wegdiffundeert vanwege de uiterst lage dampspanning bij kamertemperatuur – de drijvende kracht voor diffusie is heel klein – kan de diffusie in de buis als quasi-stationair beschouwd worden: het is alsof op elk moment de toestand stationair is (dit moet achteraf wel gecontroleerd worden). Uiteraard verliest deze aanname over langere tijd zijn zin.

In een afleiding geheel analoog aan die welke leidt tot vergelijking (2.11), met de warmteflux  $\phi_q'' = -\lambda dT/dx$  vervangen door de massaflux  $\phi_m'' = -ID dc/dx$ , kan het volgende resultaat worden verkregen:

$$c(x) = \frac{c(L) - c(0)}{L} x + c(0) = c^* \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad (2.15)$$

Daaruit volgt voor de flux op  $x = 0$  (aan het naftaleenoppervlak):

$$\phi_m'' = -ID \frac{dc}{dx} = ID \frac{c^*}{L} \quad (2.16)$$

Combineren van de vergelijkingen (2.13), (2.14) en (2.16) levert nu

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{IDM p^*}{\rho RTL} \quad (2.17)$$

Oplossen van deze differentiaalvergelijking geeft:  $\Delta h = 1$  mm als

$$\Delta t = \frac{\rho RTL}{IDM p^*} \Delta h = 1,1 \cdot 10^8 \text{ s} \approx 3,6 \text{ years} \quad (2.18)$$

Merk op dat de eerdere aanname over de snelheid van de diffusie dus correct is. Overigens is het gebruik van de wet van Fick voor deze situatie niet geheel juist;

enkel omdat de dampspanning van naftaleen zo laag is, geeft de wet van Fick een voldoende nauwkeurig resultaat. Deze situatie komt in § 4.3 opnieuw aan de orde.

⑤

Convectief transport is in het algemeen een veel effectievere manier om een bepaalde grootte te transporteren dan moleculair (ook wel diffusief) transport. Alhoewel de snelheid van een vloeistofpakketje veel lager is dan die van een molecuul – een typische vloeistofsnelheid is 1 m/s, terwijl de random snelheid van een watermolecuul bij kamertemperatuur van de orde van 600 m/s is – bewegen de moleculen bij convectief transport als collectief. In het geval van moleculair transport gedragen de moleculen zich als echte individuen die ieder hun eigen weg gaan; bovendien is hun beweging niet gericht. Bij convectief transport tenslotte is het de grootte zelf (bijvoorbeeld: de thermische energie) die telt, terwijl het bij moleculair transport om gradiënten in deze grootte gaat.

### Samenvatting

Voor een grote klasse stoffen is moleculair transport met eenvoudige fenomenologische wetten te beschrijven. Het transport van massa, thermische energie en impuls wordt beschreven met resp. de wetten van Fick, Fourier en Newton:

$$\phi''_{m,x} = -ID \frac{dc}{dx} ; \phi''_{q,x} = -\lambda \frac{dT}{dx} ; \phi''_{p_y,x} = -\mu \frac{dv_y}{dx}$$

Alle drie de wetten koppelen stroom, of liever flux, aan de drijvende gradiënten via een evenredigheidsconstante: respectievelijk de diffusiecoëfficiënt  $ID$ , de warmtegeleidingscoëfficiënt  $\lambda$  en de dynamische viscositeit  $\mu$ . De wet van Fourier is het meest algemeen toepasbaar, voor de andere twee gelden strengere eisen.

Mits  $\rho$  en  $\rho c_p$  constant zijn, kunnen alle drie de wetten geschreven worden als

$$\text{flux van } \left\{ \begin{array}{l} \text{massa} \\ \text{thermische energie} \\ \text{y-impuls} \end{array} \right\} \propto - \frac{d}{dx} \left\{ \begin{array}{l} \text{massaconcentratie} \\ \text{thermische energieconcentratie} \\ \text{y-impulsconcentratie} \end{array} \right\}$$

voor moleculair transport in de  $x$ -richting. In deze formulering, die de sterke analogie van moleculair stof-, warmte- en impulstransport illustreert, zijn de evenredigheidsconstanten resp. de diffusiecoëfficiënt  $ID$ , de warmtevereffeningscoëfficiënt  $a$  en de kinematische viscositeit  $\nu$ , alle in  $\text{m}^2/\text{s}$ .

Het minteken in al deze wetten maakt dat het transport altijd van hoge naar lage concentratie verloopt; de richting van de flux hangt af van het teken van de concentratiegradiënt.

### 2.1.3 Transportcoëfficiënten

Bij het naftaleenvoorbeeld hierboven is de nogal hoge waarde voor de tijd  $\Delta t$  voor een belangrijk deel te danken aan het feit dat de diffusiecoëfficiënt  $D$  zo'n kleine waarde heeft. Om in de praktijk een snelle schatting van de grootte van de diverse stromen te kunnen maken is het handig de grootte-orde van de diverse transportcoëfficiënten (dit zijn  $D$ ,  $\lambda$ ,  $a$ ,  $\mu$  en  $\nu$ ) te kennen. Hiervoor is onderstaande tabel handig.

	$D$ (m <sup>2</sup> /s)	$\nu$ (m <sup>2</sup> /s)	$a$ (m <sup>2</sup> /s)	$\lambda$ (W/m·K)
Gas	10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-2</sup>
Vloeistof	10 <sup>-8</sup> à 10 <sup>-9</sup>	10 <sup>-5</sup> à 10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-7</sup>	10 <sup>-1</sup>
Vast	10 <sup>-11</sup> à 10 <sup>-15</sup>			1 à 500

Bedenk dat deze transportcoëfficiënten stoffeigenschappen zijn die in het algemeen afhankelijk zijn van de atomaire of moleculaire samenstelling van een stof en van druk en temperatuur.

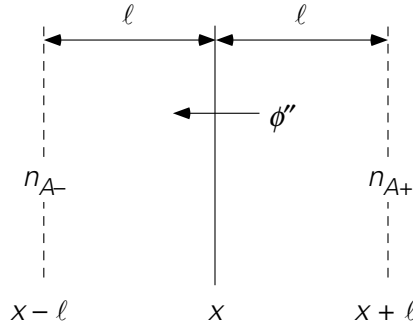
Voor gassen zijn met behulp van de zogenaamde *kinetische gastheorie* bovenstaande schattingen te maken; verder kan met de kinetische gastheorie bepaald worden hoe voor gassen deze transportcoëfficiënten afhangen van druk en temperatuur. Voor de diffusiecoëfficiënt is bijvoorbeeld het volgende versimpelde model op te stellen.

Laat de moleculen van een gas opgevat mogen worden als harde bollen. Deze bollen hebben een gemiddelde snelheid  $v_m$  en reizen gemiddeld een afstand  $\ell$  tot ze botsen (waar  $\ell$  staat voor de gemiddelde vrije weglengte). Stel nu dat er twee soorten moleculen zijn – A en B – allebei ongeveer even groot en even zwaar. De moleculen B vormen de achtergrond terwijl de moleculen A daartussen diffunderen met  $n_A$  het aantal moleculen A per volume-eenheid. Beschouw dan een vlak op positie  $x$  (zie figuur 2.7). Neem nu eens aan dat het aantal moleculen A links van het vlak ( $n_{A-}$ ) ietsje kleiner is dan rechts van het vlak ( $n_{A+}$ ). De vraag is nu hoe groot dan de stroom van A moleculen door het vlak is?

De beweging van de moleculen is random. Voor de eenvoud kan gesteld worden dat  $\frac{1}{3}$  van alle moleculen in de  $x$ -richting beweegt (evenzo  $\frac{1}{3}$  in de  $y$ -richting en  $\frac{1}{3}$  in de  $z$ -richting). Hiervan de helft, dus  $\frac{1}{6}$  van het totaal, beweegt in de positieve  $x$ -richting.

Gedurende een klein tijdsinterval  $\tau$  passeren derhalve  $\frac{1}{6}$  van alle moleculen die zich aan de linkerkant, binnen een afstand  $v_m \cdot \tau$  van het vlak  $x$  bevinden, dit vlak. Hetzelfde geldt voor de moleculen ter rechterzijde van  $x$ . Netto geeft dit een flux (= aantal deeltjes per oppervlakte-eenheid en per tijdseenheid):

$$\phi'' = \frac{\frac{1}{6}n_{A-} \cdot v_m \tau - \frac{1}{6}n_{A+} \cdot v_m \tau}{\tau} \quad (2.19)$$



Figuur 2.7.

Een schatting van de twee deeltjesdichtheden wordt verkregen door de dichtheid  $n_{A-}$  te nemen in vlak  $x - \ell$ , d.w.z. op één gemiddelde vrije weglengte van het vlak  $x$  af. De deeltjes die hier zitten, passeren nog juist het vlak  $x$  zonder te botsen. Neem evenzo  $n_{A+}$  in het vlak  $x + \ell$ . Daarmee geldt voor de deeltjesflux

$$\phi_n'' = \frac{1}{6} v_m \cdot [n_A(x - \ell) - n_A(x + \ell)] \quad (2.20)$$

Nu is

$$n_A(x \pm \ell) \approx n_A(x) \pm \frac{dn_A}{dx} \cdot \ell \quad (2.21)$$

Dus wordt vergelijking (2.20)

$$\phi_n'' = -\frac{1}{3} v_m \cdot \ell \cdot \frac{dn_A}{dx} \quad (2.22)$$

Hiervan is eenvoudig een massaflux te maken door te vermenigvuldigen met de molecuulmassa  $m$ :

$$\phi_m'' = -\frac{1}{3} v_m \cdot \ell \cdot \frac{dc_A}{dx} \quad (2.23)$$

Vergelijking (2.23) spiegelen aan vergelijking (2.2) geeft voor de diffusiecoëfficiënt:

$$D = \frac{1}{3} v_m \cdot \ell \quad (2.24)$$

(Dit resultaat is ook met een veel precieuzere redenering te vinden.) Vergelijking (2.24) laat zien dat een diffusiecoëfficiënt (in  $\text{m}^2/\text{s}$ ) in een ideaal gas beschreven kan worden in termen van het product van een moleculaire snelheid (in  $\text{m}/\text{s}$ ) en de gemiddelde vrije weglengte (in  $\text{m}$ ).

De gemiddelde snelheid  $v_m$  is te bepalen uit

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad (2.25)$$

waar  $k_B$  de constante van Boltzmann is, en dus wordt gevonden:

$$v_m = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (2.26)$$

Hierin is  $R$  de gasconstante en  $M$  de molaire massa.

De vrije weglengte is omgekeerd evenredig met de deeltjesdichtheid  $n$  en het frontale oppervlak van de deeltjes  $\pi\sigma^2$ , waarin  $\sigma$  de diameter van de harde bolletjes is. Omschrijven met behulp van  $N_{\text{avo}}$ , het getal van Avogadro, levert op:

$$\ell \propto \frac{1}{n \sigma^2} = \frac{m N_{\text{avo}}}{m n \cdot N_{\text{avo}} \sigma^2} = \frac{M}{\rho} \cdot \frac{1}{N_{\text{avo}} \sigma^2} \quad (2.27)$$

Voor de grootte van  $ID$  en de variatie van  $ID$  met  $T$ ,  $p$  en  $\rho$  volgt dan (althans voor ideale gassen!):

$$ID \propto \frac{\sqrt{3RTM}}{\rho} \propto \frac{\sqrt{T}}{\rho} \quad (2.28)$$

Met behulp van hetzelfde simpele model<sup>7</sup> zijn ook de andere transportcoëfficiënten te schatten. Immers bij warmtegeleiding gaat het om dezelfde stromen die nu gemiddeld  $\rho c_p T$  meenemen. Bij moleculair impulstransport is dit gemiddeld  $\rho v$ . Daarbij nemen we aan dat de uitwisseling van energie en impuls tijdens een botsing snel is in vergelijking met de beweging van de moleculen. Dus geldt voor  $a$  en  $v$  precies hetzelfde als voor  $ID$ . Dientengevolge kan direct opgeschreven worden:

$$\lambda \propto \left(\frac{1}{3} v_m \cdot \ell\right) \cdot \rho c_p \propto \sqrt{RTM} \cdot c_p \propto \sqrt{T} \quad (2.29)$$

$$\mu \propto \left(\frac{1}{3} v_m \cdot \ell\right) \cdot \rho \propto \sqrt{RTM} \propto \sqrt{T} \quad (2.30)$$

Het blijkt dus dat  $\lambda$  en  $\mu$  drukonafhankelijk zijn.

<sup>7</sup> Bovenstaande analyse is gebaseerd op de aanname dat moleculen harde, onelastische bollen zijn. Een meer complexe analyse die een zeker elastisch gedrag van moleculen in rekening brengt, leidt tot

$$\lambda \propto T^{0,70 \text{ à } 0,75}, \quad \mu \propto T^{0,65 \text{ à } 0,70}, \quad ID \propto T^{0,7 \text{ à } 0,8} / \rho$$

Deze experimenteel bevestigde resultaten gelden voor reële gassen bij niet al te extreem hoge drukken en temperaturen.

Voor *vloeistoffen* kan afgeleid worden voor het geval van diffusie van moleculen A tussen moleculen B door, dat voor de diffusiecoëfficiënt geldt

$$D_{AB} \approx \frac{k_B T}{6\pi\mu_B\sigma_A} \quad (2.31)$$

met  $k_B$  = constante van Boltzmann,  $\mu_B$  = viscositeit van vloeistof B en  $\sigma_A$  = straal van molecuul A. Deze vergelijking staat bekend als de Stokes-Einstein vergelijking.

De viscositeit van vloeistoffen is in sterke mate afhankelijk van de temperatuur. Een ruwe benadering is gegeven door Andrade:

$$\log \mu \sim \frac{1}{T} \quad (2.32)$$

### Samenvatting

In deze paragraaf hebben we gekeken naar de grootte-orde van de transportcoëfficiënten. De tabel in deze paragraaf geeft hiervan een goed overzicht.

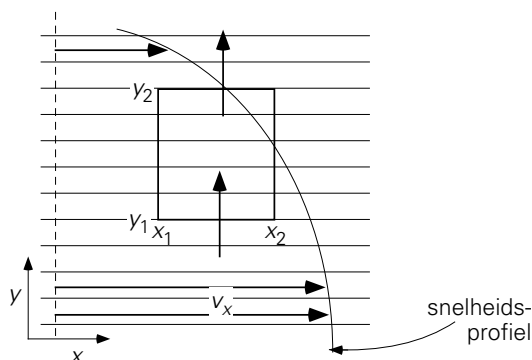
Met behulp van eenvoudige kinetische gastheorie is gevonden dat voor ideale gassen de diffusiecoëfficiënt opgevat kan worden als het product van een moleculaire snelheid en een vrije weglengte. Volgens dit model hangen de transportcoëfficiënten voor ideale gassen als volgt van de temperatuur en de druk (de dichtheid) af:

$$D \propto \frac{\sqrt{T}}{\rho}, \quad \lambda \propto \sqrt{T}, \quad \mu \propto \sqrt{T}$$

Bij vloeistoffen zijn de transportcoëfficiënten alleen een functie van de temperatuur: de diffusiecoëfficiënt is recht evenredig met de temperatuur, terwijl voor de dynamische viscositeit  $\log \mu \sim \frac{1}{T}$  geldt.

#### 2.1.4 Schuifspanning: een alternatieve beschrijving van moleculair impulstransport

Bij de behandeling van de impulsbalans in § 1.4 is gesteld dat krachten producenten van impuls zijn. Van dit idee kan gebruik gemaakt worden om een alternatieve zienswijze op het moleculaire impulstransport in te voeren. Beschouw daartoe nogmaals een controlevolume dat zich in een nette, gelaagde (= laminaire) stroming bevindt (zie figuur 2.8).



Figuur 2.8.

De stroming is stationair en staat in de  $x$ -richting, waarbij  $v_x$  een functie is van de  $y$ -coördinaat:  $v_x = v_x(y)$ . De convectieve  $x$ -impulsstromen door de vlakken  $x = x_1$  en  $x = x_2$  zijn even groot (dit is eenvoudig aan te tonen met een massabalans!) en vallen tegen elkaar weg. De viscositeitswet van Newton toegepast op deze situatie impliceert dat er door het vlak  $y = y_1$  een moleculaire  $x$ -impulsstroom  $\phi_{p_x, y} \Big|_{y=y_1}$  het controle-volume inkomt, als gevolg van de snelheidsgradiënt  $dv_x/dy$  in het vlak  $y = y_1$ , terwijl er door het vlak  $y = y_2$  een soortgelijke stroom  $\phi_{p_x, y} \Big|_{y=y_2}$  uitgaat. In de stationaire situatie ziet de  $x$ -impulsbalans er daarom als volgt uit:

$$0 = \phi_{p_x, y} \Big|_{y=y_1} - \phi_{p_x, y} \Big|_{y=y_2} + \sum F_x \quad (2.33)$$

Het is echter ook mogelijk deze situatie met andere ogen te bekijken, gegeven de interactie van aan elkaar grenzende lagen die het resultaat is van moleculaire overstapjes: een sneller bewegende laag zal een langzamere meesleuren, en een langzamer bewegende laag zal een snellere vertragen. We kunnen deze interactie wel aanduiden als ‘wrijving’ (frictie), of als wrijvingskrachten. Zo’n wrijvingskracht is niets meer of minder dan een andere interpretatie (of ander model) van het netto moleculaire impulstransport  $\phi_{p_x, y}$ . Langs het vlak  $y = y_1$  werkt een wederzijdse wrijvingskracht tussen de laag direct onder het vlak  $y = y_1$  en de laag vlak erboven – de wederkerigheid vanwege de derde wet van Newton uit de klassieke mechanica (‘actie = – reactie’).

De wrijvingskracht is natuurlijk evenredig met de grootte van het vlak  $A$  waarop deze werkt. Het is daarom beter te kijken naar de kracht per oppervlakte-eenheid – zoals ook de vergelijkingen (2.2), (2.3) en (2.4) fluxen betreffen. Omdat de kracht langs het oppervlak werkt (en niet er loodrecht op staat) wordt de kracht per oppervlakte-eenheid niet opgevat als een druk, maar als een *schuifspanning* waar-voor het symbool  $\tau$  wordt gebruikt.

Kortom:

$$\tau_{yx} \equiv \phi''_{p_x, y} \quad (2.34)$$

Er is één zeer belangrijke afspraak met het begrip schuifspanning verbonden: de keuze van de richting waarin deze kracht in het algemeen staat. De conventie is:

$\tau_{yx}|_{y=y_1}$  is de schuifspanning die werkt in de  $x$ -richting in (of langs) het vlak  $y = y_1$  en die de vloeistoflaag met  $y$ -coördinaat net kleiner dan  $y_1$  uitoefent op de laag met  $y$ -coördinaat juist groter dan  $y_1$ .

Let op dat – bij de ééndimensionale stromingen waartoe wij ons hier beperken – het eerste subscript van  $\tau_{yx}$  verwijst naar de richting loodrecht op de stromingsrichting; het tweede subscript heeft betrekking op de  $x$ -richting waarin òf  $\tau_{yx}$  òf  $-\tau_{yx}$  werkt.

De schuifspanning  $\tau_{yx}$  komt per definitie met een *positief* teken in een krachten-balans voor. Of  $\tau_{yx}$  in de positieve dan wel negatieve  $x$ -richting werkt, afhankelijk van het teken van  $\tau_{yx}$  en dus – vanwege Newton's viscositeitswet – van het teken van  $dv_x/dy$ , is niet van belang bij het opstellen van de krachtenbalans, maar zal blijken als resultaat van de verdere afleiding.

Voor de situatie die hier aan de orde is (figuur 2.8) kan dus in plaats van  $\phi_{p_x, y}|_{y=y_1}$  ook geschreven worden  $\tau_{yx}|_{y=y_1} \cdot A$ . De impulsstroom  $\phi_{p_x, y}|_{y=y_2}$  is ook te vervangen door een schuifspanning: de laag met  $y < y_2$  oefent een schuifspanning  $\tau_{yx}|_{y=y_2}$  uit op de laag er net boven met  $y > y_2$ .

Wederom dankzij de derde wet van Newton oefent dus de laag net boven het vlak  $y = y_2$  een schuifspanning  $-\tau_{yx}|_{y=y_2}$  uit op de laag eronder, die deel uitmaakt van het controlevolume. In vergelijking (2.33) kan de moleculaire 'uit'stroom van  $x$ -impuls –  $\phi''_{p_x, y}|_{y=y_2}$  dus vervangen worden door de kracht  $-\tau_{yx}|_{y=y_2} \cdot A$ .

Op basis van bovenstaande alternatieve zienswijze – we noemen een dergelijke zienswijze veelal een 'model' – en de introductie van het begrip *schuifspanning* kan de *impulsbalans* van vergelijking (2.33) dus ook als een *krachtenbalans* geschreven worden:

$$0 = A \cdot \tau_{yx}|_{y=y_1} - A \cdot \tau_{yx}|_{y=y_2} + \sum \text{overige krachten in de } x\text{-richting} \quad (2.35)$$



Vergelijking (2.33) en vergelijking (2.35) zijn dus volkomen identiek en verschillen slechts door het model (of het beeld) dat erbij hoort:

vergelijking (2.33) → netto molecuulair  $x$ -impulstransport ten gevolge van individuele molecuulbewegingen

vergelijking (2.35) → schuifspanning ten gevolge van over elkaar wrijvende lagen

### **Samenvatting**

1. Er zijn twee manieren om tegen molecuulair impulstransport aan te kijken: als een soort diffusie van impuls: in termen van individuele molecuulbewegingen, leidend tot fluxen zoals  $\phi''_{p_x, y}$ .
2. als een wrijvingskracht per oppervlakte-eenheid: een schuifspanning  $\tau_{yx}$ , die twee lagen, die met verschillende snelheid over elkaar bewegen, op elkaar uitoefenen.

Met behulp van deze interpretaties kan voor een eenvoudige laminaire stroming onder stationaire condities de impulsbalans ook opgevat worden als een krachtenbalans.

Er geldt een belangrijke tekenafspraken voor de schuifspanning: de laag met de kleine coördinaat oefent op de laag met de grote coördinaat een kracht uit die in de balans het '+' teken krijgt.

## **2.2 Dimensie-analyse**

---

### **2.2.1 Dimensieloze kentallen**

Nadat in hoofdstuk 1 convectief transport van massa, energie en impuls uitgebreid aan de orde is gekomen, is in § 2.1 molecuulair transport van massa, warmte en impuls behandeld. In de praktijk komen in vloeistoffen veel gemengde situaties voor waarin zowel convectief als molecuulair transport optreedt, overigens niet noodzakelijkerwijs in dezelfde richting. In veel gevallen is het dan handig en gebruikelijk processen of situaties te karakteriseren met behulp van *dimensieloze kentallen* die de verhouding weergeven van twee van zulke fluxen. Dan kan het gaan om de convectieve flux van een grootte (bv. massa) ten opzichte van de moleculaire flux van diezelfde grootte. Maar ook is het mogelijk om de verhouding te nemen van de transportcoëfficiënten voor twee moleculaire fluxen.

Om met de laatste mogelijkheid te beginnen: de vergelijkingen (2.2), (2.5), (2.6) geven de moleculaire fluxen in afhankelijkheid van de gradiënten in de respectievelijke concentraties (mits  $\rho$  en  $\rho c_p$  constant zijn). De transportcoëfficiënten  $D$ ,  $a$  en  $\nu$  hebben alle dezelfde dimensie (nl.  $m^2/s$ ) en hun numerieke waarden geven aan hoe effectief de individuele moleculen van de betrokken stof in de beschouwde

aggregatietoestand diffunderen en warmte resp. impuls transporteren, gegeven een bepaalde waarde van de concentratiegradiënten.

Beschouw de verhouding  $\nu/a$  voor een ideaal gas. Dankzij de relaties (2.29) en (2.30) kan gemakkelijk ingezien worden dat moleculen in een ideaal gas even gemakkelijk warmte als impuls transporteren:  $\nu/a = 1$ . Maar voor vloeistoffen blijkt dat  $\nu/a = 10$  à  $100$ : kennelijk transporteren vloeistofmoleculen gemakkelijker impuls dan warmte. De verhouding  $\nu/a$  wordt wel het kental van *Prandtl*, afgekort Pr, genoemd:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} \quad (2.36)$$

Evenzo zijn de kentallen van *Schmidt* (Sc) en *Lewis* (Le) gedefinieerd door

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{ID} \quad (2.37)$$

en

$$\text{Le} = \frac{a}{ID} = \frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} \quad (2.38)$$

Voor ideale gassen geldt dat alle drie deze kentallen de waarde één hebben. Voor vloeistoffen heeft Pr doorgaans waarden tussen 10 en 100, terwijl Sc vaak van de orde  $10^3$  is.

Zoals hierboven al besproken kan evenwel ook voor een bepaalde grootte de grootte van het convectieve transport in een bepaalde situatie vergeleken worden met het moleculaire transport om te bepalen of een van beide verwaarloosd mag worden ten opzichte van de ander. Als dit voor een bepaalde component in een meercomponentensysteem gebeurt, wordt het kental van *Péclet* verkregen:

$$\text{Pe} = \frac{\nu L}{ID} \quad (2.39)$$

Dit werkt als volgt: Beschouw gelijktijdig convectief en diffusief transport van een component C in de  $x$ -richting. Het convectief transport is gelijk aan  $A \cdot \nu \cdot c$  (waarin  $\nu$  de snelheid,  $A$  de dwarsdoorsnede van het stromingskanaal, en  $c$  de concentratie van C is), terwijl het moleculair transport van C gegeven wordt door  $-A ID \frac{dc}{dx}$ :

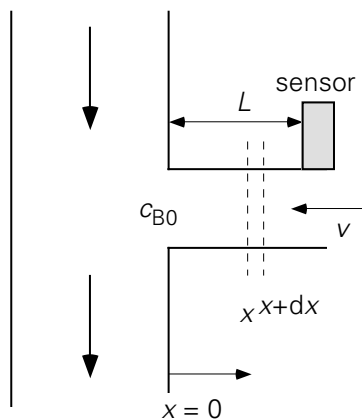
$$\text{Pe} = \frac{\text{convectief transport}}{\text{diffusief transport}} = \frac{A \nu c}{-A ID \frac{dc}{dx}} \quad (2.40)$$

Als de concentratiegradiënt (inclusief minteken) wel benaderd kan worden met  $c/L$  – waarbij in de beschouwde situatie  $L$  de karakteristieke lengteschaal of afmeting is

waarover de concentratie varieert: zie bijvoorbeeld vergelijking (2.16) - dan volgt uitdrukking (2.39).

### Voorbeeld 2.3. *Purging*

Door een buis stroomt een vloeistof met daarin opgelost een agressieve stof B (concentratie  $c_{B0}$ ). De druksensor waarmee de druk gemeten moet worden in de buis, wordt door corrosie aangetast als gevolg van contact met stof B tenzij de concentratie  $c_B$  kleiner is dan  $c_{B0}/1000$ . Dit kan bereikt worden door de sensor niet direct in de buiswand te monteren, maar in een kleine zijtak te plaatsen (zie figuur 2.9).



Figuur 2.9.

Als gevolg van diffusie komt B evenwel toch bij de sensor terecht. Door nu een kleine vloeistofstroom (met snelheid  $v$ ) door de zijtak in de richting van de hoofdbuis aan te leggen – men noemt deze werkwijze ‘purging’ – is het mogelijk de concentratie van B laag te houden en zo de corrosie te beperken. De sensor bevindt zich op een afstand  $L$  van de verbinding tussen hoofdbuis en zijtak.

De vraag is: hoe groot moet  $v$  zijn opdat  $c_B(L) < c_{B0}/1000$ ?

De methode die altijd werkt, is die van het recept van hoofdstuk 1: een balans opstellen voor component B! In dit geval moet dat weer een microbalans zijn, bijvoorbeeld over een dun plakje  $dx$  ergens tussen  $x = 0$  en  $x = L$  – naar analogie van de propstroomreactor van § 1.2.2 – omdat we geïnteresseerd zijn in de afname van de concentratie langs de zijtak. Uit zo’n micro-massabalans valt dan af te leiden hoe  $c_B$  afhangt van  $x$  – waaruit dan valt te bepalen hoe groot de afstand  $L$  gekozen moet worden opdat  $c_B(L) < c_{B0}/1000$ .

Zo’n microbalans voor een stationaire situatie bevat vier termen: een convectieve en een diffusieve term op  $x$  en een convectieve en een diffusieve term op  $x + dx$ , waarbij bedacht moet worden dat de snelheid  $v$  in de negatieve  $x$ -richting is:

$$0 = -vAc_B|_x - AID \frac{dc_B}{dx} \Big|_x - \left\{ -vAc_B|_{x+dx} \right\} - \left\{ -AID \frac{dc_B}{dx} \Big|_{x+dx} \right\} \quad (2.41)$$

waaruit de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$0 = v \frac{dc_B}{dx} + ID \frac{d^2c_B}{dx^2} \quad (2.42)$$

volgt. Deze vergelijking één maal integreren geeft

$$v \cdot c_B + ID \frac{dc_B}{dx} = K_1 \quad (2.43)$$

De integratieconstante  $K_1$  volgt uit de (rand)voorwaarde dat er in de stationaire situatie door een willekeurig gekozen vlak  $x$  tussen  $x = 0$  en  $x = L$  geen netto transport van B plaatsvindt:

$$-A \cdot ID \frac{dc_B}{dx} + A \cdot (-v) \cdot c_B = 0 \quad (2.44)$$

Overigens kan in dit geval ook direct met vergelijking (2.44) worden gestart, los van het opstellen van een balans over een plakje  $dx$ . Vergelijking (2.44) zegt immers dat in ieder vlak, op positie  $x$ , het diffusief transport naar rechts (de eerste term van het linkerlid) evenwicht maakt met het convectief transport naar links (de tweede term van het linkerlid: het minteken voor  $v$  geeft de richting aan). Het opstellen van een balans over een plakje  $dx$  is echter de aanbevolen werkwijze: omdat hij altijd werkt.

Differentiaalvergelijking (2.44) heeft als oplossing (via de methode van scheiding van variabelen, met de randvoorwaarde:  $x = 0 \rightarrow c_B = c_{B0}$ ):

$$\frac{c_B(x)}{c_{B0}} = \exp\left(-\frac{vx}{ID}\right) \quad (2.45)$$

De eis voor  $v$  komt dus neer op:  $v > (ID/L) \cdot \ln 1000$ . Voor het geval  $L = 10$  cm en  $ID = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s wordt deze eis  $v > 7 \cdot 10^{-5}$  m/s!

⑤

Vergelijking (2.45) kan voor  $x = L$  ook in termen van het dimensieloze Péclet-getal  $Pe \equiv vL/ID$  geschreven worden:

$$\frac{c_B(L)}{c_{B0}} = \exp(-Pe) \quad (2.46)$$

Zo is fraai geïllustreerd dat dimensieloze kentallen niet een conceptueel aardigheidje zijn, maar veelal rechttoe rechtaan uit een exacte analyse (op basis van een balans!) volgen.

### **Samenvatting**

Verschillende dimensieloze kentallen zijn geïntroduceerd die alle de verhouding van twee transportgrootheden representeren. Zo stellen de kentallen van Prandtl ( $Pr = \nu/a$ ), Schmidt ( $Sc = \nu/D$ ) en Lewis ( $Le = a/D$ ) steeds de verhouding van twee moleculaire transportcoëfficiënten voor.

Daarnaast is het Péclet-getal  $Pe = vL/D$  ingevoerd dat voor een bepaalde situatie aangeeft hoe de convectieve en moleculaire fluxen van een component zich verhouden. Deze dimensieloze grootheden komen heel vaak naar voren wanneer – uitgaande van een macro- of microbalans – een transportprobleem wordt opgelost.

## **2.2.2 Het Reynolds-getal en de overgang van laminaire naar turbulente stroming**

Iets dergelijks als in § 2.2.1 voor massatransport geldt ook voor het convectief en het moleculair transport van impuls. In het voorgaande is gesproken over de laminaire stroming  $v_x(y)$ : de stroming gaat in ordelijke, parallelle (of in een cilindrische buis coaxiale) lagen. Het is voor deze situatie en voor het geval van Newtonse fluïda eenvoudig om te schatten wat de verhouding is tussen convectief  $x$ -impulstransport in de  $x$ -richting en moleculair  $x$ -impulstransport in de  $y$ -richting:

$$\text{moleculair: } \phi''_{p_x,y} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \approx \mu \frac{v_x}{D} \quad (2.47)$$

$$\text{convectief: } \phi''_{p_x,x} = v_x \cdot \rho v_x \quad (2.48)$$

Bij de schatting van het moleculair transport in vergelijking (2.47) is een voor de stroming karakteristieke afmeting  $D$  ingevoerd. Hierdoor kan de gradiënt  $dv_x/dy$  vervangen (geschat) worden door  $v_x/D$  – feitelijk moet  $D$  zo gekozen worden dat de schatting van de gradiënt redelijk is. De verhouding van de convectieve impulsflux en de moleculaire impulsflux staat bekend als het *Reynolds-getal* (Re):

$$Re = \frac{\text{convectief transport}}{\text{moleculair transport}} = \frac{v_x \cdot \rho v_x}{\mu v_x / D} = \frac{\rho v_x D}{\mu} \quad (2.49)$$

Het subscript  $x$  wordt doorgaans weggelaten uit deze definitie van Re. Overigens zijn het concept en de definitie van Re zowel in vloeistoffen als gassen van toepassing, d.w.z. in elk fluïdum.

De impulsflux  $v \cdot \rho v$  in de teller van het Reynolds-getal wordt vaak aangeduid met de term *traagheid* (Eng. ‘inertia’): de eigenschap van een fluïdum om, zolang er geen kracht op wordt uitgeoefend, rechtdoor te blijven gaan: zie ook de discussie over impuls en krachten in § 1.4. De noemer kan opgevat worden als schuifspanning, dus als wrijving of afremming. Zo gezien is

$$\text{Re} \approx \frac{\text{traagheid}}{\text{wrijving}}$$

Het Reynolds-getal kan ook worden geïnterpreteerd in termen van krachten. De teller  $v \cdot \rho v$  kan gelezen worden als  $\rho v^2$ , een grootte die we in de context van de Bernoulli vergelijking (zie § 1.3.4) op een factor  $\frac{1}{2}$  na hebben leren kennen als druk-energie en als stuwdruk. Op deze wijze gezien kan Re opgevat worden als de verhouding van stuwdruk en schuifspanning.

Let wel dat in dit typische voorbeeld het convectief  $x$ -impulstransport en het moleculaire  $x$ -impulstransport in verschillende richtingen plaatsvinden. Het gaat dus om twee transportmechanismen die met elkaar concurreren: convectief transport dankzij – meestal – een drukverschil, en moleculair (or diffusief) transport dankzij de viscositeit. Het moleculaire transportmechanisme beoogt de impuls zo gelijkmatig mogelijk over het stromingsveld te verdelen: de moleculen pogen impuls van locaties met een hoge impulsconcentratie (of snelheid) te transporteren naar locaties met een lagere impulsconcentratie, zelfs in een richting loodrecht op de stromingsrichting (het convectief transport). De traagheid van het fluïdum voelt daar helemaal niets voor: die wil alleen maar recht doorgaan. Het Reynolds-getal typeert daarom een stroming: het is een maat voor hoe groot de snelheidsverschillen nog kunnen zijn in een richting loodrecht op het convectieve impulstransport.

Indien Re voldoende klein is (d.w.z. onder een zekere kritische waarde) is de stroming *laminair*, zoals voorondersteld in bovenstaand voorbeeld. De impulsconcentratie in een fluïdumelementje in sommige van de laagjes is dan niet zo groot dat de schuifspanning zo’n elementje of laagje niet in toom kan houden: de snelheden zijn ook nog maar (relatief) laag. Als echter het Reynolds-getal te groot wordt, is dit niet langer het geval. De nette gelaagde structuur is dan niet langer te handhaven. De verschillen in impulsconcentratie tussen aangrenzende laagjes dreigen dan zo groot te worden dat de moleculen deze niet meer aankunnen – of, met andere woorden: de schuifspanningen worden te groot. Het gevolg is dat de laagjes fluïdum als het ware over elkaar heen struikelen. De stroming wordt nu *turbulent*. Er ontstaan dan allerlei *wervels* (Eng. ‘eddies’) in de stroming en via deze wervels wordt de impuls weer zeer effectief over het stromingsdomein verdeeld.

Deze wervels betrekken hun energie van de hoofdstroming en geven deze energie weer door naar kleinere wervels. In een volledig ontwikkelde turbulente stroming wordt de

kinetische energie die in de wervels zit doorgegeven naar steeds kleinere wervels zonder noemenswaardige dissipatie. Immers de viscositeit ( $\rightarrow$  wrijving) is juist veel te zwak om de wervels tegen te gaan. Pas bij wervels van zeer kleine afmeting is het Reynolds-getal op de schaal van zo'n wervel voldoende laag om de viscositeit z'n dissipatieve werk te laten doen. Uiteindelijk wordt dus toch weer de mechanische energie door wrijving gedissipeerd in warmte. Turbulente stroming lijkt in zijn dynamiek voor het menselijk oog en begrip stochastisch, maar is in werkelijkheid chaotisch. De wisselwerking tussen de elementjes of pakketjes van het fluïdum wordt immers nog steeds door de natuurkundige wetten geregeerd, maar de uitwerking van deze wetmatigheden is in turbulente stromingen vele malen complexer dan in het geval van laminaire stroming.

Stroming door een cilindrische buis is *laminair* zolang het Reynolds-getal betrokken op de buisdiameter  $D$  kleiner is dan zo'n 2000. De omslag naar turbulente stroming vindt plaats in het Re-traject 2000 - 2500, afhankelijk van de precieze wijze waarop het experiment wordt uitgevoerd (de omslag naar turbulent is erg gevoelig voor kleine verstoringen, zoals pomptrillingen: die bevorderen de instabiliteit van de laminaire stroming). In andere geometrieën, zoals rechthoekige ventilatiekanalen, en ook voor de omstroming van lichamen, gelden andere kritische waarden van het Reynolds-getal voor de omslag laminair-turbulent.

### **Samenvatting**

Het Reynolds-getal

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}$$

geeft voor een bepaalde situatie de verhouding van een convectieve impulsflux (traagheid) en een moleculaire impulsflux (wrijving) – overigens in verschillende richtingen. Dit blijkt het duidelijkst als Re geschreven wordt als

$$\text{Re} = \frac{v \cdot \rho v}{\mu v / D}$$

Zo typeert het Reynolds-getal de stromingstoestand. Verschillende interpretaties van het Reynolds-getal zijn de revue gepasseerd.

Als de viscositeit (of de frictie) niet meer bij machte is stromingsverstoringen of instabiliteiten te onderdrukken, wordt de stroming vroeg of laat turbulent. Of in een bepaalde geometrie een stroming laminair is of turbulent, kan afgelezen worden aan de waarde van het Reynolds-getal.

De kritische waarde van  $Re$  waarboven de stroming turbulent wordt of is, varieert van geometrie tot geometrie; voor een cilindrische buis ligt de kritische waarde in de range 2000 – 2500.

### 2.2.3 Dimensie-analyse: het concept

Hierboven zijn verscheidene dimensieloze kentallen geïntroduceerd waarin transport-termen met elkaar worden vergeleken. Teller en noemer van deze dimensieloze kentallen moeten uiteraard dezelfde dimensie hebben om hun verhouding inderdaad dimensieloos te laten zijn. Het is eigenlijk niet anders dan met de verschillende termen in de balansen van hoofdstuk 1: alle termen van een balans moeten dezelfde dimensie hebben (hint: een prima controlemiddel dus!)

Er is echter nog een andere manier om gebruik te maken van *dimensies*. Het is mogelijk om van te voren te bepalen hoe de verschillende grootheden en stof-constanten, die een proces beheersen, in een kleiner aantal dimensieloze groepen samengevoegd kunnen worden. In de uiteindelijke oplossing van het probleem dat wordt bekeken, komen dan slechts deze groepen als variabelen voor. In het algemeen zijn dit veel minder variabelen dan het aantal waarmee aanvankelijk begonnen was. De techniek om dit te bereiken heet *dimensie-analyse*. Hoe de techniek werkt en wat de gevaren zijn die schuilen in de techniek van dimensie-analyse, komt hieronder uitgebreid aan de orde<sup>8</sup>.

Het probleem van voorbeeld 2.3 is ook met dimensie-analyse aan te pakken. Startpunt van elke dimensie-analyse is de moeilijke vraag: waar hangt  $c_B(L)$  nu eigenlijk vanaf? Het antwoord is, zoals gezien in voorbeeld 2.3: van  $c_{B0}$ ,  $L$ ,  $v$  en  $ID$  :

$$c_B(L) = f(c_{B0}, L, v, ID) \quad (2.50)$$

Zorg er voor dat de rechterkant van vergelijking (2.50) alleen onafhankelijke variabelen bevat die je onafhankelijk van elkaar kunt kiezen. De techniek van dimensie-analyse werkt nu als volgt: schrijf het verband tussen de afhankelijke variabele  $c_B(L)$  en de onafhankelijke variabelen  $c_{B0}$ ,  $L$ ,  $v$  en  $ID$  met behulp van onbekende exponenten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  en een *dimensieloze* constante  $k$  in de vorm

$$c_B(L) = k \cdot c_{B0}^\alpha \cdot L^\beta \cdot v^\gamma \cdot ID^\delta \quad (2.51)$$

Nu moet deze vergelijking dimensioneel in orde zijn; de dimensies in het rechterlid moeten gelijk zijn aan die in het linkerlid. Dit geeft voorschriften voor de machten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ . De SI-eenheden (of dimensies) van de 5 variabelen  $c_B$ ,  $c_{B0}$ ,  $L$ ,  $v$  en  $ID$  zijn

<sup>8</sup> Wij geven de voorkeur aan de ‘exponent-methode’ boven de methode van de ‘repeating variables’.



immers bekend; wel moeten daarbij de variabelen uitgedrukt worden in de basiseenheden kg, m, s, K. In dit geval:

$$\begin{aligned} c_B, c_{B0}: & \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ L: & \text{ m} \\ v: & \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ D: & \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Voor de verschillende basiseenheden moet dan door invullen van de eenheden in vergelijking (2.51) gelden:

$$\begin{aligned} \text{kg: } & 1 = \alpha \\ \text{m: } & -3 = -3\alpha + \beta + \gamma + 2\delta \\ \text{s: } & 0 = -\gamma - \delta \end{aligned}$$

(bedenk dat de constante  $k$  dimensieloos is). Dit is een stelsel van drie vergelijkingen met vier onbekenden. Drie van de vier onbekenden in dit stelsel kunnen uitgedrukt worden in de vierde, bijvoorbeeld

$$\alpha = 1, \delta = -\gamma, \beta = \gamma$$

Met dit resultaat reduceert vergelijking (2.51) tot

$$c_B(L) = k \cdot c_{B0} \cdot \left( \frac{vL}{D} \right)^\gamma \quad (2.52)$$

De eerste conclusie die uit vergelijking (2.52) getrokken kan worden, is dat de *dimensieloze* concentratie  $c_B(L)/c_{B0}$  uitsluitend een functie is van de *dimensieloze* groep  $vL/D$  die herkend wordt als het Péclet-getal  $Pe$ , bekend uit voorbeeld 2.3. Wiskundig geformuleerd:

$$\frac{c_B(L)}{c_{B0}} = f(Pe) \quad (2.53)$$

Een uitspraak over de functie  $f$  kan op grond van deze dimensie-analyse niet gedaan worden. Daarvoor moet het probleem exact worden opgelost: in dit geval is uit voorbeeld 2.3 bekend dat  $f$  een exponentiële functie is.

In het algemeen is het niet zo dat  $c_B(L)$  op grond van vergelijking (2.52) berekend kan worden met waarden voor  $k$  en  $\gamma$  die gelden voor het gehele domein van het  $Pe$ -getal. In de praktijk kunnen  $k$  en  $\gamma$  empirisch bepaald worden voor slechts een beperkt  $Pe$ -traject. In het geval van voorbeeld 2.3 komt dat neer op het bepalen van een raaklijn aan de curve van vergelijking (2.46) voor een bepaalde waarde van  $Pe$ : zo gezien is het evident dat  $k$  en  $\gamma$  niet constant zijn voor het gehele domein van mogelijk waarden voor  $Pe$ .

Toch kan er een heel nuttige conclusie getrokken worden uit vergelijking (2.52), dus op grond van de dimensie-analyse: zolang het kental constant is, verandert de dimensieloze concentratie niet. Zelfs als een probleem niet analytisch oplosbaar is en experimenten niet mogelijk zijn (te gevaarlijk, te duur, installatie moet nog gebouwd), kan met behulp van experimenten in bv. een schaalmodel toch een voorspelling gedaan worden over het proces of verschijnsel op de grote schaal: namelijk door in beide situaties het dominante dimensieloze kental even groot te laten zijn.

Met het oog op experimenteren op een andere schaal of onderre condities is er een andere toepassing: in het ‘purging’-geval van voorbeeld 2.3 kan de agressieve stof B vervangen worden door een onschuldige stof X. Stel dat dan bijvoorbeeld de diffusiecoëfficiënt van X acht maal groter is dan die van stof B:  $D_X = 8 D_B$ . En dat bijvoorbeeld in het geval van stof X voor de snelheid om te bereiken dat  $c_X(L) = c_{X0}/1000$  experimenteel wordt gevonden dat  $v_X = 4 \cdot 10^{-4}$  m/s. Dan is met de uitkomst van de dimensie-analyse te bepalen wat  $v_B$  moet zijn om te zorgen dat  $c_B(L) = c_{B0}/1000$ . Er geldt namelijk:

$$\frac{c_X(L)}{c_{X0}} = f(\text{Pe}) \quad \text{en} \quad \frac{c_B(L)}{c_{B0}} = f(\text{Pe}) \quad (2.54)$$

In beide gevallen is de functie  $f$  hetzelfde, en daar geldt :

$$\frac{c_X(L)}{c_{X0}} = \frac{c_B(L)}{c_{B0}} \quad (2.55)$$

moet dus

$$f(\text{Pe}_X) = f(\text{Pe}_B) \rightarrow \text{Pe}_X = \text{Pe}_B \quad (2.56)$$

ofwel

$$\frac{v_X L}{D_X} = \frac{v_B L}{D_B} \rightarrow v_B = \frac{D_B}{D_X} \cdot v_X = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} \quad (2.57)$$

### **Samenvatting**

Dimensie-analyse is een techniek om verbanden te vinden tussen de diverse grootheden en stofconstanten die een probleem bepalen, zonder het probleem exact of analytisch op te hoeven lossen. Wel is de kennis die verkregen wordt, betrekkelijk globaal. De analyse groepeerde de variabelen in dimensieloze groepen die doorgaans de verhouding van twee mechanismen, fluxen of stofgrootheden representeren.

Met behulp van dimensie-analyse is het mogelijk verschillende problemen, die betrekking hebben op gelijksoortige situaties, met elkaar te vergelijken. In zulke situaties moeten de dimensieloze groepen constant worden gehouden. De gedachte

achter deze benadering is dat de exacte oplossing slechts de gevonden dimensieloze kentallen bevat.

### 2.2.4 **Dimensie-analyse: techniek en Buckingham- $\Pi$ theorema**

Bij dimensie-analyse is enig begrip van het te onderzoeken probleem wel heel erg belangrijk. Dat begrip hoeft niet zo ver te gaan dat van de grootheid  $A$  die je wilt weten, al bekend is *hoe* de grootheid  $A$  afhangt van een aantal andere grootheden. Maar het startpunt is wel dat je uitzoekt van *welke* andere onafhankelijke variabelen die grootheid  $A$  afhangt. Dat vereist enig fysisch inzicht over oorzakelijke verbanden tussen grootheden.

Zo zegt fysisch inzicht betreffende de beweeglijkheid van moleculen in een ideaal gas – zoals belichaamd in het model leidend tot relatie (2.28) – dat in ideale gassen de diffusiecoëfficiënt  $D$  o.a. afhangt van temperatuur en dichtheid die inderdaad onafhankelijk van elkaar gevarieerd kunnen worden:  $D = f(T, \rho)$ . De druk moet hier dan niet ook nog eens aan toegevoegd worden, omdat – dankzij de ideale gaswet – druk, dichtheid en temperatuur onderling samenhangen: de variabelen ter rechter-zijde dienen onafhankelijk van elkaar te zijn.

Daarnaast kan al bij voorbaat gezegd worden dat in een dimensie-analyse  $D = f(T, \rho)$  of, als alternatief,  $D = f(T, p)$  nooit tot een fatsoenlijk resultaat kan leiden, omdat anders dan  $D$  zowel  $f(T, \rho)$  als  $f(T, p)$  de basiseenheden K en kg bevat. De gasconstante  $R$  en de mol massa van de betrokken component dienen meegenomen te worden!

Verdere opmerkingen en suggesties over de keuze van de onafhankelijke variabelen zullen gemaakt worden in de context van de voorbeelden van § 2.2.5.

Het algemene recept voor het uitvoeren van de dimensie-analyse luidt als volgt:

1. Kies de grootheid die onderzocht moet worden:  $A$
2. Bepaal de onafhankelijke fysische variabelen  $B_1 \dots B_{n-1}$  waarvan  $A$  afhangt volgens  $A = f(B_1, \dots, B_{n-1})$ . In totaal zijn er dan  $n$  variabelen in het spel:  $A, B_1, \dots, B_{n-1}$ .
3. Schrijf het verband in de vorm

$$A = k B_1^{\beta_1} \cdot B_2^{\beta_2} \dots B_{n-1}^{\beta_{n-1}} \quad (2.58)$$

waarbij  $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$  onbekende exponenten (reële getallen, niet noodzakelijkerwijs integers) zijn en  $k$  een dimensieloze coëfficiënt.

4. Druk zowel in het linkerlid van dit verband als in het rechterlid alle dimensies uit in de basisdimensies, of alle (SI-)eenheden in de basiseenheden. De basis-

dimensies (met tussen haakjes hun SI-eenheid) zijn: lengte (m), massa (kg), tijd (s) en temperatuur (K). Voorbeeld voor energie:  $J = N \cdot m = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ . In dit boek werken we in het vervolg in SI-eenheden.

5. Zorg er voor, dat het verband hierboven dimensioneel in orde is, d.w.z. maak dat links en rechts in vergelijking (2.58) de basiseenheden even vaak voor-komen. Dit doe je door links en rechts de basiseenheden te tellen en dan met behulp van de coëfficiënten  $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$  voor elke basiseenheid een algebraïsche vergelijking op te schrijven zo dat links en rechts de betrokken basiseenheid even vaak voorkomt.
6. Los de algebraïsche vergelijkingen voor  $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$  uit stap 5 op. Als het aantal onbekenden  $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$  groter is dan het aantal algebraïsche vergelijkingen (gezien het aantal basiseenheden), druk dan een of meer van die  $\beta$ 's uit in de overige (zoals in het *purging* voorbeeld).
7. Substitueer de gevonden waarden voor de  $\beta$ 's van stap 6 in vergelijking (2.58), en combineer  $A, B_1 \dots B_{n-1}$  tot dimensieloze groepen, of *kentallen*.
8. Het is gebruikelijk toe te werken naar algemeen bekende dimensieloze kentallen, zoals Pr, Sc, Le, Pe, en Re die eerder in dit hoofdstuk werden geïntroduceerd. Dit kan door de kentallen die gevonden zijn in stap 7, onderling met elkaar te vermenigvuldigen of op elkaar te delen. Wanneer transportgroot-heden zoals fluxen en fysische eigenschappen die voorkomen in die bekende kentallen, een rol spelen met betrekking tot een grootheid  $A$ , dan duiken die bekende kentallen a.h.w. vanzelf op.

Het aantal dimensieloze groepen dat gevonden wordt, hangt af van o.a. het aantal onafhankelijke variabelen dat in de beschouwing wordt meegenomen. Voor dat aantal valt moeilijk een richtlijn te geven; het moeten er in ieder geval voldoende zijn. De kwaliteit van de analyse aan de start met betrekking tot de vraag welke onafhankelijke variabelen  $B$  een rol spelen, is cruciaal. Zoals gezegd zal aan dit aspect nader aandacht gegeven worden in de context van de voorbeelden van § 2.2.5.

Er is een algemene regel, het zgn. *Buckingham-II theorema*, waarmee van te voren het aantal dimensieloze groepen ( $p$ ) berekend kan worden uit het totaal aantal variabelen ( $n$ ) en het aantal basiseenheden ( $m$ ) dat optreedt:

$$p = n - m \quad (2.59)$$

Het aantal dimensieloze kentallen ( $p$ ) dat wordt gevonden, hangt dus rechtstreeks af van het aantal onafhankelijke variabelen ( $n-1$ ). Dit illustreert nog eens extra hoe belangrijk het is om aan het begin van de analyse de juiste onafhankelijke variabelen te identificeren.

Het bewijs van vergelijking (2.59) is eenvoudig en gaat als volgt: vergelijking (2.58) bevat  $n$  variabelen (of parameters)  $\{A, B_1, \dots, B_{n-1}\}$  en  $n - 1$  onbekende machten

$\{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ . Het aantal verschillende basiseenheden dat voorkomt, is  $m$ . In het algemeen zijn er dan  $m$  lineaire vergelijkingen voor  $n - 1$  onbekende machten. Dit betekent dat er  $\{(n - 1) - m\}$  machten onbenoemd moeten zijn en dat er  $m$  machten in deze ‘onbenoemden’ uitgedrukt kunnen worden. Als precies alle machten  $\{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$  uitgerekend konden worden, dan was er precies één dimensieloze groep. Dus  $\{(n - 1) - m\}$  onbenoemde machten leveren

$$p = 1 + \{(n - 1) - m\} = n - m \quad (2.60)$$

dimensieloze groepen op.

Het Buckingham- $\Pi$  theorema is een nuttig hulpmiddel om snel te zien hoeveel dimensieloze groepen een gekozen combinatie van variabelen zal opleveren. Bovendien kan, na het uitvoeren van de dimensie-analyse, snel gecontroleerd worden of het aantal groepen strookt met het theorema.

#### **Voorbeeld 2.4. *Purging II***

In voorbeeld 2.3 is gevonden dat

$$c_B(L) = f(c_{B0}, L, v, ID) \quad (2.61)$$

Welnu: 5 grootheden, 3 basiseenheden  $\rightarrow$  2 dimensieloze groepen volgens het Buckingham- $\Pi$  theorema. Dit klopt met het resultaat van de eerder uitgevoerde dimensie-analyse: zie de analyse rond de vergelijkingen (2.50) t/m (2.53).

⑤

### **Samenvatting**

Voor het uitvoeren van een dimensie-analyse is een achtstappenrecept gepresenteerd waarin het heel belangrijk is om aan het begin de onafhankelijke variabelen met zorg te kiezen. Fysisch inzicht in het probleem is daarbij heel behulpzaam. Het verdient aanbeveling zo veel mogelijk toe te werken naar de bekende dimensieloze kentallen. Het Buckingham- $\Pi$  theorema luidt: het aantal dimensieloze groepen ( $p$ ) dat volgt uit een dimensie-analyse met  $n$  parameters en  $m$  basiseenheden is:

$$p = n - m$$

Een belangrijk voordeel van dimensie-analyse is dat voor het probleem in kwestie het aantal variabelen sterk gereduceerd wordt, nl. van  $n$  naar  $p$ .

### **2.2.5 Voorbeelden van dimensie-analyse**

#### **Voorbeeld 2.5. *Het trekken van een draad***

Een gladde draad (diameter  $d$ ) wordt door een reservoir getrokken dat gevuld is met een vloeistof. De draad is bevochtigd over een lengte  $L$ .

Van welke variabelen hangt de kracht  $F$  af die nodig is om de draad met een constante snelheid  $v$  door de vloeistof te trekken? Met welke dimensieloze groepen is dit proces te beschrijven

Het antwoord op de eerste vraag is: de diameter  $d$  en lengte  $L$  van de draad, de snelheid  $v$ , en de dichtheid  $\rho$  en viscositeit  $\mu$  van de vloeistof. De redeneringen hierachter zijn, dat door de beweging van de draad ( $\rightarrow v$ ) de vloeistof ook zal gaan stromen. Dus gaat er impuls in de vloeistof zitten en die schaalt met  $\rho$ . Tenslotte heeft de overdracht van impuls te maken met de wrijvingskracht ( $\rightarrow \mu$ ) tussen draadoppervlak ( $\rightarrow d$  en  $L$ ) en aangrenzende vloeistof. De invloed van de temperatuur op dichtheid en viscositeit van de vloeistof mag als een secundair effect verwaarloosd worden; bovendien sluit de eis dat de variabelen onafhankelijk van elkaar moeten zijn, uit dat deze afhankelijkheid wordt meegenomen. Zolang de snelheid van de draad constant is, doet de dichtheid van het materiaal van de draad niet ter zake.

Het antwoord op de tweede vraag is te vinden met behulp van dimensie-analyse. We zullen het hiervoor beschreven recept volgen:

1) de grootheid: kracht:  $F \rightarrow \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$

2) fysische variabelen:  $d, L \rightarrow \text{m}$   
 $v \rightarrow \text{m}/\text{s}$   
 $\rho \rightarrow \text{kg}/\text{m}^3$   
 $\mu \rightarrow \text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}$

3) de relatie  $F = k d^\alpha L^\beta v^\gamma \rho^\delta \mu^\varepsilon$

4) in basiseenheden:  $\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{m}^\alpha \text{m}^\beta \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^\gamma \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^\delta \left(\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}\right)^\varepsilon$

5) voor de verschillende basiseenheden moet dan gelden:

$$\begin{aligned} \text{kg:} & \quad 1 = \delta + \varepsilon \\ \text{m:} & \quad 1 = \alpha + \beta + \gamma - 3\delta - \varepsilon \\ \text{s:} & \quad -2 = -\gamma - \varepsilon \end{aligned}$$

6) Dit zijn drie vergelijkingen met vijf onbekenden. Daarvan kunnen er twee 'vrij gekozen' worden om daar de drie andere in uit te drukken. De keuze van deze twee 'vrij te kiezen' wordt bepaald door twee overwegingen. De eerste is: is er in de drie vergelijkingen te zien wat oplostechnisch een slimme keuze is? Zo ja, maak dan die keus. Zo nee, stel dan de vraag of op grond van de stappen 2 en 3 van het recept te voorspellen is welke groepen er zullen optreden en laat hierdoor je keuze bepalen (een kwestie van ervaring).

In dit voorbeeld zijn in stap 2 de variabelen  $d$  en  $L$  te zien die samen een dimensieloze groep vormen; kies dus niet  $\alpha$  en  $\beta$  tegelijk, want dat levert strijdigheid op, maar bijvoorbeeld alleen  $\beta$ . Tevens staan in stap 2 de variabelen  $\rho$ ,  $v$ ,  $d$  (of  $L$ ) en  $\mu$  die samen een Reynolds-getal vormen: kies nu bijvoorbeeld  $\varepsilon$ . Oplossen van de vergelijking levert nu

$$\delta = 1 - \varepsilon$$

$$\gamma = 2 - \varepsilon$$

$$\alpha = 2 - \beta - \varepsilon$$

7) Substitueren van deze waarden voor  $\alpha$ ,  $\gamma$  en  $\delta$  in de vergelijking van stap 3 geeft

$$F = k d^{2-\beta-\varepsilon} L^\beta v^{2-\varepsilon} \rho^{1-\varepsilon} \mu^\varepsilon$$

Combineren levert nu het volgende resultaat tussen drie dimensieloze groepen:

$$\frac{F}{\rho^2 v^2 d^2} = k \left( \frac{L}{d} \right)^\beta \cdot \text{Re}^{-\varepsilon} \quad (2.62)$$

8) Indien overigens in stap 4 niet  $\beta$  en  $\varepsilon$  waren gekozen, maar bijvoorbeeld  $\beta$  en  $\delta$ , dan was in plaats van vergelijking (2.62) gevonden

$$\frac{F}{d v \mu} = k \left( \frac{L}{d} \right)^\beta \cdot \text{Re}^\delta \quad (2.63)$$

Dit resultaat is ook correct en is te verkrijgen uit vergelijking (2.62) door links en rechts te vermenigvuldigen met  $\text{Re}$ ; kennelijk  $\delta = 1 - \varepsilon$ .

Dit is algemeen geldig bij dimensie-analyse: de groepen die gevonden worden, mogen met elkaar vermenigvuldigd worden om een nieuwe groep te maken, waarna een van de oude groepen vervangen mag worden door de nieuwe. De eis is uiteraard dat de dimensieloze groepen die het proces of verschijnsel beschrijven, onafhankelijk van elkaar te zijn, net zoals de dimensie-dragende variabelen van stap 2 (zie ook § 2.2.4).

⑤

Dimensie-analyse is een zeer krachtige techniek om het aantal variabelen te reduceren waarmee een probleem beschreven moet worden. Er kleeft echter een groot gevaar aan dimensie-analyse: de keuzes gemaakt in stap 2 van het recept bepalen de uitkomst. De geselecteerde onafhankelijke variabelen moeten de fysische processen die van belang zijn, ook echt helemaal dekken – anders leidt dimensie-analyse tot onzinnige, niet-fysische resultaten. Indien bijvoorbeeld warmteoverdracht geanalyseerd moet worden, dan dient in stap 2 het temperatuurverschil dat het warmtetransport aandrijft,

gekozen te worden als variabele en niet de twee temperaturen afzonderlijk; in het laatste geval zal de verhouding van beide temperaturen opduiken, maar zo'n verhouding (in K, of in °C?) is niet relevant voor warmtetransport (zie verder hoofdstuk 3). Dat en hoe een geschikte set van variabelen gekozen moet worden, zal nu nader worden gedemonstreerd in het volgende voorbeeld.

**Voorbeeld 2.6.** *Een geroerd vat*

In een geroerd vat vindt een polymerisatiereactie plaats. Gedurende deze reactie neemt de viscositeit  $\mu$  van de vloeistof toe. De roerder (*Eng.* 'impeller') is gekoppeld aan een motor, die zorgt voor een constant toerental  $N$  van de roerder. Hoe hangt het vermogen  $P$  dat de motor aan de roerder levert, af van  $N$  en  $\mu$  en van andere relevante grootheden?

*Eerste poging:*

Stel  $P$  is alleen afhankelijk van  $\mu$  en  $N$ :

$$P = k N^\alpha \mu^\beta$$

waarmee voor de betrokken basiseenheden moet gelden dat

$$\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} = \left(\frac{1}{\text{s}}\right)^\alpha \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}\right)^\beta$$

De vergelijkingen voor de afzonderlijke basiseenheden luiden daarmee:

$$\begin{aligned} \text{kg: } & 1 = \beta \\ \text{m: } & 2 = -\beta \\ \text{s: } & -3 = -\alpha - \beta \end{aligned}$$

De eerste en tweede vergelijking zijn *strijdig!* Dus deze poging is fout: er is te weinig fysica gestopt in de relatie voor  $P$ , die trouwens ook schaalgevoelig moet zijn.

*Tweede poging*

$P$  hangt af van  $\mu$ ,  $N$  en de roerderdiameter  $D$ .

$$P = k N^\alpha \mu^\beta D^\gamma$$

waarmee

$$\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} = \left(\frac{1}{\text{s}}\right)^\alpha \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}\right)^\beta \text{ m}^\gamma$$

De vergelijkingen worden dan:



$$\left. \begin{array}{l} \text{kg: } 1 = \beta \\ \text{m: } 2 = -\beta + \gamma \\ \text{s: } -3 = -\alpha - \beta \end{array} \right\} \rightarrow \alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 3$$

Dus het verband  $P = f(N, \mu, D)$  leidt tot één dimensieloze groep die constant is:

$$\frac{P}{N^2 \mu D^3} = \text{constant} \quad (2.64)$$

In het voorbeeld geldt nu dus, voor  $N = \text{constant}$  en  $D = \text{constant}$ :  $P \propto \mu$ .

### Derde poging

In poging 2 zijn  $N$ ,  $\mu$  en  $D$  gekozen en vanwege de combinatie  $N \cdot D$  dus impliciet ook een snelheid. Dit zijn drie van de vier variabelen die  $Re$  bepalen. Laten we daarom ook  $\rho$  opnemen. Het zal voor het vermogen vast uitmaken of een ‘lichte’ of een ‘zware’ vloeistof geroerd wordt. Probeer

$$P = k N^\alpha \mu^\beta D^\gamma \rho^\delta$$

Vergelijkingen:

$$\begin{array}{l} \text{kg: } 1 = \beta + \delta \\ \text{m: } 2 = -\beta + \gamma - 3\delta \\ \text{s: } -3 = -\alpha - \beta \end{array}$$

Dit geeft:

$$\begin{array}{l} \alpha = 3 - \beta \\ \gamma = 5 - 2\beta \\ \delta = 1 - \beta \end{array}$$

Derhalve volgt:

$$P = k \rho N^3 D^5 \left( \frac{\rho N D^2}{\mu} \right)^{-\beta} \quad (2.65)$$

De laatste groep is het verwachte Reynolds-getal. Immers als karakteristieke snelheid van het probleem kan de snelheid op de rand of aan de tip van de roerder genomen worden waarvoor toch geldt:  $v = \pi D \cdot N$ . Dus volgt:

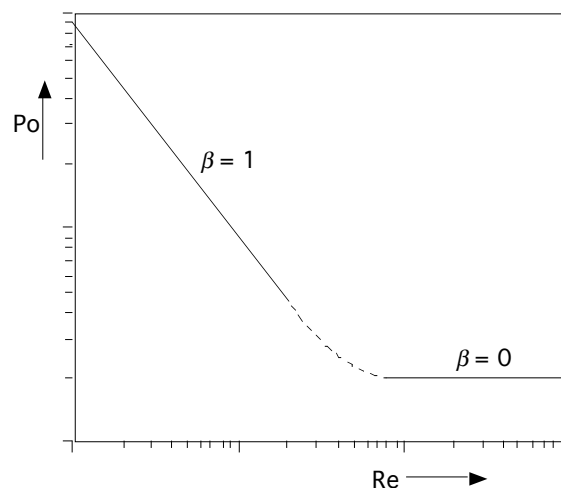
$$\rho \frac{N D^2}{\mu} = \frac{1}{\pi} \rho \frac{(\pi N D) D}{\mu} \propto \frac{\rho v D}{\mu} = Re \quad (2.66)$$

De factor  $\frac{1}{\pi}$  is in een dimensie-analyse van geen belang. Vergelijking (2.65) is met behulp van het dimensieloze groep  $Po = P/(\rho N^3 D^5)$  – dat bekend staat als het

vermogenskental (Eng. 'Power Number') – dus in dimensieloze vorm te schrijven als:

$$Po \equiv \frac{P}{\rho N^3 D^5} = k \left( \frac{\rho N D^2}{\mu} \right)^{-\beta} = k Re^{-\beta} \quad (2.67)$$

Merk op dat voor  $\beta = 1$  de dichtheid uit vergelijking (2.67) vaklt en dat het resultaat van poging (2) weer teruggevonden wordt toen er geen effect van de dichtheid en dus van traagheid werd meegenomen. In het regime van  $\beta = 1$  zijn blijkbaar de viskeuze effecten, zoals die in de noemer van het Reynolds-getal voorkomen, dominant over de traagheidskrachten die in de teller van het Reynolds-getal staan: zie ook vergelijking (2.49). Kennelijk behoort  $\beta = 1$  bij lage waarden van het Reynolds-getal die staan voor het laminaire stromingsregime. Voor  $\beta = 0$  valt juist de viscositeit weg uit vergelijking (2.67); zo behoort  $\beta = 0$  dus bij turbulente stromingscondities waar viscositeit (op de macroschaal) geen rol speelt. Experimenteel is inderdaad de grafiek van figuur 2.10 gevonden (schematisch).



Figuur 2.10.

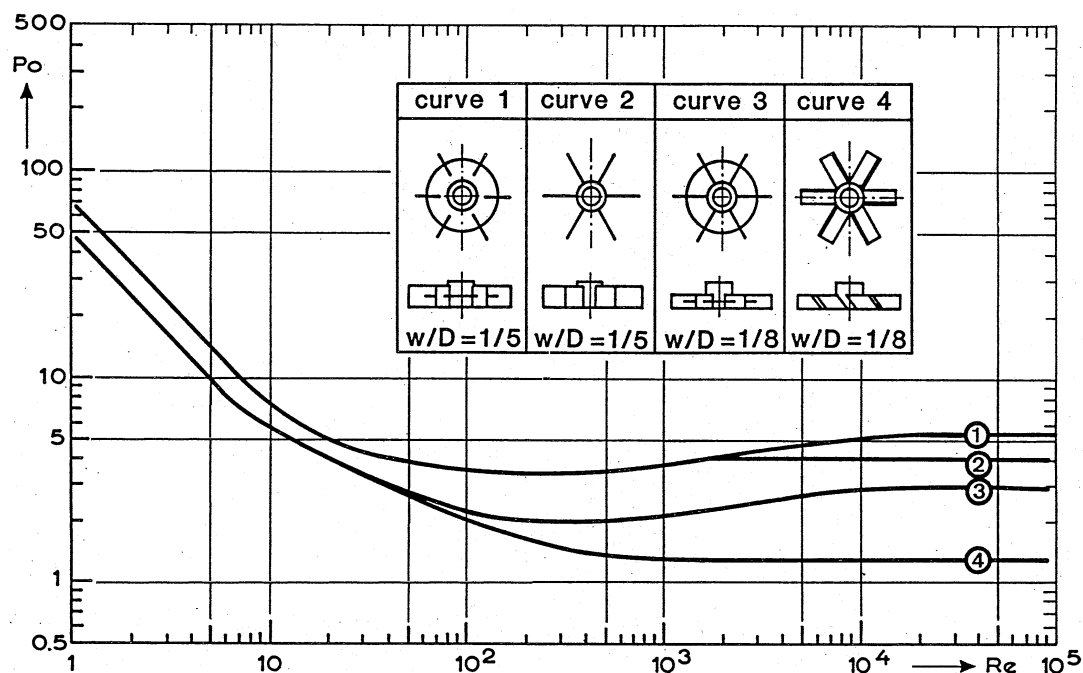
Vierde poging

$P = f(N, \mu, \rho)$ : de lengteschaal is uit het probleem weggelaten. Dit levert:

$$P \propto \left( \frac{N \mu^5}{\rho^3} \right)^{1/2} \quad (2.68)$$

Het zal duidelijk zijn dat dit resultaat niet strookt met de experimenten. De reden hiervoor is, dat de fysica van dit probleem niet goed beschreven *kan* worden met het voorstel  $P = f(N, \mu, \rho)$ : het maakt voor het roervermogen volgens deze beschrijving immers niet uit of het over een klein of een groot vat gaat, terwijl verder de dichtheid fysisch gezien niet in de noemer kan voorkomen!

Vervolgens zou nagegaan kunnen worden hoe het opgenomen vermogen van de motor afhangt van de geometrie van de roerder (zoals hoogte en dikte van roerderblad, of mate van kromming van roerderblad) en van de positionering van de roerder in het vat. Volgens het Buckingham  $\Pi$ -theorema resulteert het toevoegen van een variable in steeds een nieuw dimensieloos kentel, in dit geval in geometrische kentallen. Figuur 2.11 laat zien hoe het vermogenskental van zogenaamde turbine-roerders ook afhangt van de grootte van de 'disk' en van de verhouding van de hoogte  $w$  van de verticale of schuine roerderbladen die aan de 'disk' bevestigd zijn, tot de roerderdiameter.



Figuur 2.11.

⑤

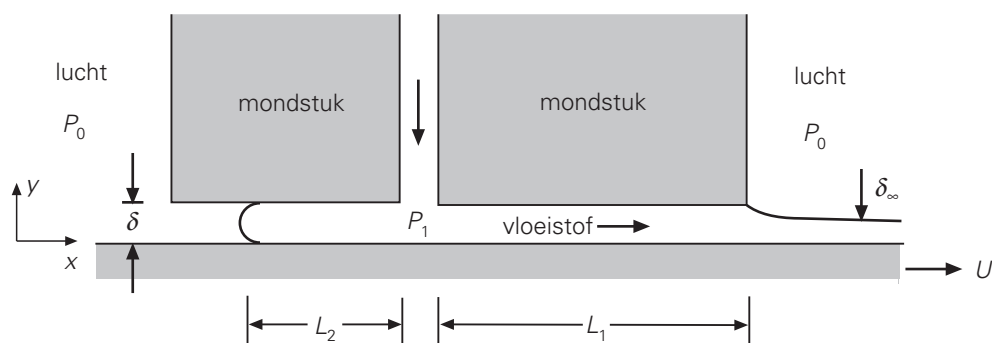
Bovenstaand voorbeeld laat zien dat zowel  $\mu$  als  $\rho$  meenemen als onafhankelijke variabele leidt tot het vinden van het Reynolds-getal. Als echter van meet af aan duidelijk is dat onder de gegeven condities de stroming laminair is, d.w.z. gedomineerd wordt door de viscositeit, dan kan  $\rho$  weggelaten worden uit de analyse (mits de zwaartekracht ook verwaarloosd kan worden) en zal  $Re$  niet opduiken. Geheel analoog: als van meet af aan duidelijk is dat in een specifiek geval de stroming turbulent is, gedomineerd door de traagheid, dan kan de viscositeit weggelaten worden en zal  $Re$  ook hier niet opduiken. Alleen in het algemene geval, als geen *a priori* informatie beschikbaar is over het type stroming, zal het Reynolds-getal een van de te vinden dimensieloze kentallen zijn en aangeven dat de variabele waarin we geïnteresseerd zijn, (heel) verschillend zal zijn in laminaire en turbulente stromingen. Deze bevinding geldt niet alleen in geroerde vaten maar in alle gevallen waar

convectie een rol speelt.

In verticale laminaire stromingen speelt de zwaartekracht vaak een rol speelt als de drijvende kracht voor de stroming. In zulke gevallen kan  $\rho$  beter gecombineerd worden met de zwaartekrachtsversnelling  $g$  tot een nieuwe variable  $\gamma = \rho g$  (in  $\text{kg/m}^2\text{s}^2$ ) – om zo het aantal variabelen en daarmee het aantal dimensieloze kentallen te beperken, en om te voorkomen dat  $Re$  opduikt.

### Voorbeeld 2.7. Slot coating<sup>9</sup>

Figuur 2.12 laat een dwarsdoorsnede zien door het mondstuk (Eng. ‘die’) van een coatingmachine. De zeer viskeuze Newtonse vloeistof (doorgaans een polymeer) wordt door het verticale kanaal aangevoerd en dan meegenomen door de plaat of band (Eng. ‘web’) die met een snelheid  $U$  naar rechts beweegt. Het resultaat is dat deze plaat of band een coating krijgt met een dikte  $\delta_\infty$  die kleiner is dan de spleethoogte  $\delta$ .



Figuur 2.12

Beschouw een stationaire ééndimensionale stroming in de horizontale  $x$ -richting. Aangezien de druk  $P_1$  hoger dan de atmosferische buitendruk  $P_0$ , zal de viskeuze vloeistof niet alleen naar rechts stromen – in dezelfde positieve  $x$ -richting als de band haar meesleept – maar ook naar links – in de ‘verkeerde’ negatieve  $x$ -richting, tegen de meesleepkracht in, die de band in de positieve  $x$ -richting uitoefent.

De vraag is nu met behulp van een dimensie-analyse uit te zoeken hoe, in een stationair bedreven proces, de afstand  $L_2$  waarover de vloeistof zich naar links uitstrekt, afhangt van o.a. de bandsnelheid  $U$ .

In een dimensie-analyse moeten alle, of tenminste meerdere, relevante variabelen worden meegenomen die een effect hebben op de variabele in kwestie, in dit geval  $L_2$ . De meest relevante parameters zijn:

- de bandsnelheid  $U$ ;
- het drukverschil  $\Delta P = P_1 - P_0$  en niet de drukken  $P_1$  en  $P_0$  afzonderlijk: zie de opmerking in de laatste alinea voor voorbeeld 2.6;

<sup>9</sup> Ontleend aan W.H. Deen, *Analysis of Transport Phenomena*, Oxford University Press, 2<sup>nd</sup>, 2011

- de kanaalhoogte  $\delta$ : een grotere  $\delta$  laat meer ruimte voor de stroming in de ‘verkeerde’ richting; en
- de viscositeit van de vloeistof: niet alleen omdat overall de stroming viskeus is, maar ook vanwege de viskeuze meesleepkracht, of de schuifspanning, die door de bewegende band op de vloeistof wordt uitgeoefend.

Deze vier onafhankelijke variabelen tezamen bepalen  $L_2$ . In totaal gaat het dus om vijf variabelen leidend tot (volgens Buckingham’s theorema en gegeven de drie basiseenheden) twee dimensieloze kentallen.

Aan de hand van het recept van de dimensie-analyse wordt gevonden dat de verhouding  $L_2/\delta$  afhangt van de dimensieloze groep  $\delta\Delta P/\mu U$  die staat voor de verhouding van  $\Delta P$  tot  $\mu U/\delta$  welke laatste – gegeven Newton’s viscositeitswet – een maat is voor de viskeuze meesleepkracht (per oppervlakte-eenheid), oftewel de schuifspanning die door de bewegende band op de vloeistof wordt uitgeoefend. Uiteraard neemt  $L_2$  toe met toenemende  $\Delta P$  en  $h$ , en af met toenemende  $\mu$  en  $U$ .

Dit voorbeeld komt opnieuw aan de orde in Hoofdstuk 5 alwaar een analytische uitdrukking wordt afgeleid voor  $L_2$  die helemaal klopt met het resultaat van de dimensie-analyse hierboven. Merk op dat de dichtheid van het fluïdum geen rol in dit coatingsproces – aangezien de stroming viskeus is.

⑤

### **Conclusie**

Een belangrijke moeilijkheid bij het gebruik van dimensie-analyse is, dat er vrijwel altijd iets uit de analyse rolt, onafhankelijk van de keuze van de parameters. Maar met een verkeerde keuze van de onafhankelijke variabelen die het probleem ‘opspannen’ loopt het slecht af: wie te weinig fysica in de analysefase ziet of te weinig ‘common sense’ in de analyse stopt, krijgt het achteraf met fysische wetten aan de stok. Het selecteren van de grootheden en stofconstanten dient dan ook met grote zorg te gebeuren.

De conclusie luidt dan ook: dimensie-analyse, heel handig maar vergt grote zorgvuldigheid.

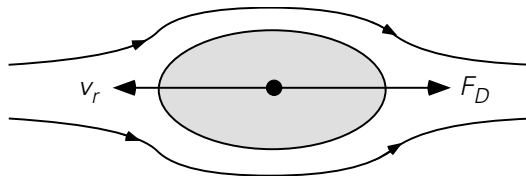
## **2.3 Krachten op omstroomde lichamen**

### **2.3.1 Omstroming en stromingsweerstand**

Een willekeurig voorwerp (of lichaam) dat door een vloeistof of een gas beweegt, zal hiervan een kracht ondervinden – en, volgens de Derde Wet van Newton, er een kracht op uitoefenen: het fluïdum zal zich verzetten tegen de beweging van het voorwerp, en omgekeerd zal het voorwerp pogen het fluïdum mee te sleuren. Mutatus mutandis is dit ook het geval als het voorwerp stil staat en het fluïdum er omheen stroomt. Het

gaat echt om de ‘relatieve beweging’ van het omstroomde voorwerp ten opzichte van het fluïdum die een specifiek stromingsveld en bijbehorend drukveld rond het omstroomde voorwerp teweegbrengt.

De analyse blijft beperkt tot rechtlijnige (relatieve) bewegingen van (min of meer) bolvormige en cilindrische deeltjes door fluïda die overall gezien òf stil staan òf met een uniforme snelheid bewegen. De focus is op de *interactiekracht*, of *meesleepkracht* (Eng. ‘drag force’), door het fluïdum uitgeoefend op het voorwerp of deeltje; in het geval het deeltje zelf beweegt, werkt de meesleepkracht de deeltjesbeweging tegen. Alleen stationaire situaties worden in ogenschouw genomen – dat wil zeggen: deeltjessnelheid en/of achtergrondsnelheid van het fluïdum worden constant verondersteld. Zijwaartse krachten, zoals de *lift force* op een vliegtuigvleugel of op een rood bloedlichaampje in de laminaire stroming door een bloedvat, alsmede deeltjesrotaties blijven hier buiten beschouwing.



Figuur 2.13.

Met behulp van dimensie-analyse (!) kan inzicht verkregen worden in de groepen die de *meesleepkracht*  $F_D$  (Eng. ‘drag force’) op het voorwerp bepalen.  $F_D$  zal afhangen van de relatieve snelheid  $v_r$  van het voorwerp of deeltje (zie figuur 2.13), zijnde de snelheid van het deeltje minus de ongestoorde snelheid van het fluïdum op grote afstand van het deeltje.

Deze relatieve snelheid bepaalt het snelheids- en drukveld om het voorwerp. Uiteraard spelen ook de viscositeit  $\mu$  en de dichtheid  $\rho_l$  van het fluïdum een rol. Tenslotte bepaalt ook de afmeting van het voorwerp de grootte van de kracht. Hiervoor nemen we een karakteristieke ‘diameter’  $D$ , dus

$$F_D = F(v_r, \mu, \rho_l, D) \quad (2.69)$$

De uitkomst van de dimensie-analyse is:

$$\frac{F_D}{\rho_l v_r^2 D^2} = k \cdot \text{Re}^\alpha \quad (2.70)$$

Voor de meesleepkracht  $F_D$  geldt dus:

$$F_D = f(\text{Re}) \cdot D^2 \cdot \rho_l v_r^2 \quad (2.71)$$

De laatste factor in het rechterlid van deze vergelijking staat voor de traagheid van de stroming, maar in § 2.3.2 zullen we zien dat deze factor meestal als  $\frac{1}{2}\rho_l v_r^2$  wordt geschreven. Hierin herkennen we ook de *dynamische druk*, zie de discussie rond de vergelijkingen (1.129) en (1.130). Aan de ‘neus’ van het omstroomde voorwerp, *d.w.z.* in het *stuwpunt* (Eng. ‘stagnation point’), komt het fluïdum lokaal tot stilstand; dientengevolge wordt daar, zoals blijkt uit de Bernoulli-vergelijking, kinetische energie omgezet in drukenergie en is de druk daar het hoogst. Deze druk wordt wel aangeduid met de term *stuwpuntdruk*, of *stagnatiedruk* (Eng. ‘stagnation pressure’)  $p_{stagn}$ :

$$p_{stagn} = p + \frac{1}{2}\rho_l v_r^2 \quad (2.72)$$

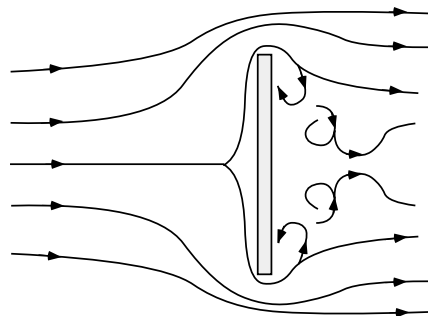
waar de eerste term in het rechterlid staat voor de locale statische druk. De gedachte hier is dat er over het voorwerp een drukval staat die te schatten is met behulp van de stuwdruk.

De tweede factor in het rechterlid van vergelijking (2.71) heeft de dimensie van een oppervlak. Dat is niet zo verwonderlijk: de meesleepkracht grijpt immers aan op het oppervlak van het voorwerp. De functie van het Reynolds-getal in het rechterlid van vergelijking (2.68) brengt de ‘details’ van het stromingsveld rondom het voorwerp in rekening, waarbij het natuurlijk uitmaakt of de stroming om het voorwerp heen laminair of turbulent is.

Om een en ander te kunnen verduidelijken moeten er twee bijdragen aan de totale *meesleepkracht*  $F_D$  onderscheiden worden: namelijk de vormweerstand en de wrijvingsweerstand.

Het begrip *vormweerstand* (Eng. ‘form drag’) is goed te begrijpen aan de hand van het onderstaande voorbeeld. Beschouw een vlakke plaat (oppervlak  $A$ ) die loodrecht op de stroming van een vloeistof staat (zie figuur 2.14). De vloeistof die de plaat nadert, zal worden afgeremd en bouwt voor de plaat een *dynamische druk* op van de orde van grootte  $\frac{1}{2}\rho_l v_r^2$ . Aan de achterzijde van de plaat, in het zogenaamde zog, zijn echter volop wervels in de vloeistof aanwezig. Hierdoor heerst hier niet ook deze extra stuwdruk: er zit immers kinetische energie in de wervels, die volgens de Bernoulli-vergelijking van de drukenergie afgaat, en bovendien is er sprake van aanzienlijke *energiedissipatie*. Er is dus een drukval over de plaat. Dit resulteert in een kracht op de plaat in de richting van de stroom:

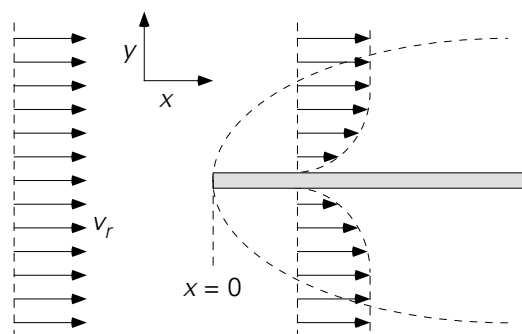
$$F \propto A \cdot \Delta p = A \cdot \frac{1}{2}\rho_l v_r^2 \quad (2.73)$$



Figuur 2.14.

De *wrijvingsweerstand* (Eng. ‘friction drag’, of ‘skin friction’) treedt met name op als de stroming parallel aan het oppervlak van het voorwerp verloopt. Ook hiervan is de vlakke plaat een goed voorbeeld. Nu echter gaat het om een stilstaande plaat parallel aan de stroming. Juist op de plaat is de snelheid van de vloeistof gelijk aan die van de plaat, dus nul. In de grenslaag (zie figuur 2.15) bouwt de snelheid zich in de  $y$ -richting op tot de waarde  $v_r$  bereikt wordt aan de rand van de grenslaag. Dit profiel (dat zowel  $x$ - als  $y$ -afhankelijk is) kan met behulp van de  $x$ - en  $y$ -impulsbalans, de massabalans en grenslaagtheorie worden berekend. Hieruit is dan de voor ons belangrijke schuifspanning tussen vloeistof en plaat te bepalen. Het resultaat is

$$\tau_w = 0,644 \left( \frac{\rho_l v_r x}{\mu} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \rho_l v_r^2 \quad \text{mits } \text{Re}_x < 3 \cdot 10^5 \quad (2.74)$$



Figuur 2.15.

De totale kracht op de plaat (lengte  $L$  in de  $x$ -richting, breedte  $B$ ) is nu te bepalen door de bijdrage van onder- en bovenkant van de plaat op te tellen:

$$F_{\text{wrijving}} = 2 \int_0^L \tau_w \cdot B \, dx = 2,66 \left( \frac{\rho_l v_r L}{\mu} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot BL \cdot \frac{1}{2} \rho_l v_r^2 \quad (2.75)$$

Met behulp van bovenstaande illustraties van de begrippen *vormweerstand* en *wrijvingsweerstand* in enkele extreme situaties is gemakkelijk in te zien dat de totale meesleepkracht op een willekeurig voorwerp in een stroming bepaald wordt door de



resultante van alle locale waarden van de druk en de schuifspanning zoals die door alle stukjes van het oppervlak van het voorwerp ervaren worden. In principe kan dus de totale meesleepkracht berekend worden door de component in de stromingsrichting te nemen van al die locale krachtjes en deze te integreren over het gehele oppervlak van het voorwerp (zoals expliciet uitgeschreven voor een vlakke parallel aangestroomde plaat in het eerste deel van vergelijking (2.75)). Daarbij is de *vormweerstand* dan het de resultante van de drukverdeling rond het voorwerp, terwijl de *wrijvingsweerstand* volgt door integratie van de wrijvingsweerstand aan het oppervlak van het voorwerp.

Daarbij moeten we bedenken dat het snelheidsveld rondom het voorwerp (waaruit alle locale waarden van de schuifspanning berekend worden) en het drukveld in het algemeen tijdsafhankelijk en driedimensionaal zijn. De huidige stand van de techniek maakt een numerieke berekening van de totale meesleepkracht als boven omschreven voor steeds meer stromingscondities mogelijk, maar over het algemeen wordt nog steeds alom van sterk vereenvoudigde benaderingen gebruik gemaakt.

### **Samenvatting**

Elk voorwerp dat beweegt door en ten opzichte van een omringend fluïdum, ondervindt een tegenwerkende kracht: de meesleepkracht. Deze kracht tracht het lichaam met dezelfde snelheid te laten bewegen als de vloeistof. Daarbij kunnen er twee effecten onderscheiden worden: de vormweerstand en de wrijvingsweerstand, die uitgebreid toegelicht zijn. Tezamen vormen zij de meesleepkracht.

Met behulp van een dimensie-analyse wordt een uitdrukking voor de meesleepkracht gevonden:

$$F_D = f(\text{Re}) \cdot D^2 \cdot \rho_l v_r^2$$

Ook het begrip stuwdruk is in dit verband weer ter sprake gekomen, evenals de bijdrage van schuifspanningen tussen voorwerp en fluïdum. De meesleepkracht hangt uiteraard sterk af de wijze waarop het fluïdum het voorwerp omstroomt en dus van het Reynolds-getal betrokken op het deeltje.

### **2.3.2 Meesleepkracht en weerstandscoefficiënt**

Slechts in zeer bijzondere gevallen is de meesleepkracht analytisch te berekenen. Dit is bijvoorbeeld het geval voor *kruipstroming* rond een bol, dat is de omstroming van een bol voor lage waarden van het Reynolds-getal betrokken op de bol ( $\text{Re} < 1$ ), indien de vloeistof of het gas incompressibel is, d.w.z. een constante dichtheid heeft. Voor dergelijke lage Reynolds-getallen is de stroming om de bol symmetrisch. Dit betekent echter niet dat er geen vormweerstand is, want door dissipatie is er toch een drukverlies

over de bol. De analytische oplossing leidt tot een uitdrukking voor  $F_D$  die bekend staat als de *wet van Stokes*:

$$F_D = -6\pi\mu Rv_r \quad \text{mits } \text{Re} < 1$$

$$\text{(of voor preciezer data, } \text{Re} < 0.1)$$
 (2.76)

met  $R$  de bolstraal. Uitgesplitst naar vorm- en wrijvingsweerstand is dit

$$F_{\text{vorm}} = -2\pi\mu Rv_r$$
 (2.77)

$$F_{\text{wrijving}} = -4\pi\mu Rv_r$$
 (2.78)

In de ingenieurspraktijk wordt de totale meesleepkracht van een stroming op een voorwerp over het algemeen gemodelleerd met behulp van de empirische relatie

$$F_D = C_D(\text{Re}) \cdot A_{\perp} \cdot \frac{1}{2}\rho_l v_r^2$$
 (2.79)

waarin  $A_{\perp}$  de grootste dwarsdoorsnede van het voorwerp is (loodrecht op de stromings- of bewegingsrichting). Hierbij wordt stilzwijgend een uniforme aanstroomsnelheid van het fluïdum dan wel een stilstaand fluïdum verondersteld (zie de inleiding van § 2.3.1). Vergelijking (2.79) vertoont – niet toevallig – grote gelijkenis met vergelijkingen (2.70), (2.73) en (2.75). Let wel dat de parallel aangestroomde plaat niet gedekt wordt door vergelijking (2.79) omdat daarbij  $A_{\perp}$  tot nul nadert.

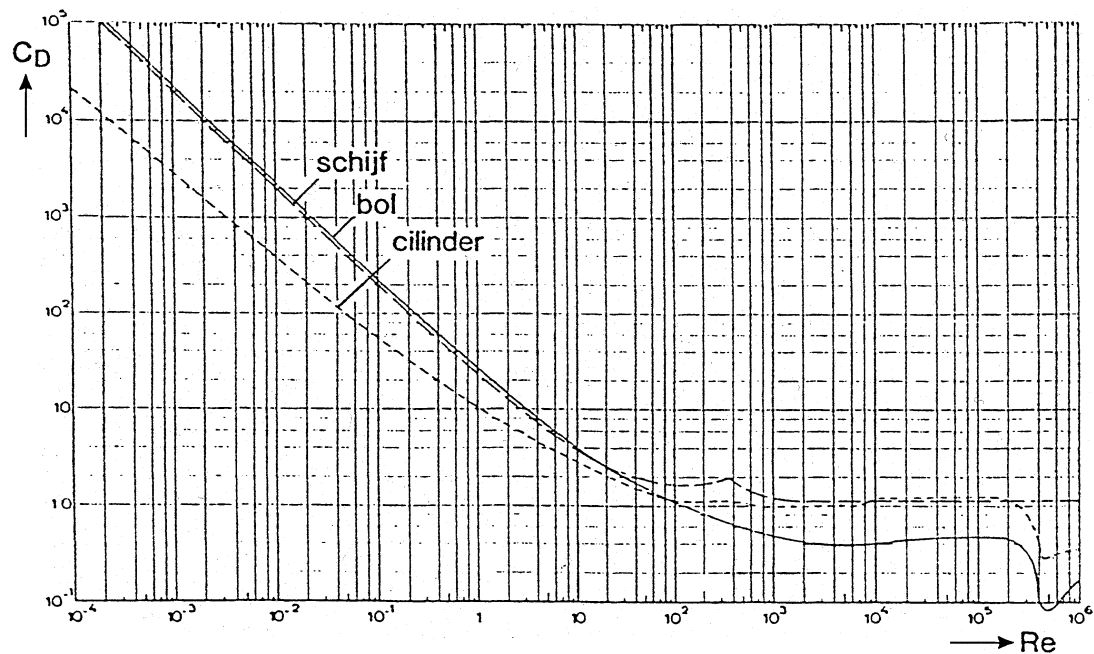
Vanwege de Derde Wet van Newton oefent niet alleen het medium een meesleepkracht uit op een deeltje, zoals gemodelleerd door vergelijking (2.79), maar oefent zo'n deeltje ook een reactiekracht uit op het medium: de kracht van vergelijking (2.79) voorzien van een minteken. Let wel dat zo'n minteken ook betekent dat de kracht in de tegengestelde richting werkt. Een deeltje dat met snelheid  $v_r$  door een medium beweegt, ondervindt van dit medium een tegen-werkende kracht. Dit blijkt uit de volgende herformulering van vergelijking (2.79) in vectornotatie:

$$\vec{F}_D = -C_D \cdot A_{\perp} \cdot \frac{1}{2}\rho_l |\vec{v}_r| \vec{v}_r$$
 (2.80)

waarin  $|\vec{v}_r|$  de modulus van de snelheid weergeeft, d.i. de grootte van de snelheid (ongeacht richting). Altijd geldt dat  $\vec{v}_r$  en  $\vec{F}_D$  vanwege hun definities een tegengestelde richting hebben (zie ook figuur 2.13):  $\vec{v}_r$  staat immers voor de snelheid van het voorwerp ten opzichte van het fluïdum, terwijl  $\vec{F}_D$  de kracht van het fluïdum op het voorwerp is.

De coëfficiënt  $C_D$  heet de *weerstandscoefficiënt* (Eng. 'drag coefficient') en is dus een functie van  $\text{Re}$  – zoals ook uit de dimensie-analyse volgde. In  $\text{Re}$  zit, behalve vloeistofeigenschappen en de relatieve snelheid, ook een karakteristieke afmeting van

het voorwerp. Voor een bol of een dwars aangestroomde cilinder is dat de diameter. De vorm van het voorwerp komt terug in de precieze vorm die de functie  $C_D(\text{Re})$  heeft. In figuur 2.16 is  $C_D$  voor enkele soorten voorwerpen weergegeven.

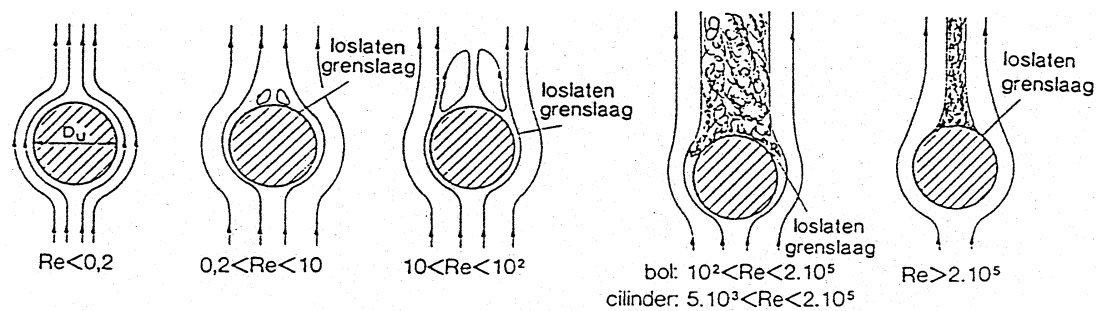


Figuur 2.16.

De wet van Stokes kan ook in termen van een weerstandscoefficiënt geschreven worden. Combinatie van vergelijkingen (2.76) en (2.79) levert (met diameter  $D = 2R$ ):

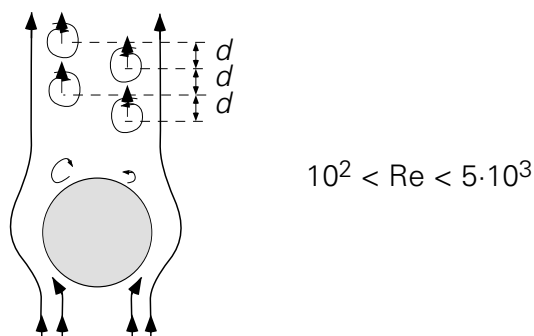
$$C_D = \frac{24\mu}{\rho v_r D} = \frac{24}{\text{Re}} \quad (\text{mits } \text{Re} < 1, \text{ of liever nog } \text{Re} < 0.1) \quad (2.81)$$

Als het  $\text{Re}$ -getal groter wordt, ontstaan er aan de achterzijde van de bol wervels. Er wordt dan een zog achter de bol gevormd, wanneer de grenslaag loslaat van het voorwerp ten gevolge van de traagheid van het fluïdum dat het liefst rechtuit blijft gaan. Bij grotere  $\text{Re}$ -getallen worden de wervels groter en schuift het punt waar de grenslaag loslaat meer naar voren. Bij nog grotere  $\text{Re}$ -getallen wordt het zog onregelmatig en turbulent. Er worden dan wervels door de stroming meegenomen en nieuwe achter de bol geproduceerd. Uiteindelijk wordt bij zeer hoge  $\text{Re}$ -getallen de grenslaag turbulent en schuift het punt waar de grenslaag loslaat weer naar de achterzijde van de bol. Een en ander is in figuur 2.17 geschetst.



Figuur 2.17.

Een analoge beschrijving is er ook te geven voor de stroming om loodrecht aange-stroomde cilinders. Hierbij treedt voor  $10^2 < Re < 5 \cdot 10^3$  nog een bijzonder verschijnsel op. De wervels achter de cilinder – dit zijn er twee, in de vorm van cilinders – worden dan instabiel. De cilinder stoot nu afwisselend links en rechts een wervel af. Achter de cilinder ontstaat een zogenaamde *Kármánse wervelstraat* (naar *Von Kármán*). In figuur 2.18 is zo'n straat schematisch weergegeven.



Figuur 2.18.

### Samenvatting

De meesleepkracht die een stroming op een voorwerp uitoefent (in een stationaire situatie) wordt over het algemeen gemodelleerd met de stuwdruk en de projectie van het oppervlak van het lichaam op een vlak dat loodrecht staat op de relatieve snelheid van lichaam en vloeistof:

$$F_D = C_D(Re) \cdot A_{\perp} \cdot \frac{1}{2} \rho_l v_r^2$$

De coëfficiënt  $C_D$  in deze uitdrukking heet de weerstandscoefficiënt (*Eng.* 'drag coefficient') en is een functie van het Reynolds-getal (betrokken op het deeltje) en van de vorm van het lichaam.

Voor kruipstroming rondom een bolvormig deeltje (voor liefst  $Re$  kleiner dan 0.1) geldt de wet van Stokes

$$F_D = 6\pi\mu R v_r$$

die met de vorige vergelijking in overeenstemming is voor  $C_D = 24/Re$ .

De omstroming van bollen en cilinders is kwalitatief beschreven. Er moet o.a. onderscheid gemaakt worden tussen laminaire en turbulente omstroming. Een belangrijk aspect betreft de loslating van de grenslaag los van het voorwerp en het precieze punt op de omtrek van het voorwerp waar dit gebeurt.

### 2.3.3 **Krachtenbalans en eenparige snelheid**

Bovenstaande concepten met betrekking tot de meesleepkracht die een voorwerp in een stromingsveld ondervindt, kunnen gebruikt worden voor het berekenen van (relatieve) deeltjesbewegingen. Het gedrag van een deeltje wordt immers bepaald door de resultante van alle krachten die erop werken. Is de resultante ongelijk aan nul, dan versnelt het deeltje (Tweede Wet van Newton); is de resultante gelijk aan nul, dan blijft het deeltje in rust of voert het een eenparige beweging uit (Eerste Wet van Newton).

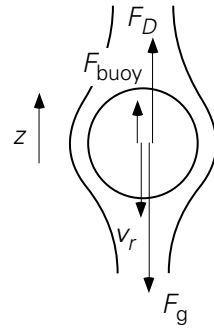
Hoe groot de resultante is, is de uitkomst van een krachtenbalans. De meesleepkracht is één van krachten in zo'n balans en hangt van de relatieve snelheid  $v_r$  af. Indien de resultante van de krachten nul is, volgt de relatieve snelheid dus direct uit de krachtenbalans.

Beschouw een deeltje dat met een eenparige snelheid door een fluïdum valt. Uit de klassieke mechanica is bekend dat dan de som van de krachten op het deeltje dan gelijk aan nul moet zijn. Uiteraard volgt dit ook op grond van de stationaire impulsbalans over het deeltje: convectief stroomt er immers geen impuls in of uit het deeltje, en dus reduceert de stationaire impulsbalans voor het deeltje als controle-volume – zie vergelijkingen (1.139) en (1.140) – tot een krachtenbalans:

$$\sum F_z = 0 \quad (2.82)$$

Voor een deeltje met dichtheid  $\rho_p$  dat valt wordt dit: de som van zwaartekracht (*Eng.* 'gravity'), opwaartse kracht (*Eng.* 'buoyancy') en meesleepkracht (*Eng.* 'drag force') is gelijk aan nul (zie figuur 2.19):

$$F_g + F_{\text{buoy}} + F_D = 0 \quad (2.83)$$



Figuur 2.19.

Met de  $z$ -coördinaat en de krachten positief gekozen in de opwaartse richting, geldt voor de opwaartse kracht:

$$F_{\text{buoy}} = \frac{\pi}{6} D^3 \cdot \rho_a g \quad (2.84)$$

voor de zwaartekracht:

$$F_g = - \frac{\pi}{6} D^3 \cdot \rho_p g \quad (2.85)$$

en voor de meesleepkracht:

$$F_D = C_D \cdot A_{\perp} \cdot \frac{1}{2} \rho_a v_r^2 \quad (2.86)$$

waarbij  $\rho_a$  staat voor de dichtheid van het fluïdum (het subscript  $a$  staat voor 'ambient') en  $A_{\perp} = \frac{\pi}{4} D^2$  (en niet  $\pi D^2$  want dat is het hele boloppervlak en het gaat hier om de projectie!). Verder dient opgemerkt te worden dat de meesleepkracht positief, want omhoog gericht is: waar een deeltje valt, oefent het fluïdum een tegengesteld gerichte kracht uit (ofwel: ten opzichte van het deeltje stroomt het fluïdum omhoog en dus is de meesleepkracht omhoog gericht).

Substitutie van de vergelijkingen (2.84), (2.85) en (2.86) in de balans van vergelijking (2.83) levert

$$C_D \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{1}{2} \rho_a v_r^2 = \frac{\pi}{6} D^3 \cdot (\rho_p - \rho_a) g \quad (2.87)$$

en daaruit volgt

$$v_r = - \left( \frac{4}{3} g D \cdot \frac{\rho_p - \rho_a}{\rho_a} \cdot \frac{1}{C_D} \right)^{1/2} \quad (2.88)$$

waarbij het minteken in rekening brengt dat het deeltje valt, tegen de opwaarts gekozen  $z$ -richting in beweegt.

Een probleem bij het bepalen van de eenparige snelheid uit zo'n balans is dat, om de snelheid te bepalen, de  $C_D$  uit vergelijking (2.79) voor de meesleepkracht bekend moet zijn. Nu is  $C_D$  een functie van  $Re$ , dus van de snelheid. Via *iteratie* is evenwel uit dit dilemma te komen. Dit zal geïllustreerd worden aan de hand van een tweetal voorbeelden.

**Voorbeeld 2.8.** *Een hagelsteen*

Beschouw de eenparige val van een bolvormige hagelsteen (diameter  $D = 4$  mm, dichtheid  $\rho_n = 915$  kg/m<sup>3</sup>) door stilstaande lucht.

Hoe groot is de eenparige valsnelheid  $v_r$ ?

In figuur 2.16 kan voor een initiële schatting van  $Re$  een waarde van  $C_D$  afgelezen worden. Dan wordt met vergelijking (2.88) een  $v_r$  berekend, waarmee vervolgens een nieuwe  $Re$  wordt berekend. Daarmee wordt vervolgens een nieuwe waarde van  $C_D$  afgelezen en een tweede  $v_r$  berekend. Dit iteratieproces wordt herhaald totdat  $v_r$  niet meer (noemenswaardig) verandert.

Voor de hagelsteen kun je op grond van alledaagse ervaring verwachten dat  $v_r$  zo groot zal zijn dat  $Re \gg 1$  is (dat is snel het geval, want de luchtviscositeit is erg laag:  $\mu_a = 1,8 \cdot 10^{-5}$  Ns/m<sup>2</sup>). Op basis van een beginschatting dat  $Re > 10^4$  kan de iteratie als volgt verlopen:

$$Re > 10^4 \rightarrow C_D = 0,43 \text{ invullen in vergelijking (2.88)} \rightarrow v_r = 9,6 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$Re = 2570 \rightarrow C_D = 0,40 \rightarrow v_r = 10,0 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$Re = 2660 \rightarrow C_D = 0,40$$

Verder itereren is dus niet meer nodig en dus wordt gevonden dat de eenparige valsnelheid van de hagelsteen zo'n 10 m/s is. ⑤

**Voorbeeld 2.9.** *Een luchtbelletje in lijm*

Een bolvormig luchtbelletje (dichtheid  $\rho_a = 1,2$  kg/m<sup>3</sup>, met subscript  $a$  van 'air') stijgt langzaam op in een flesje lijm met een constante slipsnelheid  $v_s$ . Het belletje heeft een diameter van 3 mm en legt 2,5 cm af in vijf seconden (eenvoudig te meten!). De dichtheid van de lijm is  $\rho_l = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

Bepaal de viscositeit van de lijm.

De oplossing volgt ook nu weer uit een krachtenbalans, zie vergelijking (2.83). Met de positieve  $z$ -as vertikaal omhoog is de meesleepkracht nu negatief, omdat het luchtbelletje omhoog beweegt. Daarmee wordt vergelijking (2.83):

$$-\frac{\pi}{6}D^3 \cdot \rho_a g + \frac{\pi}{6}D^3 \cdot \rho_l g - C_D \cdot \frac{\pi}{4}D^2 \cdot \frac{1}{2}\rho_l v_s^2 = 0 \quad (2.89)$$

Daaruit volgt voor de weerstandscoefficiënt

$$C_D = \frac{4}{3} \frac{gD}{v_s^2} \frac{\rho_l - \rho_a}{\rho_l} \quad (2.90)$$

Uit de gegevens volgt dan:  $C_D = 1570$ .

Zo'n hoge  $C_D$  betekent dat  $Re < 1$  (zie figuur 2.16). Maar dan geldt ook  $C_D = 24/Re$  (belletje is bolvormig) en dus volgt  $Re = 24/C_D = 1,53 \cdot 10^{-2}$ . De snelheid van het belletje volgt uit de gegevens:  $v_s = 5 \cdot 10^{-3}$  m/s.

Voor de viscositeit van de lijm wordt dan gevonden:

$$\mu_l = \frac{\rho_l v_s D}{Re} = 0,98 \text{ Ns/m}^2 \quad (2.91)$$

⑤

### **Samenvatting**

De meesleepkracht is een van de krachten die een bewegend deeltje ondervindt in en van een fluïdum dat zo'n deeltje omstroomt – naast de zwaartekracht en de opwaartse kracht. De meesleepkracht speelt een belangrijke rol bij het berekenen van deeltjesbewegingen. De relatieve deeltjessnelheid is constant als de som van de krachten die op het deeltje werken nul is.

Vaak is voor de berekening van de eenparige snelheid van een deeltje een iteratieve berekening onontkoombaar, aangezien de meesleepcoëfficiënt van het Reynolds-getal (betrokken op het deeltje) afhangt.





# 3 Warmtetransport

## 3.1 Stationaire warmtegeleiding

In § 2.1 is de mogelijkheid om warmte te (laten) transporteren via *geleiding* al geïntroduceerd. Warmtegeleiding staat voor het vermogen van moleculen om zonder netto massatransport toch een netto warmtestroom te laten plaats vinden. De belangrijke vergelijking hierbij is de *wet van Fourier*. Deze wet legt het verband tussen de warmteflux en de ‘drijvende’ temperatuurgradiënt:

$$\phi_{q,x}'' = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (3.1)$$

Volgens deze wet geeft een gradiënt in de temperatuur in de  $x$ -richting aanleiding tot een warmteflux in de  $x$ -richting en wel zo, dat de warmte altijd stroomt van een plaats met een hoge temperatuur naar een plaats met een lage temperatuur – vandaar het minteken in het rechterlid van vergelijking (3.1). In dit hoofdstuk zal eenvoudigheidshalve de warmtegeleidingscoëfficiënt  $\lambda$  steeds constant verondersteld worden (d.w.z. ook onafhankelijk van de temperatuur); de uitbreiding naar een temperatuurafhankelijke  $\lambda$  triviaal.

Allereerst zal warmtegeleiding onder stationaire condities behandeld worden voor verschillende elementaire 1-D configuraties. Aan het eind van § 3.1 zullen numerieke technieken voor meer complexe, meer-dimensionale geometrieën worden geïntroduceerd.

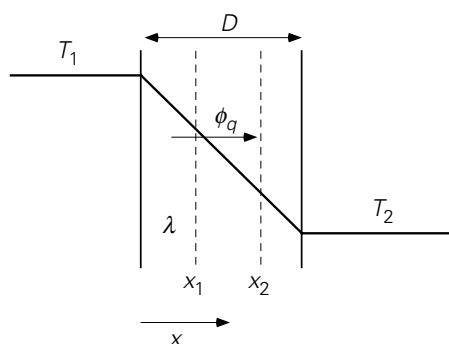
### 3.1.1 Warmtegeleiding in cartesische coördinaten

De eerste situatie betreft een vlakke plaat (zie figuur 3.1) met dikte  $D$  en vervaardigd van een vaste stof met een warmtegeleidingscoëfficiënt  $\lambda$ . De linkerzijde van de plaat wordt op een constante temperatuur  $T_1$  gehouden, de rechterzijde op een constante temperatuur  $T_2$ . In de stationaire situatie luidt de warmtebalans over een strip (of plakje) uit de plaat tussen  $x_1$  en  $x_2$ :

$$0 = \phi_{q,\text{in}} - \phi_{q,\text{uit}} = \phi_q|_{x_1} - \phi_q|_{x_2} \quad (3.2)$$

Met andere woorden:

$$\phi_q|_{x_1} = \phi_q|_{x_2} \quad (3.3)$$



Figuur 3.1

Aangezien deze vergelijking voor willekeurige  $x_1$  en  $x_2$  in de plaat geldt, is de warmtestroom onafhankelijk van  $x$  en dus een constante. Dit geldt evenzeer voor de warmteflux, aangezien het oppervlak  $A$  van de plaat waar de warmtestroom doorheen gaat, ook onafhankelijk is van  $x$ . Uit

$$\phi_q'' = -\lambda \frac{dT}{dx} = \text{constant}$$

volgt

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\phi_q''}{\lambda} = \text{constant} \quad (3.4)$$

Hierin is  $\phi_q''$  nog een nader te bepalen constante. Integratie van vergelijking (3.4) levert een (tweede) integratieconstante op. Daarom zijn twee randvoorwaarden nodig om tot een volledige beschrijving van dit warmtetransportprobleem te komen. Met randvoorwaarden  $x = 0 \rightarrow T = T_1$  en  $x = D \rightarrow T = T_2$  wordt als temperatuurprofiel

$$\frac{T_1 - T(x)}{T_1 - T_2} = \frac{x}{D} \quad (3.5)$$

verkregen, terwijl voor de warmteflux dan geldt

$$\phi_q'' = \frac{\lambda}{D} (T_1 - T_2) \quad (3.6)$$

Vergelijking (3.5) laat zien dat het temperatuurprofiel in de plaat een rechte lijn is.

Overigens kan vergelijking (3.5) ook verkregen worden door een energiebalans op te stellen voor een dun plakje tussen  $x$  en  $x + dx$ . Deze balans luidt:

$$0 = A \cdot \left( -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_x \right) - A \cdot \left( -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} \right) \quad (3.7)$$

Vergelijking (3.7) is te vereenvoudigen met behulp van de regel:

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{df}{dx} \cdot dx \quad (3.8)$$

en luidt dan (na delen door  $A \cdot \lambda$ , aangenomen dat  $\lambda$  niet via  $T$  ook van de plaats  $x$  afhangt)

$$0 = - \left. \frac{dT}{dx} \right|_x + \left\{ \left. \frac{dT}{dx} \right|_x + \frac{d}{dx} \left( \left. \frac{dT}{dx} \right) dx \right\} \quad (3.9)$$

Dit resultaat kan vereenvoudigd worden tot

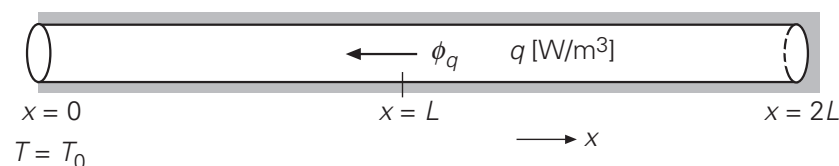
$$\frac{d}{dx} \left( \left. \frac{dT}{dx} \right) \right) = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (3.10)$$

Dit levert na twee maal integreren en gebruik van de twee randvoorwaarden weer vergelijking (3.5) op.

**Voorbeeld 3.1.** *Warmteproductie in een staaf*

In het gedeelte  $L \leq x \leq 2L$  van een koperen staaf met lengte  $2L$  en doorsnede  $A$  vindt een constante en uniforme warmteproductie  $q$  plaats, waarbij  $q$  uitgedrukt wordt in  $W/m^3$ . Het ene uiteinde ( $x=0$ ) wordt op een vaste temperatuur  $T_0$  gehouden, terwijl de rest van de staaf (d.w.z. het gehele oppervlak van de staaf inclusief het andere uiteinde op  $x = 2L$ ) perfect geïsoleerd is.

Gevraagd wordt een uitdrukking af te leiden voor het temperatuurprofiel in de gehele staaf voor deze stationaire situatie.



*Figuur 3.2.*

Een schets van het probleem is weergegeven in figuur 3.2, waarbij de arcering aangeeft dat er door de betrokken oppervlakken geen warmteafgifte plaats vindt. Daarom is er hier sprake van eendimensionaal warmtetransport en wel in de negatieve  $x$ -richting. Omdat het warmtetransport door geleiding geschiedt bij  $dT/dx > 0$ , volgt uit de wet van Fourier inderdaad  $\phi_q'' < 0$ . Uit een warmtebalans over het rechtergedeelte van de staaf voor deze stationaire situatie volgt dat alle warmte geproduceerd in deze rechterhelft afgeleverd wordt door het vlak  $x=L$  aan de linkerhelft:

$$0 = 0 + \phi_q \Big|_{x=L} + qAL \quad (3.11)$$

Dat betekent uiteraard dat de warmteflux  $\phi_q''$  negatief moet zijn, d.w.z. naar links gericht is en het controlevolume verlaat, terwijl de temperatuurgradiënt (op  $x = L$ ) positief moet zijn, d.w.z. dat de temperatuur naar recht toeneemt:

$$\phi_q'' \Big|_{x=L} = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = qL \quad (3.12)$$

Uit de vergelijkingen (3.11) en (3.12) kunnen evenwel geen conclusies getrokken worden over het temperatuurprofiel binnen het linker- danwel het rechterdeel van de staaf. Precies zoals bij het concentratieprofiel in een propstroomreactor waar een balans voor component A moest worden opgesteld over een dun plakje  $dx$  binnen de reactor (zie § 1.2.2), dient nu een warmtebalans opgesteld te worden over een plakje  $dx$  uit de staaf. Daarbij is het dienstig onderscheid te maken tussen het gedeelte  $0 \leq x \leq L$  waarin geen warmteproductie plaats vindt, en het gedeelte  $L \leq x \leq 2L$  wel met warmteproductie: een warmtebalans voor een plakje  $dx$  in het gedeelte  $0 \leq x \leq L$  bevat immers geen productieterm, terwijl een warmtebalans voor een plakje  $dx$  in het gedeelte  $L \leq x \leq 2L$  wel een productieterm bevat.

Het opstellen van een warmtebalans voor een plakje  $dx$  in het gedeelte  $0 \leq x \leq L$  geeft de tweede-orde differentiaalvergelijking (3.10) – de afleiding die start bij vergelijking (3.7) is helemaal van toepassing. De twee randvoorwaarden die nodig zijn om tot het temperatuurprofiel te komen in dit gedeelte van de staaf, zijn  $T = T_0$  op  $x = 0$  (is gegeven in de vraagstelling) en de uitdrukking voor de temperatuurgradiënt op  $x = L$  als gegeven in vergelijking (3.12). Het resultaat voor het gedeelte  $0 \leq x \leq L$  luidt:

$$T = T_0 + \frac{qL}{\lambda} x \quad (3.13)$$

Het opstellen van een warmtebalans voor een plakje  $dx$  in het gedeelte  $L \leq x \leq 2L$  geeft

$$0 = -\lambda A \frac{dT}{dx} \Big|_x - \left( -\lambda A \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} \right) + qA dx \quad (3.14)$$

waaruit nu volgt:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{q}{\lambda} \quad (3.15)$$

Ook hier zijn weer twee randvoorwaarden nodig: uit het gegeven van de perfecte isolatie volgt  $dT/dx = 0$  op  $x = 2L$ , terwijl voor de temperatuur op  $x = L$  een uitdrukking kan worden afgeleid met behulp van vergelijking (3.13). Voor het temperatuurprofiel in het gedeelte  $L \leq x \leq 2L$  wordt daarmee gevonden:

$$T = T_0 + \frac{2qL}{\lambda}x - \frac{q}{2\lambda}(x^2 + L^2) \quad (3.16)$$

Merk op dat voor het oplossen van dit probleem drie verschillende warmtebalansen nodig zijn. ◻

### 3.1.2 Analogie met de Wet van Ohm

Uit vergelijking (3.6) volgt dat het temperatuurverschil  $\Delta T \equiv T_1 - T_2$  over de plaat op eenvoudige wijze samenhangt met de warmteflux:

$$\Delta T = \phi_q'' \frac{D}{\lambda} = \phi_q \frac{D}{\lambda A} \quad (3.17)$$

Vergelijking (3.17) laat zien dat de drijvende kracht  $\Delta T$  een warmteflux  $\phi_q''$  tot gevolg heeft. De vergelijking heeft dezelfde trekken als de *wet van Ohm* bekend uit de elektriciteitsleer:

$$\Delta V = I \cdot R = I \frac{\rho L}{A} \quad (3.18)$$

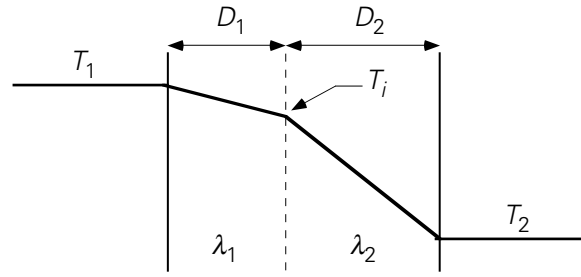
waarin  $L$  de lengte van de stroomdraad is,  $A$  de dwarsdoorsnede en  $\rho$  de soortelijke weerstand van het materiaal waar de stroomdraad van is gemaakt.

Deze gelijkenis geeft een wat andere kijk op warmtegeleiding. De wet van Ohm zegt immers: als een elektrisch potentiaalverschil (een spanning)  $\Delta V$  aangelegd wordt over een weerstand  $R$ , dan heeft deze *drijvende kracht*  $\Delta V$  een elektrische stroom  $I$  tot gevolg, die recht evenredig is met  $\Delta V$ . De evenredigheidsconstante  $R$  karakteriseert de weerstand van een stuk materiaal tegen het transport van elektriciteit. Met deze beschouwing in het achterhoofd kan in vergelijking (3.17)  $\Delta T$  opgevat worden als de ‘drijvende kracht’ en het warmtetransport  $\phi_q$  als de ‘stroom’.

Dit betekent tevens dat  $D/\lambda A$  in vergelijking (3.17) geïnterpreteerd mag worden als een weerstand, maar nu tegen transport van warmte. Bedenk dat in vergelijking (3.17)  $D$  de af te leggen weglengte voor het warmtetransport is, zoals  $L$  in vergelijking (3.18) de weglengte is die de elektrische stroom moet afleggen. De rol van de reciproque warmtegeleidingscoëfficiënt, dus van  $1/\lambda$ , is daarmee volledig vergelijkbaar met die van de soortelijke weerstand  $\rho$ . Merk op dat zowel  $\lambda$  als  $\rho$  stoffeigenschappen zijn. De

grootheid  $D/\lambda$  is dan de specifieke weerstand (d.w.z. de weerstand per oppervlakte-eenheid) tegen warmtetransport: hoe groter  $D/\lambda$ , hoe kleiner de warmteflux  $\phi_q''$  bij gegeven drijvende kracht  $\Delta T$ .

De situatie kan iets gecompliceerd worden door 2 platen met verschillende diktes  $D_1$  en  $D_2$  van verschillend materiaal met warmtegeleidingscoëfficiënten  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  tegen elkaar aan te zetten. De linkerkant van plaat 1 wordt op temperatuur  $T_1$  gehouden, de rechterkant van plaat 2 op  $T_2$  (zie figuur 3.3). Ook hier kan afgeleid worden wat in de stationaire toestand het verband is tussen de drijvende kracht  $\Delta T$  over de twee platen en de warmteflux door de platen. Deze situatie doet zich bijvoorbeeld voor als een laag isolatiemateriaal wordt aangebracht om de warmtestroom van links naar rechts (het warmteverlies) te beperken.



Figuur 3.3.

Als de temperatuur op het grensvlak tussen de beide platen  $T_i$  genoemd wordt, kan aan de hand van vergelijking (3.17) voor het verband tussen de drijvende kracht  $T_1 - T_i$  over plaat 1 en de bijbehorende flux  $\phi_{q,1}''$  direct geschreven worden:

$$T_1 - T_i = \phi_{q,1}'' \cdot \frac{D_1}{\lambda_1} \quad (3.19)$$

en vervolgens voor de tweede plaat analoog:

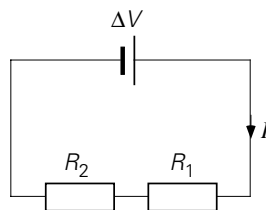
$$T_i - T_2 = \phi_{q,2}'' \cdot \frac{D_2}{\lambda_2} \quad (3.20)$$

Nu is voor dit geval  $\phi_{q,1}''$  gelijk aan  $\phi_{q,2}''$ , zoals eenvoudig is te zien uit een warmtebalans over een volume met de ene zijde in materiaal 1 en de andere zijde in materiaal 2. Optellen van de vergelijkingen (3.19) en (3.20) laat de tussentijds ingevoerde onbekende temperatuur  $T_i$  eruit vallen:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \phi_q'' \left( \frac{D_1}{\lambda_1} + \frac{D_2}{\lambda_2} \right) = \phi_q \left( \frac{D_1}{\lambda_1 A} + \frac{D_2}{\lambda_2 A} \right) \quad (3.21)$$

De bovengeschetste situatie van twee platen kent wederom een bekend elektrisch analogon, nl. twee elektrische weerstanden in serie (zie figuur 3.4). Daarvoor geldt

$$\Delta V = I \cdot (R_1 + R_2) \quad (3.22)$$



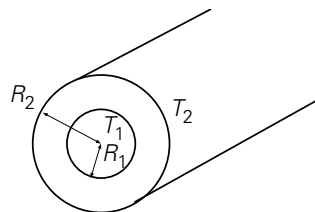
Figuur 3.4.

Vergelijkingen (3.21) en (3.22) zijn geheel analoog: ook in vergelijking (3.22) moeten bij serieschakeling de afzonderlijke weerstanden opgeteld worden om de totale weerstand te verkrijgen. Hierbij doet de volgorde van de weerstanden er voor de grootte van het warmtetransport of de elektrische stroom niet toe.

### 3.1.3 Warmtegeleiding in cilindrische coördinaten

In de gevallen tot nu toe was de flux door het materiaal steeds onafhankelijk van de positie in het materiaal. Eigenlijk is dit een uitzondering, want in het algemeen is de flux wel degelijk plaatsafhankelijk. Dit kan geïllustreerd worden aan de hand van het verband tussen drijvende kracht en flux in het geval van een holle cilinder. Een typisch voorbeeld van zo'n situatie is een pijp waar water door heen stroomt met een temperatuur verschillend van die van het medium buiten. Dan is er sprake van radiaal warmtetransport door de pijpwand als gevolg van geleiding.

Veronderstel de situatie, zoals geschetst in figuur 3.5, weer stationair. De holle cilinder heeft binnenstraal  $R_1$  en buitenstraal  $R_2$ . Het binnenoppervlak wordt op temperatuur  $T_1$  gehouden, de buitenkant op  $T_2$ . Om de (locale) warmteflux door de cilindrische wand te bepalen dient volgens de wet van Fourier het temperatuurprofiel in de wand bekend te zijn.

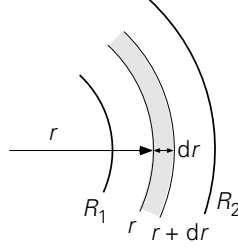


Figuur 3.5

Beschouw hiertoe een ringetje (met lengte  $L$ ) in de cilindrische wand met coaxiale stralen  $r$  en  $r+dr$  (zie figuur 3.6). Een warmtebalans voor dit ringetje onder stationaire condities zonder warmteproductie luidt

$$0 = \phi_{q,\text{in}} - \phi_{q,\text{uit}} \quad (3.23)$$





Figuur 3.6.

Nog steeds geldt:  $\phi_{q,\text{in}} = \phi_{q,\text{uit}} = \text{constant}$ . Maar dit betekent niet dat de flux ook constant is: de geometrie is nu immers gekromd. De flux in radiale richting wordt nu gegeven door

$$\phi_q'' = -\lambda \frac{dT}{dr} \quad (3.24)$$

Bovendien geldt voor het verband tussen stroom en flux in dit geval:

$$\phi_q = A \cdot \phi_q'' = 2\pi r L \cdot \phi_q'' \quad (3.25)$$

Combineren van de vergelijkingen (3.23), (3.24) en (3.25) levert de volgende differentiaalvergelijking:

$$-\lambda 2\pi r L \frac{dT}{dr} = C_1 \quad (3.26)$$

De algemene oplossing van vergelijking (3.26) is

$$T(r) = -\frac{C_1}{2\pi\lambda L} \ln r + C_2 \quad (3.27)$$

De constanten  $C_1$  en  $C_2$  zijn te bepalen met behulp van de randvoorwaarden:  $r = R_1 \rightarrow T = T_1$  en  $r = R_2 \rightarrow T = T_2$ . Dit geeft als oplossing voor het temperatuurprofiel in de cilindrische wand:

$$\frac{T - T_2}{T_1 - T_2} = \frac{\ln(r / R_2)}{\ln(R_1 / R_2)} \quad (3.28)$$

Nu het temperatuurprofiel bekend is, kan ook de flux uitgerekend worden. Differentiëren van vergelijking (3.28) en het resultaat invullen in (3.24) – of gebruik maken van vergelijking (3.26) – levert:

$$\phi_q'' = -\lambda \frac{dT}{dr} = -(T_1 - T_2) \frac{\lambda}{\ln(R_1 / R_2)} \frac{1}{r} \quad (3.29)$$

Inderdaad is nu de flux  $\phi_q''$  afhankelijk van de plaats in de cilinderwand: met toenemende  $r$  neemt  $\phi_q''$  af. vergelijking (3.29) levert verder het verband tussen  $\Delta T (= T_1 - T_2)$  en  $\phi_q$ :

$$\Delta T = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda L} \phi_q \quad (3.30)$$

De ‘stroom’ is ook hier weer evenredig met de ‘drijvende kracht’, maar in dit geval is het verband tussen geometrie en ‘weerstand’ ingewikkelder. Wanneer evenwel  $R_2$  niet veel verschilt van  $R_1$ , bijvoorbeeld als de pijpwanddikte  $\delta = R_2 - R_1$  behoorlijk klein is ten opzichte van  $R_1$ , dan kan vergelijking (3.30) met behulp van een reeksontwikkeling – voor  $\varepsilon \ll 1$  geldt  $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon$  – herschreven worden tot

$$\Delta T = \frac{\delta}{\lambda} \frac{\phi_q}{2\pi R_1 L} \quad (3.31)$$

waarin  $\delta/\lambda$  herkend wordt als de weerstand tegen warmtetransport door een vlakke laag, zoals in vergelijking (3.17).

Overigens kan wederom hetzelfde resultaat verkregen worden door de stationaire warmtebalans (3.23) verder uit te werken. Daartoe dienen de stromen ‘in’ en ‘uit’ uitgedrukt te worden in termen van de temperatuurgradiënten ter plekke:

$$0 = -[A]_r \cdot \lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_r - \left( -[A]_{r+dr} \cdot \lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r+dr} \right) \quad (3.32)$$

In deze vergelijking is  $[A]_r$  het oppervlak van het ringetje met straal  $r$  en  $[A]_{r+dr}$  het oppervlak van het ringetje met straal  $\{r+dr\}$ . Nu is het oppervlak van een ringetje met straal  $r$  gelijk aan:

$$[A]_r = 2\pi r \cdot L \quad (3.33)$$

Vergelijking (3.32) is m.b.v. vergelijking (3.33) te vereenvoudigen door te delen door  $2\pi\lambda L$  en de termen  $r$  en  $r+dr$  onder te brengen bij de lokale temperatuurgradiënt:

$$[A]_{r+dr} \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r+dr} = \left\{ A \frac{dT}{dr} \right\} \Big|_{r+dr} = \left\{ 2\pi r L \frac{dT}{dr} \right\} \Big|_{r+dr} \quad (3.34)$$

zodat

$$0 = - \left\{ r \frac{dT}{dr} \right\} \Big|_r - \left\{ -r \frac{dT}{dr} \right\} \Big|_{r+dr} \quad (3.35)$$

Hierin dient  $r \cdot (dT/dr)$  dus opgevat te worden als één functie  $f$ . Er staat dan in vergelijking (3.35) het verschil tussen  $f(r+dr)$  en  $f(r)$ , en dit is uiteraard  $(df/dr) \cdot dr$ . Weer terug invullen van  $r \cdot (dT/dr)$  voor  $f$  levert

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (3.36)$$

Het oplossen van vergelijking (3.36), met de randvoorwaarden  $r = R_1 \rightarrow T = T_1$  en  $r = R_2 \rightarrow T = T_2$ , levert weer vergelijking (3.28) op.

### 3.1.4 Warmtegeleiding in bolcoördinaten

Een tweede voorbeeld van een gekromde geometrie waarin de warmtestroom wel plaatsonafhankelijk is, maar de warmteflux niet, is de bolgeometrie. Beschouw een bol (met straal  $R$ ) die op temperatuur  $T_1$  gehouden wordt. De bol is omgeven door een stilstaand medium. Ver weg van de bol heeft het medium temperatuur  $T_\infty$ . Wat is in dit geval in de stationaire situatie het verband tussen drijvende kracht en stroom?

Om deze vraag te beantwoorden moet uiteraard weer een warmtebalans opgesteld worden, ditmaal over een concentrische bolschil met stralen  $r (> R)$  en  $r+dr$ . Deze warmtebalans luidt:

$$0 = \phi_{q,\text{in}} - \phi_{q,\text{uit}} \quad (3.37)$$

Ook in dit geval is het oppervlak  $A$  waardoor de warmte wordt overgedragen, een functie van  $r$ :  $A = A(r)$ . Het verband tussen het lokale warmtetransport en de lokale temperatuurgradiënt is dan dus weer te schrijven als:

$$\phi_q = A(r) \cdot \left( -\lambda \frac{dT}{dr} \right) \quad (3.38)$$

Dit gebruiken in de warmtebalans (3.37) levert :

$$0 = -[A]_r \cdot \lambda \frac{dT}{dr} \Big|_r - \left( -[A]_{r+dr} \cdot \lambda \frac{dT}{dr} \Big|_{r+dr} \right) \quad (3.39)$$

Vergelijking (3.39) is, op analoge manier als hierboven beschreven, te schrijven als de volgende differentiaalvergelijking:

$$0 = \lambda \frac{d}{dr} \left( A(r) \frac{dT}{dr} \right) \quad (3.40)$$

Voor  $A(r)$  geldt nu:

$$A(r) = 4\pi r^2 \quad (3.41)$$

Daarmee wordt vergelijking (3.40)

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (3.42)$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking (3.42) is

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad (3.43)$$

Invullen van de randvoorwaarden  $r = R \rightarrow T = T_1$  en  $r \rightarrow \infty \rightarrow T = T_\infty$  levert op:

$$T(r) = (T_1 - T_\infty) \frac{R}{r} + T_\infty \quad (3.44)$$

Dit profiel gebruiken voor het uitwerken van de temperatuurgradiënt in vergelijking (3.38) levert voor het verband tussen de drijvende kracht  $\Delta T (= T_1 - T_\infty)$  en de warmtestroom  $\phi_q$  resp. de warmteflux  $\phi_q''$  aan het oppervlak van de bol (met diameter  $D = 2R$ ):

$$\Delta T = \frac{1}{4\pi\lambda R} \phi_q = \frac{D}{2\lambda} \phi_q'' \quad (3.45)$$

### Voorbeeld 3.2. Radioactief bolletje I

In een bol, met een diameter van 10 cm en bestaand uit uraniumoxide, vindt warmteproductie  $q$  (in  $\text{W/m}^3$ ) als gevolg van radioactief verval plaats en wel uniform verdeeld over het volume. Het boloppervlak wordt constant op een lage temperatuur  $T_w$  gehouden.

Bereken de temperatuur in het hart van de bol voor  $q = 6 \text{ MW/m}^3$ ,  $T_w = 20^\circ\text{C}$  en  $\lambda = 8 \text{ W/mK}$ .

De warmteproductie binnen het deeltje, met het boloppervlak constant op een lage temperatuur gehouden, resulteert in een radiaal temperatuurprofiel met de maximale temperatuur in het hart van de bol. Zo'n temperatuurprofiel kan niet gevonden worden met behulp van een macrobalans over de gehele bol maar vergt dat binnen de bol gekeken wordt: binnenin dient een bolvormige schil met dikte  $dr$  gekozen te worden als een microcontrolevolume voor een stationaire warmtebalans:

$$0 = -4\pi r^2 \lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_r - \left( -4\pi r^2 \lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r+dr} \right) + q 4\pi r^2 dr \quad (3.46)$$

waarin – vergeleken met vergelijking (3.39) – direct  $4\pi r^2$  ingevuld is voor  $A(r)$  en de subscript  $r$  en  $r + dr$  betrekking hebben op zowel oppervlak  $4\pi r^2$  als gradient

$dT/dr$ . De volgende stap is alle termen van vergelijking (3.46) te delen door  $4\pi\lambda dr$ ; dit resulteert in

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = -\frac{q}{\lambda} r^2 \quad (3.47)$$

waarbij het uitermate belangrijk is  $r^2$  tussen de haken achter  $d/dr$  in het linkerlid te houden aangezien het schiloppervlak toeneemt bij het gaan van positie  $r$  naar positie  $r + dr$ . Een keer vergelijking (3.47) integreren levert

$$r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{q}{3\lambda} r^3 + C_1 \quad (3.48)$$

Aangezien de temperatuur maximaal is, en dus  $dT/dr = 0$ , op  $r = 0$ , moet de integratieconstant wel  $C_1$  nul zijn. Daarmee volgt

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q}{3\lambda} r \quad (3.49)$$

Nog een keer integreren plus de tweede randvoorwaarde  $T = T_w$  op  $r = R$  geeft uiteindelijk

$$T = T_w + \frac{q}{6\lambda} (R^2 - r^2) \quad (3.50)$$

Substitutie van de opgegeven waarden voor  $q$ ,  $T_w$  en  $\lambda$  resulteert in het antwoord  $T_0 = 1270^\circ\text{C}$  op  $r = 0$ .

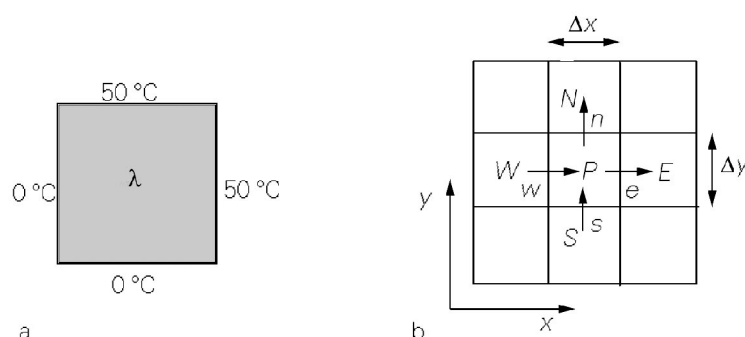
◻

### 3.1.5 Een numerieke behandeling voor 2-D cartesisch

De voorbeelden, die we tot nu toe behandeld hebben, zijn alle geheel analytisch opgelost. Dat is mogelijk omdat de geometrieën simpel waren. In veel praktische gevallen is het vinden van een analytische oplossing moeilijk, zo niet onmogelijk. Gelukkig kunnen met behulp van numerieke technieken veel problemen uitstekend aangepakt worden. Voor sommige stationaire problemen is dat zelfs met verrassend eenvoudige middelen te doen. Het numeriek oplossen van problemen is in de moderne fysische transportverschijnselen niet meer weg te denken. Beschouw, als illustratie (figuur 3.6a), een twee-dimensionaal probleem: wat is de stationaire temperatuurverdeling in een vierkant waarvan twee zijden op constante temperatuur  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  en de andere twee zijden op  $T_1 = 50^\circ\text{C}$  gehouden worden?

Het probleem is prima te beschrijven in een cartesisch stelsel. Als eerste wordt het vierkant opgedeeld in  $N \cdot M$  kleine rechthoekjes (elk met zijden  $\Delta x$  en  $\Delta y$ ). Een zo'n rechthoekje is, samen met zijn burens, geschetst in figuur 3.6b. Het centrum van het

rechthoekje wordt aangegeven met P. De vier buren worden aangeduid met de vier windstreken: North, East, South, West, afgekort tot N, E, S, W. In de figuur zijn tevens de warmtestromen 'in' en 'uit' voor het rechthoekje P getekend.



Figuur 3.7.

Een stationaire warmtebalans voor het rechthoekje met centrum P luidt dus:

$$0 = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w \Delta y - \left( -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_e \right) \Delta y + \left( -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_s \right) \Delta x - \left( -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_n \right) \Delta x \quad (3.51)$$

waar het partiële-afgeleide symbool  $\partial$  is gebruikt. Hierbij slaan de indices  $w$ ,  $e$ ,  $s$ ,  $n$  op de grensvlakken van het rechthoekje rond P (zie figuur 3.7). Tevens is gebruikt dat er in het rechthoekje rond P geen warmteproductie plaatsvindt. Formeel geldt de balans enkel voor een infinitesimaal klein rechthoekje. Voor reële afmetingen is dit een benadering. Elk van de vier gradiënten in bovenstaande vergelijking kan benaderd worden, bijvoorbeeld voor de warmtestroom door de linkerzijkant van het rechthoekje rond P:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w \approx \frac{T_P - T_W}{\Delta x} \quad (3.52)$$

Als dit voor alle termen uit vergelijking (3.51) gedaan wordt, tevens  $\Delta x = \Delta y$  gekozen wordt en verder  $\lambda$  constant genomen wordt, dan is de warmtebalans (3.51) te schrijven als:

$$0 = T_W + T_E + T_S + T_N - 4T_P \quad (3.53)$$

Met andere woorden, de temperatuur van P is het gemiddelde van zijn vier buren. Dit is heel simpel te verwerken in een computercode. Begin eerst met een gegokt veld. In dit geval bijvoorbeeld: het hele vierkant heeft een uniforme temperatuur  $T_0$ . Neem nu voor elk vierkantje het gemiddelde van zijn buren en beschouw deze temperatuur als

een verbeterde versie van de begingok. Uiteraard wijzigt de originele gok doordat aan twee van de randen de temperatuur  $T_1$  geldt. Na deze eerste iteratie kan het nieuwe temperatuurveld met het oude vergeleken worden. Als het verschil tussen beide velden nog te groot is, herhalen we dit proces, net zolang totdat de oplossing geconvergeerd is en we een numeriek verkregen benadering van het temperatuurveld hebben.

In principe kan zo willekeurig dicht bij de werkelijke oplossing gekomen worden: door het rekendomein (het vierkant) op te delen in een zeer groot aantal elementjes en door het convergentie criterium zeer scherp te stellen. Hieronder volgt een simpel algoritme dat met behulp van bijvoorbeeld Matlab gebruikt kan worden voor het hierboven beschreven probleem.

---

```

% steady state doorverwarming, algoritme voor Matlab
% vierkant met constante randtemperatuur:
% onder- en linkerrand: 0°C
% boven- en rechterrand: 50°C

clear all;

N=20; %aantal inwendige cellen = N*N

Told=zeros(N+2,N+2); %initialiseer eerste gok
                    %maak het temperatuurveld N+2 bij N+2 zodat we de
                    %randvoorwaarden via zogenaamde virtuele punten kunnen
                    %opnemen. Dit zijn punten die buiten het vierkant liggen.
for i=1:N+1        %definieer de virtuele punten behorend bij randvoorwaarde T=50°C
    Told(i+1,N+2)=50; %bovenrand op 50°C
    Told(N+2,i+1)=50; %rechterrand op 50°C
end
Tnew=Told;        %initialiseer nieuwe veld

eps=1;           %initialiseer convergentieparameter
epsconv=1e-3;    %kies het convergentie criterium

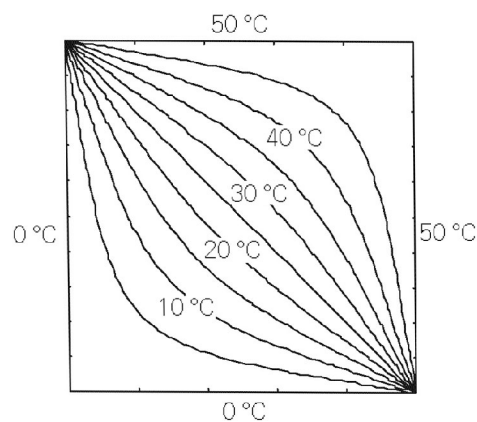
while eps>epsconv %start itereren tot convergentie
    for i=2:N+1    %bereken nieuwe temperatuurveld: i nummert x-richting
        for j=2:N+1
            Tnew(i,j)=1/4*(Told(i-1,j)+Told(i+1,j)+Told(i,j-1)+Told(i,j+1));
        end
    end
    eps=0;        %bereken opnieuw convergentie
    for i=2:N+1
        for j=2:N+1
            eps=eps+abs(Tnew(i,j)-Told(i,j));
        end
    end
    Told=Tnew;    %vervang oude veld door het nieuwe
end

x=linspace(0,1,N+2); %maak coördinaten
y=x;

```

contourf(x,y,Tnew,19); %geef oplossing grafisch weer

Voor bovenstaand voorbeeld zijn geavanceerdere oplosmethoden voorhanden. Tevens is het gebruikte convergentiecriterium maar een van de vele mogelijkheden. De numerieke wiskunde levert de benodigde gereedschappen om dergelijke simulaties op een verantwoorde manier te doen. Kennis hiervan is uiteraard onontbeerlijk voor numerieke simulaties van transportverschijnselen.



Figuur 3.8. Temperatuurcontouren van het geleidende vierkant in stationaire toestand, met twee randen op 0 °C en twee op 50 °C. Aantal cellen: 50·50.

Het voorbeeld illustreert dat met de balansmethode tamelijk eenvoudig de benodigde vergelijkingen gegenereerd kunnen worden. Het grote voordeel van het gebruik van de balansmethode is dat op elk (lokaal) niveau bij het numeriek oplossen steeds voldaan wordt aan de balansen. Zo wordt gemakkelijk recht gedaan aan de basis van de transportverschijnselen. Er zijn inmiddels vele boeken geschreven, die numerieke technieken in de fysische transportverschijnselen behandelen. Een van de standaardwerken is Patankar's boek<sup>10</sup> dat al uit 1980 stamt; zie ook Hanjalić *et al.*<sup>11</sup>.

Het voorbeeld van het vierkant kan ook met behulp van Fourier-analyse betrekkelijk eenvoudig analytisch opgelost worden. Dat komt eigenlijk omdat er nog vrij veel symmetrie in het probleem aanwezig is. Het lijkt al een beetje lastiger als er ook productie in het vierkant plaatsvindt, maar numeriek valt dat wel mee. De balansvergelijking zal nu als gevolg van deze productie immers een extra term bevatten. Beschouw weer het rechthoekje om P. De productie per oppervlakte-eenheid is  $q''$ . De warmtebalans hiervoor luidt nu:

<sup>10</sup> Patankar S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publ. Corp., 1980

<sup>11</sup> Hanjalić K., S. Kenjereš, M.J. Tummers en H.J.J. Jonker, *Analysis and Modelling of Physical Transport Phenomena*, VSSD, Delft 2007.



$$0 = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w \Delta y - \left( -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_e \right) \Delta y + \left( -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_s \right) \Delta x - \left( -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_n \right) \Delta x + \iint_{\Delta x, \Delta y} q'' dx dy \quad (3.54)$$

Voor kleine  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  kan  $q''$  constant worden verondersteld over het controlevolume. De benaderende algebraïsche vergelijking luidt nu (met  $\Delta x = \Delta y$ ):

$$0 = \lambda (T_W + T_E + T_S + T_N - 4T_P) + q''_P \cdot \Delta x \Delta y \quad (3.55)$$

Ook hier is met een vergelijkbare iteratieve procedure de stationaire oplossing te vinden.

Als voorbeeld nemen we dat er een warmtebron en een warmteput in het vierkant aanwezig zijn. Beide bronnen hebben de vorm van een 'deltapijk' met sterkte  $q$ , respectievelijk  $-q$ . De bron bevindt zich op het punt  $\{1/4+1/80, 3/4-1/80\}$  en de put op  $\{3/4-1/80, 1/4+1/80\}$  (neem de lengte van de zijkanten van het vierkant gelijk aan 1).

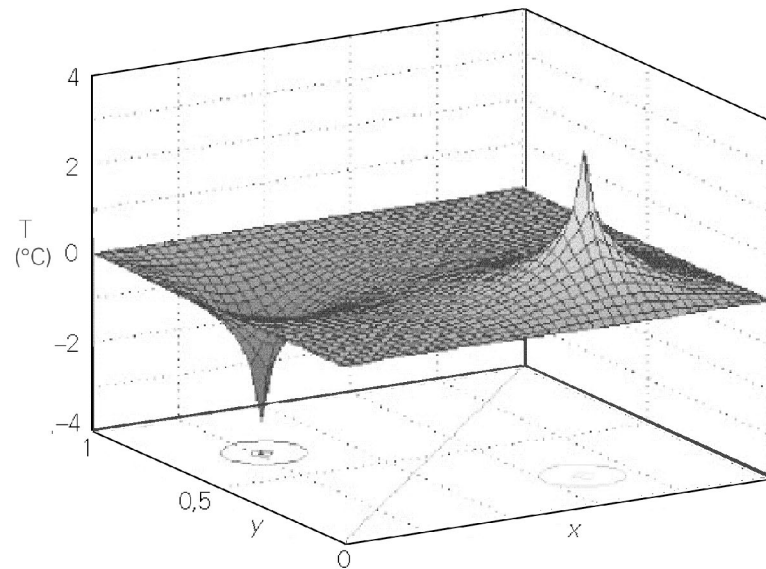
Wederom wordt het vierkant in kleine vierkantjes verdeeld. Twee van deze vierkantjes bevatten dus een extra bronterm. Alle andere hebben dat niet. Door de deltapiek is de productieterm in vergelijking (3.49) altijd nul, behalve voor die twee vierkantjes die de bron, respectievelijk put bevatten. Hiervoor is de productieterm  $+q$  respectievelijk  $-q$ , ongeacht de grootte van de vierkantjes. Voor de eenvoud zijn nu de randvoorwaarden:  $T = 0$  °C voor alle randen.

Vergelijking (3.55) is op te lossen via hetzelfde iteratieschema als gebruikt voor vergelijking (3.53). Wel is het nu handig om voor elke cel een bronterm mee te nemen: die is overal nul behalve in de twee cellen die de echte bron/put bevatten. In termen van het algoritme wordt de centrale regel:

$$T_{\text{new}}(i,j) = 1/4 * \{T_{\text{old}}(i-1,j) + T_{\text{old}}(i+1,j) + T_{\text{old}}(i,j-1) + T_{\text{old}}(i,j+1)\} + 1/4/\lambda * q(i,j)$$

In figuur 3.9 is de numerieke oplossing van dit probleem gegeven voor  $40 \times 40$  elementjes.

De hier besproken voorbeelden gebruiken de simpele geometrie van een vierkant. Het is echter geen probleem om bijvoorbeeld de vorm van een koelvin te gebruiken. Numerieke technieken zijn vaak de enige methode als de geometrie complex is.



Figuur 3.9.

### Samenvatting

In het geval van stationaire geleiding van warmte is het verband tussen de drijvende kracht  $\Delta T$  en de warmtestroom analoog aan de wet van Ohm te schrijven. Het drijvende temperatuurverschil veroorzaakt een warmtestroom die recht evenredig is met dit temperatuurverschil. De evenredigheidsconstante is op te vatten als een weerstand tegen het transport van warmte.

Zowel vlakke als niet-vlakke geometrieën zijn beschouwd: steeds geldt eenzelfde verband tussen drijvende kracht en stroom. Bij gekromde geometrieën is de warmteflux wel plaatsafhankelijk! Dit volgt rechtstreeks uit warmtebalansen voor dunne ringetjes of schilletjes.

Verder is een eerste begin gemaakt met de behandeling van numerieke methoden voor de oplossing van warmtegeleidingsvraagstukken in meer-dimensionale en complexe geometrieën. Discretisatie van de differentiaalvergelijking leidt tot een algebraïsche vergelijking die de waarden van de gezochte variabele in nabij gelegen punten aan elkaar koppelt. Een iteratieve oplosstrategie is vereist om tot de oplossing te geraken.

## 3.2 Warmteoverdrachtscoëfficiënt en Nusselt getal

### 3.2.1 Newton's afkoelingswet

Het concept van een drijvende kracht die een stroom tot gevolg heeft, evenredig met de drijvende kracht, is ook in complexe situaties (instationair en stationair) van grote waarde gebleken. Voor ingenieurs speelt dit beeld in de complexe situaties van de praktijk dan ook een belangrijke rol. Warmtestroom en drijvende kracht worden in het

algemeen aan elkaar gekoppeld door de *afkoelingswet van Newton* (die overigens ook opwarming beschrijft). Deze wet luidt:

$$\phi_q = h A \Delta T \quad (3.56)$$

Stroom en drijvende kracht worden dus juist andersom gekoppeld dan in de wet van Ohm. In plaats van met een weerstand wordt hier gewerkt met een maat voor het warmtetransport, of voor de warmteoverdracht. In vergelijking (3.56) is  $A$  het oppervlak waardoor de warmtestroom gaat, en heet de coëfficiënt  $h$  de *warmteoverdrachtscoëfficiënt* (eenheid:  $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ ). Het is dus juist  $1/h$  die als een warmte-weerstand geïnterpreteerd kan worden. Het oppervlak  $A$  is expliciet in vergelijking (3.56) opgenomen, omdat het voor de hand ligt dat de warmtestroom (min of meer) evenredig toeneemt met het oppervlak waarover de drijvende kracht staat.

De resultaten van § 3.1 kunnen nu samengevat worden in termen van een  $h$ -waarde voor elke situatie (*ga dit na!*):

warmteoverdrachts-coëfficiënt	vlakke plaat	voor cilindrische wand (betrokken op buitenoppervlak)	bol
$h$	$\frac{\lambda}{D}$	$\frac{2\lambda}{D_2 \ln(D_2/D_1)}$	$\frac{2\lambda}{D}$

### 3.2.2 *Het Nusselt getal*

Zoals al eerder besproken is het vaak nuttig om dergelijke relaties in dimensieloze vorm te hanteren. Ook in het geval van warmtegeleiding is er een dimensieloze vorm van  $h$  gedefinieerd. Dit getal staat bekend onder de naam: *Nusselt-getal*, afgekort als Nu. Het Nusselt-getal is gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= \frac{\text{warmteweerstand indien 1-D stationaire geleiding}}{\text{werkelijke weerstand (bij heersende condities)}} = \\ &= \frac{D/\lambda}{1/h} = \frac{hD}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Hiermee kan bijvoorbeeld de situatie van stationaire warmtegeleiding door een vlakke vaste plaat met dikte  $D$  snel en handzaam geduid worden als  $\text{Nu} = 1$ . Of die vanaf een boloppervlak naar het ‘oneindige’, zie vergelijking (3.45), met  $\text{Nu} = 2$ . Dankzij de definities van de warmteoverdrachtscoëfficiënt, in (3.56), en van het Nusselt-getal, in vergelijking (3.57), begrijpt men bijvoorbeeld uit  $\text{Nu} = 2$  direct dat het gaat om warmtegeleiding vanaf een boloppervlak onder stationaire condities (en bijvoorbeeld niet om tijdsafhankelijke condities of om convectief warmtetransport).

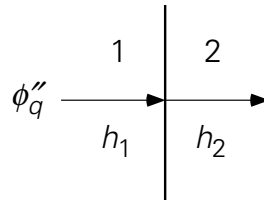
### 3.2.3 Overall warmteoverdrachtscoëfficiënt

In veel gevallen van warmtestroming is er sprake van twee warmteweerstanden in serie. Zo is de geleiding van warmte door twee vlakke platen al aan de orde geweest in § 3.1.2. De uitkomst van de analyse was

$$\phi_q'' = \left( \frac{D_1}{\lambda_1} + \frac{D_2}{\lambda_2} \right)^{-1} \Delta T = \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right)^{-1} \Delta T \quad (3.58)$$

De uitdrukkingen tussen haken kunnen ook vervangen worden door één ‘warmteuitwisselingscoëfficiënt’. Deze bevat dus beide warmteoverdrachtscoëfficiënten  $h_1$  en  $h_2$ . Deze coëfficiënt heet daarom ook wel de *overall warmteoverdrachtscoëfficiënt* en wordt aangeduid met  $U$ . Uit vergelijking (3.58) volgt dus

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \quad (3.59)$$



Figuur 3.10.

Vergelijking (3.59) blijkt algemeen geldig te zijn en is eenvoudig af te leiden. Bekijk daartoe de warmtestroom in figuur 3.10, die vanuit medium 1 medium 2 ingaat. Noem de temperatuur van het grensvlak  $T_i$ . Dan geldt voor de warmteflux vanuit medium 1 naar het grensvlak

$$\phi_q'' = h_1 (T_1 - T_i) \quad (3.60)$$

Deze flux loopt ook vanaf het grensvlak medium 2 in, omdat een grensvlak geen warmte kan absorberen of produceren. In medium 2 is de uitdrukking voor de flux:

$$\phi_q'' = h_2 (T_i - T_2) \quad (3.61)$$

Elimineren van de temperatuur van het grensvlak levert de gezochte relatie:

$$\phi_q'' = \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right)^{-1} \Delta T \quad (3.62)$$

Dit resultaat kan weer analoog aan de wet van Ohm geïnterpreteerd worden: de totale weerstand ( $1/U$ ) is de som van de twee deelweerstand  $1/h_1$  en  $1/h_2$ .

Het is vaste praktijk bij ingenieurs om de kleinste van de twee weerstanden voor warmteoverdracht te verwaarlozen indien de verhouding van de twee weerstanden groter is dan een bepaalde waarde. Welke kritische waarde daarbij wordt aangehouden, bepaalt natuurlijk hoe nauwkeurig de afschatting bij verwaarlozing van de kleinste weerstand is. Een typisch voorbeeld van zo'n situatie is warmteoverdracht vanuit een vast voorwerp naar zijn omgeving (of andersom). De verhouding van de inwendige weerstand van het voorwerp – in het geval van een vlakke plaat dus  $D/\lambda_i$  – tot de uitwendige weerstand  $1/h_e$  wordt wel weergegeven door het dimensieloze *Biot-getal*, aangeduid als *Bi*:

$$\text{Bi} = \frac{D/\lambda_i}{1/h_e} = \frac{h_e D}{\lambda_i} \quad (3.63)$$

Het Biot-getal mag absoluut niet verward worden met het Nusselt-getal: *Bi* vergelijkt inwendige en uitwendige weerstand van een voorwerp, terwijl *Nu* de weerstand (uitwendig dan wel inwendig) vergelijkt met de weerstand in geval van 1-D stationair warmtetransport door een vlakke laag ( $\text{Nu}=1$ ).

### **Voorbeeld 3.3.** *Radioactief bolletje II*

In een bol, met een diameter van 10 cm en bestaand uit uraniumoxide, vindt warmteproductie  $q$  (in  $\text{W/m}^3$ ) plaats als gevolg van radioactief verval en wel uniform verdeeld over het volume. Nu bevindt de bol zich in een omgeving die op grote afstand van de bol (in de 'bulk') een constante, lagere temperatuur  $T_\infty$  heeft. De externe warmteoverdrachtscoëfficiënt is  $h_e$ .

Leid een uitdrukking af voor de temperatuur in het hart van de bol die  $T_\infty$  bevat.

Binnen de bol verandert er niets ten opzichte van voorbeeld 3.2. Daardoor geldt binnen de bol – zie vergelijking (3.49) – nog steeds

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{q}{3\lambda_i} r \quad (3.64)$$

Anders dan in voorbeeld 3.2 wordt de temperatuur op  $r = R$  nu bepaald door de warmteafgifte naar de omgeving. In een stationaire situatie geldt altijd dat de warmteflux vanuit de bol naar het oppervlak gelijk is aan de warmteflux vanaf het oppervlak het omringende medium in:

$$-\lambda_i \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = \left. \frac{qr}{3} \right|_{r=R} = \frac{qR}{3} = h_e (T_{r=R} - T_\infty) \quad (3.65)$$

Hieruit volgt

$$T_{r=R} = T_{\infty} + \frac{qR}{3h_e} \quad (3.66)$$

[Hier kan opgemerkt worden dat dit laatste resultaat ook gevonden kan worden met behulp van een overall warmtebalans voor de bol die luidt dat onder stationaire condities de warmteproductie binnen de bol gelijk is aan de warmte-afgifte naar het omringende medium.]

Vergelijking (3.64) integreren met rand-voorwaarde (3.66) op  $r = R$  levert voor de temperatuur in het hart van de bol

$$T_0 = T_{\infty} + \frac{qR}{3h_e} + \frac{qR^2}{6\lambda_i} = T_{\infty} + \frac{qR}{3} \left( \frac{1}{h_e} + \frac{R}{2\lambda_i} \right) \quad (3.67)$$

De laatste vergelijking illustreert dat  $T_0$  van zowel het inwendige als het uitwendige warmtetransport afhangt. Is de inwendige weerstand verwaarloosbaar ten opzichte van de uitwendige, dan valt vergelijking (3.67) samen met vergelijking (3.66):

$$T_0 \approx T_{r=R} = T_{\infty} + \frac{qR}{3h_e} \quad (3.68)$$

terwijl bij verwaarloosbare uitwendige weerstand voor  $T_0$  een uitdrukking wordt verkregen conform vergelijking (3.50). Als er in het externe medium geen stroming optreedt en dus het warmtetransport alleen door geleiding plaats vindt, dan geldt – zo leert de tabel in § 3.2.1 – dat  $h_e = 2\lambda_e/D$  in de vergelijkingen (3.65) – (3.68). Het is daarom van cruciaal belang duidelijk onderscheid te maken tussen interne en externe weerstand, en tussen interne en externe stofgrootheden.

⑤

### Samenvatting

Analoog aan de wet van Ohm wordt het verband tussen het temperatuurverschil en de resulterende warmtestroom gegeven door de zogenaamde ‘afkoelings’wet van Newton: de stroom  $\phi_q$  (in W) is gekoppeld aan de drijvende kracht  $\Delta T$  via de warmteoverdrachtscoëfficiënt  $h$ :

$$\phi_q = h A \Delta T$$

De warmteoverdrachtscoëfficiënt (= reciproke weerstand) heeft voor verschillende situaties verschillende waarden. De dimensieloze vorm van  $h$  is het Nusselt-getal  $Nu$ . Voor warmteoverdracht door geleiding rond een bol geldt  $Nu = 2$ .

Meer complexe situaties (bijvoorbeeld als een voorwerp warmte uitwisselt met zijn omgeving) worden handig beschreven met een overall warmteoverdrachtscoëfficiënt

$U$  die samengesteld wordt uit de afzonderlijke warmteoverdrachtscoëfficiënten volgens  $1/U = 1/h_1 + 1/h_2$ . Deze relatie drukt uit dat de totale weerstand tegen warmteoverdracht de som is van twee deelweerstand in serie, conform de wet van Ohm. Als een van deze twee deelweerstand veel kleiner is dan de andere, wordt de kleinste van de twee veelal verwaarloosd.

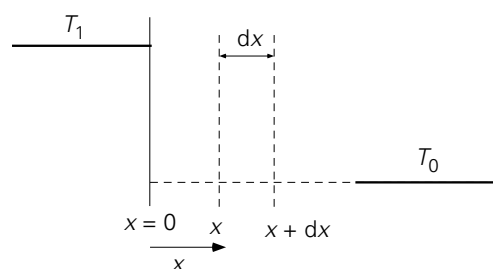
### 3.3 Instationaire warmtegeleiding

#### 3.3.1 Penetratietheorie: conceptueel

In bovenstaande paragrafen is gekeken naar warmtegeleiding in stationaire situaties. Nu komt het moeilijkere geval van instationaire (d.i. tijdsafhankelijke) warmtegeleiding aan de orde: de temperatuur in het materiaal of in het stilstaande fluïdum op een bepaalde plaats is nu dus een functie van de tijd, terwijl in het algemeen de temperatuur ook van plaats tot plaats zal verschillen. Eerst zal uitgebreid de meest eenvoudige geometrie besproken worden: de ‘half-oneindige plaat’.

Beschouw daartoe een zeer groot stuk materiaal dat de halve ruimte vult, namelijk het gedeelte met  $x \geq 0$ . Het hele blok is aanvankelijk op temperatuur  $T_0$ . Op tijdstip  $t = 0$  wordt plotseling het linkervlak ( $x = 0$ ) op temperatuur  $T_1$  gebracht en dit blijft zo. In veel praktische situaties is het dan van belang te weten: hoe dringt (= penetreert) de warmte het materiaal in? Of anders geformuleerd: wat is op willekeurig tijdstip het temperatuurprofiel in het materiaal?

Na alle voorgaande voorbeelden moge het voor de hand liggen dat voor de beantwoording van deze vragen wederom een instationaire warmtebalans over een willekeurig volume in het materiaal opgesteld dient te worden. Aangezien het materiaal in de  $y$ - en  $z$ -richting oneindig uitgestrekt is en aan het gehele linkervlak één uniforme temperatuur wordt opgelegd, is in dit geval weer sprake van een één-dimensionaal probleem; er zullen dus enkel veranderingen op kunnen treden in de  $x$ -richting. Een warmtebalans (= thermische energiebalans) over een plakje tussen  $x$  en  $x + dx$  (zie figuur 3.11) is daarom toereikend.



Figuur 3.11.

Het volume van deze plak is  $V = L \cdot W \cdot dx$  ( $L$  is de afmeting in de  $y$ -richting,  $W$  in de  $z$ -richting). De instationaire thermische energiebalans luidt nu:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial(\rho V c_p T)}{\partial t} = LW dx \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \phi_{q,\text{in}} - \phi_{q,\text{uit}} \quad (3.69)$$

waarin de grootte van het controlevolume ( $= dx dy dz$ ) constant, het fluïdum Newtons, en de soortelijke warmte  $c_p$  constant zijn verondersteld, en waarbij de aanname van òf constante druk òf constante dichtheid is gebruikt (see Bird *et al.*<sup>12</sup>).

Het verband tussen de warmtestroom en de temperatuurgradiënt wordt ook in de instationaire situatie gegeven door de wet van Fourier, dus:

$$\phi_{q,\text{in}} = -LW \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x \quad (3.70)$$

Voor de uitgaande stroom geldt uiteraard een zelfde vergelijking. De thermische energiebalans is derhalve te schrijven als

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x}{dx} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.71)$$

Zoals al gezien in hoofdstuk 2 wordt de factor  $\lambda/(\rho c_p)$  meestal afgekort tot het symbool  $a$ , de *warmtevereffeningscoëfficiënt*. vergelijking (3.71) wordt daarmee:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.72)$$

Differentiaalvergelijking (3.72) moet nog voorzien worden van geschikte rand- en beginvoorwaarden om het probleem helemaal te beschrijven. Deze randvoorwaarden luiden:

$$\begin{aligned} T(x=0) &= T_1 && \text{voor } t \geq 0 \\ T(t=0) &= T_0 && \text{voor } x \geq 0 \\ T(x \rightarrow \infty) &= T_0 && \text{voor } x \rightarrow \infty \text{ voor elke } t \end{aligned} \quad (3.73)$$

De eerste randvoorwaarde houdt in dat er precies zo veel warmte kan worden aangevoerd vanuit het domein  $x < 0$  dat op  $x = 0$  de temperatuur op  $T_1$  gehouden kan worden; met andere woorden: de weerstand tegen het warmtetransport ligt geheel in het domein  $x > 0$  waar de moleculen het warmtetransport voor hun rekening nemen.

<sup>12</sup> Bird R.B., W.E. Stewart en E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Wiley, 2<sup>nd</sup> Ed., 2002, p. 337



De laatste randvoorwaarde houdt in dat de temperatuur ‘ver weg’ (nog) niet beïnvloed wordt door de veranderde temperatuur aan het linkerzijvlak. Verderop komt dit nog uitgebreider aan de orde.

### 3.3.2 **Temperatuurprofiel en penetratiediepte**

Met behulp van dimensie-analyse kan snel inzicht verkregen worden in de vraag welke combinaties van variabelen het probleem van differentiaalvergelijking (3.72) nu uiteindelijk bepalen. Daartoe kan de temperatuurverandering ten opzichte van de begintemperatuur  $T_0$  onder de loep genomen worden (let wel: zoals bij veel warmte-transport gaat het om een temperatuurverschil!). Dankzij het opstellen van de warmtebalans hierboven is al bekend wat de relevante parameters zijn:  $T - T_0$  is afhankelijk van  $T_1 - T_0$ ,  $a$ ,  $t$  en  $x$ ; dus

$$T - T_0 = k (T_1 - T_0)^\alpha a^\beta t^\gamma x^\delta \quad (3.74)$$

Oplossen van het resulterende stelsel vergelijkingen voor  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  en  $\delta$  levert:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -\delta/2$  en  $\gamma = -\delta/2$  voor nog nader te bepalen  $\delta$  (zie hoofdstuk 2). Uit de dimensie-analyse volgt dus dat dit probleem door twee dimensieloze groepen bepaald wordt, te weten:

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = F\left(\frac{x}{\sqrt{at}}\right) \quad (3.75)$$

Via dimensie-analyse is, zoals al besproken in hoofdstuk 2, de vorm van de functie  $F$  niet te bepalen. Daarvoor moet het probleem exact opgelost worden. Los van de exacte oplossing leert de ervaring al dat, om een bepaald temperatuurverschil  $T - T_0$  op een zekere positie  $x$  te vinden, meer tijd moet verstrijken naarmate  $x$  groter is. Dit ervaringsfeit is ook uit het resultaat van de dimensie-analyse af te lezen. Immers: neem een bepaalde waarde voor  $T - T_0$  in gedachten; dan ligt de waarde van  $F$  vast. Stel dat dit op tijdstip  $t_1$  op plaats  $x_1$  gemeten wordt, dan is het logisch dat deze waarde voor  $T - T_0$  op positie  $x_2 (> x_1)$  later gemeten wordt en wel op het tijdstip  $t_2$  dat voldoet aan

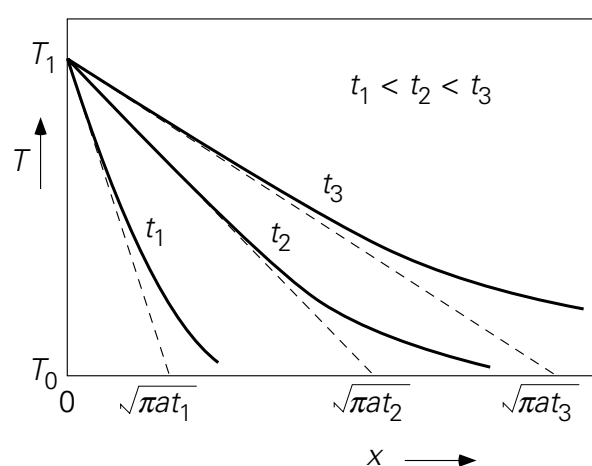
$$\frac{x_2}{\sqrt{at_2}} = \frac{x_1}{\sqrt{at_1}} \rightarrow t_2 = \frac{x_2^2}{x_1^2} t_1 \quad (3.76)$$

Alleen dan wordt dezelfde waarde van  $F$  weer gevonden. Anderzijds, als op een vaste positie  $x$  de temperatuur gemeten wordt, zal blijken dat de temperatuurstijging op dat punt steeds langzamer verloopt.

Het precieze temperatuurprofiel volgt, zoals gezegd, uit het oplossen van de differentiaalvergelijking (3.72) met de randvoorwaarden (3.73). De oplossing luidt, uitgeschreven in de twee dimensieloze groepen:

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} \exp(-s^2) ds \quad (3.77)$$

De integraal in het rechterlid is niet analytisch op te lossen en staat bekend onder de Engelse naam: error function. In diverse handboeken staat deze *errorfunctie* getabelleerd en hij is ook te vinden in computerprogramma's zoals Excel, Matlab of Maple. In figuur 3.12 is het temperatuurprofiel volgens vergelijking (3.77) voor een aantal verschillende tijdstippen weergegeven.



Figuur 3.12.

Met behulp van het temperatuurprofiel (3.77) is dan nu, dankzij de wet van Fourier, de warmteflux door het grensvlak  $x = 0$  te berekenen. Dit is dus de warmteflux die het materiaal binnendringt. Het resultaat is

$$\phi_q''|_{x=0} = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda \frac{T_1 - T_0}{\sqrt{\pi at}} \quad (3.78)$$

De flux neemt af in de tijd, zoals op grond van de profielen in figuur 3.11 ook verwacht mag worden. Daar is immers te zien dat de temperatuurgradiënt op  $x = 0$  in de tijd steeds kleiner wordt, zodat de flux door het grensvlak afneemt. vergelijking (3.78) drukt verder uit dat de drijvende kracht voor het warmtetransport constant is, namelijk  $T_1 - T_0$  in overeenstemming met de constante randvoorwaarden op  $x=0$  en op  $x \rightarrow \infty$ .

Vergelijking (3.78) is erg belangrijk en gelukkig eenvoudig te onthouden: de flux op  $x = 0$  is te berekenen door de constante drijvende kracht  $\Delta T = T_1 - T_0$  te delen door de lengteschaal  $\sqrt{\pi at}$  en vervolgens te vermenigvuldigen met  $\lambda$ . In de vergelijkingen (3.75) en (3.76) was al te zien dat  $\sqrt{at}$  de dimensie van een lengteschaal heeft. De combinatie  $\sqrt{\pi at} / \lambda$  staat, naar analogie met vergelijking (3.17), voor de weerstand

tegen warmtetransport die in de tijd toeneemt omdat de dikte  $\sqrt{\pi at}$  waarover  $\Delta T$  staat, toeneemt.

De lengte  $\sqrt{\pi at}$  heet de *indringdiepte* of *penetratiediepte* omdat dit een karakteristieke lengte is waarover de temperatuur van het materiaal binnen het tijdsinterval  $t$  merkbaar veranderd is. Deze lengtemaat drukt derhalve uit hoe ver de warmte het materiaal is ingedrongen (gepenetreerd). Voor deze maat is gekozen om twee redenen: ten eerste snijdt de raaklijn aan het temperatuurprofiel op  $x = 0$  op tijdstip  $t$  de  $x$ -as precies op  $\sqrt{\pi at}$ ; ten tweede is de temperatuurstijging op die positie minder dan zo'n 20% van de totale drijvende kracht.

De indringdiepte is een handige grootheid om snel te schatten hoe ver de warmte een materiaal is binnengedrongen, maar uit figuur 3.8 moge duidelijk zijn dat op elk moment ook voor  $x$ -waarden groter dan de penetratiediepte de temperatuur al aan het stijgen is. De aard van het temperatuurprofiel laat een exacte maat voor de penetratie van warmte echter niet toe. Vanwege bovenstaande overwegingen noemt men het hierboven behandelde model voor warmtetransport wel de *penetratietheorie*.

### 3.3.3 **Penetratietheorie: toepassing**

Een belangrijke vraag is nog: wanneer mag in de praktijk de penetratietheorie toegepast worden? Het antwoord luidt: in alle gevallen waarin er sprake is van instationaire warmtegeleiding in een materiaal dat aanvankelijk op uniforme temperatuur is en waarvan één zijde plotseling op een nieuwe temperatuur wordt gebracht en gehouden. Verder mag de 'achterzijde' van het materiaal nog geen noemenswaardige temperatuurverandering hebben ondergaan. Een van de rand-voorwaarden luidt immers:  $T = T_0$  voor  $x \rightarrow \infty$  voor elke  $t$ . Deze laatste voorwaarde voor de penetratietheorie legt een beperking op aan de geldigheidsduur van de penetratietheorie. Na verloop van tijd zal de achterzijde ook merkbaar in temperatuur veranderd zijn. Dit is grofweg in te schatten met behulp van de indringdiepte.

Stel dat de afmeting van het voorwerp in de  $x$ -richting uitgedrukt wordt als de lengteschaal  $L$ , dan is de penetratietheorie geldig zolang de indringdiepte duidelijk kleiner is dan  $L$ . Om er zeker van te zijn (zie Figuur 3.12) dat de achterzijde nog (steeds) de oorspronkelijke temperatuur heeft, wordt veiligheidshalve als criterium  $\sqrt{\pi at} < 0,6 L$  genomen; dit vertaalt zich tot

$$\frac{at}{L^2} < 0,1 \quad (3.79)$$

Het is logisch om, in het geval van de éénzijdige opwarming van een voorwerp, voor de lengteschaal de dikte  $D$  van het voorwerp te kiezen en daarmee dan ook het dimensieloze Fourier-getal  $Fo$  te definiëren:

$$Fo = \frac{at}{D^2} \quad (3.80)$$

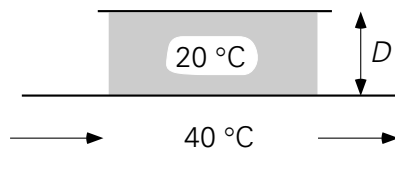
$Fo$  is dus het kwadraat van de verhouding van twee lengteschalen:  $Fo$  vergelijkt de afstand waarover de temperatuur ten gevolge van geleiding merkbaar is met de werkelijke afmeting van het voorwerp in de richting van het warmtetransport. Dit kental is ook nog op een andere wijze te interpreteren:  $Fo$  is ook de verhouding van twee tijden, namelijk de werkelijke procestijd  $t$  ten opzichte van de tijd die er nodig is om de temperatuur van de achterzijde van het materiaal merkbaar te laten veranderen ( $= D^2/a$ ).

Merk op dat de wiskunde hierboven betrekking heeft op een vlakke laag en niet zonder meer toegepast kan worden op gekromde geometrieën zoals een cilinder of een bol. Toch kan ook dan deze theorie best wel gebruikt worden zolang de penetratiediepte maar zo klein is dat de kromming niet gevoeld wordt. Zo zal bijvoorbeeld bij een bol met straal  $R$  de penetratie van warmte aanvankelijk alleen plaats vinden in een zeer dunne buitenste schil met dikte  $\delta$ ; mits  $\delta \ll R$  kan penetratietheorie gerust toegepast worden. In deze situatie is de straal  $R$  de relevante lengteschaal waarmee de penetratiediepte moet worden vergeleken. Toch wordt  $Nu$  ook in zo'n geval doorgaans gedefinieerd in termen van de diameter  $D$ .

**Voorbeeld 3.4.** Een koperen plaat

Een vlakke koperen plaat ( $a = 1,17 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ) vormt de bovenzijde van een rechthoekig kanaal waardoorheen water stroomt (zie Figuur 3.13). De plaatdikte  $D$  is 3 mm. Het water en de plaat zijn beide op een temperatuur van  $20^\circ\text{C}$ . Plotseling stroomt er door het kanaal water met een temperatuur van  $40^\circ\text{C}$  (Let wel: zo'n abrupte verandering is in werkelijkheid niet gemakkelijk te verwezenlijken; daarnaast blijft verondersteld dat de weerstand tegen de opwarming *in* de plaat gelegen is).

Geef een schatting van de tijd die verstrijkt voordat de bovenzijde van de plaat merkbaar van temperatuur verandert.



Figuur 3.13.

De oplossing van dit probleem is te vinden door de errorfunctie te gebruiken. Als kwantitatief criterium voor de kwalitatieve uitspraak 'merkbaar van temperatuur verandert' zou gekozen kunnen worden dat de temperatuur merkbaar veranderd is als deze 5% van het totale temperatuurverschil gewijzigd is. In dit geval is dat  $1^\circ\text{C}$ .

De relevante lengteschaal is hier weer de plaatdikte. Daarmee volgt met behulp van vergelijking (3.77):

$$\operatorname{erf}\left(\frac{D}{2\sqrt{at}}\right) = 1 - \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 0,95 \quad (3.81)$$

Opzoeken in een tabel van de errorfunctie levert op

$$\frac{D}{2\sqrt{at}} = 1,386 \rightarrow t = 0,01 \text{ s}$$

Zou deze tijd afgeschat worden door de penetratiediepte gelijk te nemen aan de plaatdikte, dan zou de gevraagde tijd gevonden worden uit  $D = \sqrt{\pi at}$  en zou 0,025 s de uitkomst zijn. Deze laatste waarde – uiteraard groter dan de uitkomst van de berekening op basis van de exacte oplossing met de errorfunctie – illustreert nog eens het ietwat arbitraire karakter van de definitie van de penetratiediepte. [Feitelijk verloopt de warmtegeleiding altijd wat sneller dan afgeschat met het concept ‘penetratiediepte’.]

⑤

### Voorbeeld 3.5. Bitumen op eikenhout

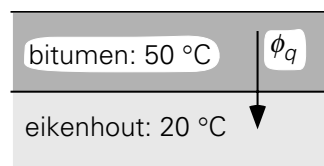
Een zeer grote vlakke plaat eikenhout ( $\lambda = 0,19 \text{ W/mK}$ ,  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 2,4 \cdot 10^3 \text{ J/kgK}$ ) heeft een dikte  $D$  van 1 cm en een uniforme begintemperatuur van  $T_w = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Op  $t = 0$  wordt op dit hout een laag bitumen ( $\lambda = 0,74 \text{ W/mK}$ ,  $\rho = 1300 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 920 \text{ J/kgK}$ ) met dezelfde dikte  $D$  aangebracht (zie Figuur 3.14). Deze laag heeft een uniforme aanvangstemperatuur van  $T_b = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Gevraagd wordt om na 5 seconden te bepalen:

- wat de indringdiepte in beide materialen is;
- wat de temperatuur van het grensvlak is;
- wat de warmteflux door het grensvlak is;
- wat de waarden van de temperatuurgradiënten zijn aan weerszijden van het grensvlak tussen hout en bitumen.

Aangenomen mag worden dat er geen warmte-uitwisseling met de omgeving plaatsvindt.



Figuur 3.14.

Het is duidelijk dat dit probleem instationair is. Om de vragen te kunnen beantwoorden met behulp van de penetratietheorie moet eerst nagegaan worden of de indringdiepten duidelijk kleiner zijn dan de dikte van plaat en laag. In feite wordt daarom vraag a gesteld.

- a) met subscript  $b$  voor bitumen en  $w$  voor eikenhout volgt voor de beide penetratiediepten:

$$\sqrt{\pi a_w t} = 1,25 \text{ mm} ; \sqrt{\pi a_b t} = 3,1 \text{ mm} \quad (3.82)$$

Aangezien beide indringdiepten duidelijk kleiner zijn dan 0,6 maal de dikten van de bitumenlaag en het hout, mag inderdaad de penetratietheorie in de rest van dit vraagstuk gebruikt worden.

- b) Voor de beantwoording van de vragen b en c is het handig eerst de uitdrukkingen voor de warmteflux door het grensvlak op te stellen. Noem daartoe de temperatuur van het grensvlak  $T_i$ . Op elk willekeurig tijdstip wordt (mits de penetratietheorie gebruikt mag worden) de warmteflux vanuit het bitumen naar het grensvlak gegeven door:

$$\phi_q'' = \frac{\lambda_b}{\sqrt{\pi a_b t}} (T_b - T_i) \quad (3.83)$$

Evenzo geldt voor de flux vanaf het grensvlak het eikenhout in:

$$\phi_q'' = \frac{\lambda_h}{\sqrt{\pi a_h t}} (T_i - T_h) \quad (3.84)$$

Aftrekken van beide fluxvergelijkingen (bedenk dat beide fluxen even groot zijn) geeft:

$$T_i = \frac{\frac{\lambda_b}{\sqrt{a_b}} T_b + \frac{\lambda_h}{\sqrt{a_h}} T_h}{\frac{\lambda_b}{\sqrt{a_b}} + \frac{\lambda_h}{\sqrt{a_h}}} = 311 \text{ K} = 38 \text{ }^\circ\text{C} \quad (3.85)$$

Dit resultaat illustreert dat de grensvlaktemperatuur niet van de tijd afhangt en zich dus ook op  $t = 0$  instantaan instelt.

- c) De fluxen aan weerszijden van het grensvlak worden met de vergelijkingen (3.83) en (3.85) uitgerekend en worden dus op  $t = 5$  s:

$$\phi_q'' = 2,7 \text{ kWm}^{-2} \quad (3.86)$$

Beide fluxen zijn dus tijdsafhankelijk, maar wel altijd aan elkaar gelijk.

d) De temperatuurgradiënten kunnen berekend worden uit

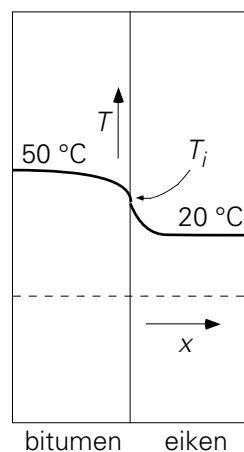
$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\text{interface}} = -\frac{1}{\lambda} \phi_q'' = -\frac{\Delta T}{\sqrt{\pi a t}} \quad (3.87)$$

Na 5 seconden levert vergelijking (3.87) voor het bitumen

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\text{interface}} = -\frac{(T_b - T_i)}{\sqrt{\pi a_b t}} = -3,9 \cdot 10^3 \text{ K m}^{-1} \quad (3.88)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\text{interface}} = -\frac{(T_i - T_h)}{\sqrt{\pi a_h t}} = -14,4 \cdot 10^3 \text{ K m}^{-1} \quad (3.89)$$

De nu geheel berekende situatie is geschetst in figuur 3.15. Aan weerszijden van het grensvlak zijn duidelijk de typische errorfunctie-profielen (van figuur 3.12) te zien die elkaar ontmoeten bij de constante grensvlaktemperatuur  $T_i$ . Wat verder opvalt is dat de penetratiediepte en de temperatuurgradiënt (beide tijdsafhankelijk) aan weerszijde anders zijn – wat komt door de verschillende stoffeigenschappen van de beide materialen.



Figuur 3.15.

5

### 3.3.4 Warmteoverdrachtscoëfficiënt voor korte tijden

Uiteraard is ook het resultaat van de penetratietheorie – zie vergelijking (3.78) – in de vorm van Newton's afkoelingswet te schrijven:

$$\phi_q'' = h \Delta T = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi a t}} \Delta T = \sqrt{\frac{\lambda \rho c_p}{\pi t}} \Delta T \quad (3.90)$$

Met andere woorden (let op dat in vergelijking (3.90) de flux staat):

$$h = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi at}} = \sqrt{\frac{\lambda \rho c_p}{\pi t}} \quad (3.91)$$

In dit geval is  $h$  dus een functie van de tijd! Merk op dat  $h$  weer de reciproque is van de weerstand voor warmtetransport zoals die al besproken is in de context van vergelijking (3.78). De bijbehorende relatie voor het Nusselt-getal luidt nu:

$$\text{Nu} = \frac{hD}{\lambda} = \sqrt{\frac{\lambda \rho c_p}{\pi t}} \frac{D}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{D^2}{at}} \quad (3.92)$$

of

$$\text{Nu} = 0,564 \text{Fo}^{-1/2} \quad \text{mits } \text{Fo} < 0,1 \quad (3.93)$$

In veel gevallen is er sprake van een penetratieproces dat in totaal  $t_e$  seconden duurt (startend vanaf  $t = 0$ , het begin van de penetratie); dan is het dikwijls handig voor dit proces de gemiddelde warmtestroom uit te rekenen. Daar de drijvende kracht  $\Delta T$  constant is, komt dit neer op het middelen van  $h(t)$  over het interval  $(0, t_e)$ . Voor de gemiddelde flux geldt dan:

$$\bar{\phi}_q = \frac{1}{t_e} \int_0^{t_e} h(t) A \Delta T dt = \frac{1}{t_e} \int_0^{t_e} h(t) dt A \Delta T = \bar{h} A \Delta T \quad (3.94)$$

Voor de gemiddelde warmteoverdrachtscoëfficiënt  $\bar{h}$  volgt dan met behulp van vergelijking (3.91):

$$\bar{h} = \frac{1}{t_e} \int_0^{t_e} \sqrt{\frac{\lambda \rho c_p}{\pi t}} dt = 2 \sqrt{\frac{\lambda \rho c_p}{\pi t_e}} = 2 h(t_e) \quad (3.95)$$

Zoals in vergelijking (3.95) staat, is de tijdgemiddelde  $h$ -waarde voor het interval  $(0, t_e)$  gelijk aan twee maal de  $h$ -waarde op tijdstip  $t_e$ .

### Voorbeeld 3.6. Een koperen plaat II

Hoeveel warmte is er per oppervlakte-eenheid gedurende de eerste 4 ms aan de koperen plaat van voorbeeld 3.4 toegevoerd en hoe groot is de temperatuur-stijging na die 4 ms?

De benodigde fysische eigenschappen van koper:  $\lambda = 403 \text{ W/mK}$ ,  $\rho = 8960 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 386 \text{ J/kgK}$ .

Op  $t_e = 4 \text{ ms}$  is de indringdiepte  $\sqrt{\pi at_e} = 1,21 \text{ mm}$ , en daarmee duidelijk kleiner dan  $0,6 D$ . Gedurende de gehele periode van 4 ms mag dus de penetratietheorie gebruikt worden. Nu uitdrukking (3.87) voor  $\bar{h}$  beschikbaar is, is de vraag eenvoudig te beantwoorden: de totale hoeveelheid warmte (per oppervlakte-eenheid)  $Q''$  die de plaat in is gegaan, volgt door integratie van de warmteflux gedurende die 4 ms:



$$Q'' = \int_0^{t_e} \phi_q'' dt = \bar{h} t_e \Delta T = 2 h(t_e) t_e \Delta T = 5,33 \cdot 10^4 \text{ Jm}^{-2} \quad (3.96)$$

Overigens lijkt dit misschien erg veel warmte, maar de toename van de gemiddelde  $\Delta\langle T \rangle = Q'' / (\rho c_p D)$  van de koperen plaat in die 4 ms bedraagt slechts 5,1 °C. ⑤

### Samenvatting

Met behulp van een microbalans is de partiële differentiaalvergelijking voor  $T(x, t)$  afgeleid die instationaire penetratie van warmte door geleiding in een vlakke plaat beschrijft. Voor korte tijden zijn zowel de theorie als enkele toepassingen van de penetratietheorie behandeld.

De penetratietheorie met de bijbehorende profielen en formules is goed bruikbaar als:

- er enkel sprake is van geleiding;
- de geometrie vlak is;
- de temperatuur van het lichaam aanvankelijk uniform is, terwijl op  $t = 0$  één zijde plotseling een andere, vaste temperatuur krijgt;
- de indringdiepte  $\sqrt{\pi at} < 0,6 D$  is – ofwel  $\text{Fo} = (at/D^2) < 0,1$  is.

Bij gekromde geometrieën (met straal  $R$ ) is penetratietheorie toepasbaar zolang  $\sqrt{\pi at} \ll R$ .

Onder deze condities wordt het temperatuurprofiel beschreven in termen van de errorfunctie. De typische temperatuurprofielen die hierbij horen en die het verloop van de warmtepenetratie illustreren, moet je kunnen schetsen. Voor de tijdsafhankelijke warmteflux die het materiaal indringt, geldt

$$\phi_q'' = h \Delta T = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi at}} \Delta T = \sqrt{\frac{\lambda \rho c_p}{\pi t}} \Delta T$$

Daaruit volgt

$$h = h(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi at}} = \sqrt{\frac{\lambda \rho c_p}{\pi t}} \quad \text{en} \quad \bar{h} = 2 h(t_e)$$

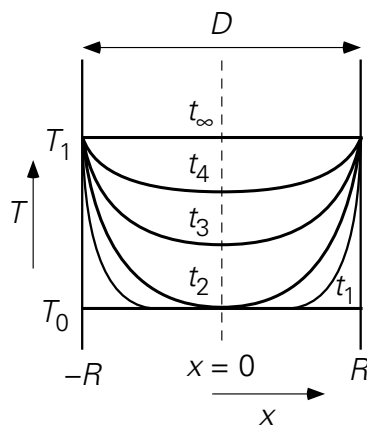
Voor korte tijden geldt derhalve:  $\Delta T = \text{constant}$ , maar  $h = h(t)$ . Dit laatste kan ook uitgedrukt worden in termen van dimensieloze kentallen:  $\text{Nu} = 0,564 \text{ Fo}^{-1/2}$  (mits  $\text{Fo} < 0,1$  voor een éenzijdig verwarmde of gekoelde plak).

### 3.3.5 Doorverwarming

Bij de behandeling van de penetratietheorie is uitdrukkelijk geëist, dat de achterzijde van het lichaam (nog) niets merkt van het indringen van de warmte. Deze eis is geherformuleerd als: de indringdiepte moet duidelijk kleiner zijn dan de karakteristieke afmeting  $D$  van het lichaam, oftewel  $\text{Fo} < 0,1$  bij eenzijdige warmte-toevoer. Hoe moet nu gehandeld worden als dit niet (meer) het geval is? Dan is het probleem

uiteraard (!) nog steeds te beschrijven en op te lossen met behulp van de partiële differentiaalvergelijking (3.72) en zijn daartoe nog steeds 3 randvoorwaarden vereist. Doordat aan de achterzijde de randvoorwaarde nu anders is (geworden), wordt de wiskunde nu echter wel complex. Gelukkig blijkt in een bepaalde klasse van problemen na enige tijd de situatie toch weer te versimpelen. Dit is het geval voor lichamen die van beide zijden (tweezijdig) of rondom (bij een bol of cilinder) verwarmd worden. Het standaardvoorbeeld is ook hierbij weer de vlakke geometrie, zie figuur 3.16.

In figuur 3.16 is een vlakke plaat met eindige dikte  $D$  geschetst. Voor  $t < 0$  was de hele plaat op temperatuur  $T_0$ . Op  $t = 0$  worden beide zijden plotseling op temperatuur  $T_1$  gebracht (en gehouden). Nu dringt er dus van beide zijden warmte het materiaal in. De weerstand tegen het warmtetransport ligt weer geheel in de plaat: buiten is warmte in overvloed aanwezig. Het zal duidelijk zijn (zie figuur 3.15), dat voor korte tijden gewoon de penetratietheorie opgaat, d.w.z. voor  $t < t_1$  met  $\sqrt{\pi a t_1} < 0,6R$  aangezien hier  $R = D/2$  de relevante lengteschaal is, zodat  $\sqrt{\pi a t_1} < 0,3D$  en  $Fo < 0,03$ .



Figuur 3.16.

Op zeker moment,  $t = t_2$ , gaat echter ook de temperatuur in het midden van het materiaal stijgen en geldt de penetratietheorie niet meer: de temperatuur  $T_0$  verdwijnt, en daarmee geldt de derde randvoorwaarde van vergelijking (3.73) niet meer. Na enige tijd, bijvoorbeeld na  $t = t_3$  (d.w.z. als  $Fo > 0,03$ ), vereenvoudigt de situatie zich weer: het blijkt dat dan de opeenvolgende temperatuurprofielen ruimtelijk gelijkvormig worden. Voor  $t > t_3$  leidt scheiding van variabelen dan tot een oplossing van de vorm

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - A(t) \cdot f\left(\frac{x}{R}\right) \quad (3.97)$$

De bijbehorende randvoorwaarden luiden dan:

$$T(t=0) = T_0 \quad \text{voor } |x| \leq R$$

$$T(x=R) = T_1 \quad \text{voor } t > 0 \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{voor } x = 0 \text{ en } t > 0$$

Substitutie van vergelijking (3.97) in de partiële differentiaalvergelijking (3.72) met inachtnaam van de randvoorwaarden (3.98) leidt tot een exacte oplossing (voor het eerst gevonden door *Fourier*) die bestaat uit een reeks van termen die alle de vorm van vergelijking (3.97) hebben. De functie  $A$  is steeds een exponentiële functie van de tijd met een negatief argument, waarin  $k^2$  voorkomt, terwijl voor de  $f$ -functie  $\cos(k\pi x/D)$  gevonden wordt, met alleen de oneven  $k$ -waarden. De eerste term van deze reeks geeft (mits  $Fo > 0.03$ ) een voldoende nauwkeurig resultaat voor de vlakke plaat van Figuur 3.15:

$$\frac{T-T_0}{T_1-T_0} = 1 - \frac{4}{\pi} \exp\left(-\pi^2 \frac{at}{D^2}\right) \cdot \cos\left(\pi \frac{x}{D}\right) \quad (3.99)$$

Omdat de temperatuur in het lichaam nu *overall* verandert, wordt wel gesproken van *doorverwarming* (Eng. 'long-term heating').

Nu het temperatuurprofiel bekend is, kan weer naar het verband tussen drijvende kracht en flux gekeken worden, volgens het beproefde recept van de afkoelingswet van Newton. Verwacht mag worden dat daaruit dan weer een uitdrukking volgt voor de warmteoverdrachtscoëfficiënt  $h$ . Omdat de temperatuur in het lichaam nu nergens meer constant is, moet er eerst een keuze gemaakt worden voor een temperatuur in het lichaam waarmee de drijvende kracht  $\Delta T$  vastgelegd wordt. Hiervoor zijn in de praktijk twee keuzes van belang: de temperatuur ( $T_c$ ) van het centrum van het lichaam en de gemiddelde temperatuur ( $\langle T \rangle$ ) van het lichaam. Beide opties worden hier besproken.

In termen van de *gemiddelde temperatuur*  $\langle T \rangle$  luidt Newton's afkoelingswet:

$$\phi_q'' = h (T_1 - \langle T \rangle) \quad (3.100)$$

De gemiddelde temperatuur  $\langle T \rangle$  volgt door middeling uit vergelijking (3.99) en is

$$\langle T \rangle = T_1 - \frac{8}{\pi^2} (T_1 - T_0) \exp\left(-\pi^2 \frac{at}{D^2}\right) \quad (3.101)$$

Vervolgens bepalen we  $\phi_q''$  op positie  $x = -R$  met behulp van het temperatuurprofiel (3.99); bedenk dat voor geleiding nog altijd de wet van Fourier geldt, ook onder instationaire condities:

$$\phi_q'' = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=-R} = \frac{2\lambda}{R} (T_1 - T_0) \exp\left(-\pi^2 \frac{at}{D^2}\right) \quad (3.102)$$

Combinatie van de vergelijkingen (3.100), (3.101) en (3.102) levert (nog steeds op basis van  $\langle T \rangle$ ):

$$h = \frac{2\lambda/R}{8/\pi^2} = \frac{\pi^2 \lambda}{4 R} \quad (3.103)$$

$$\text{ofwel} \quad \text{Nu} = \frac{h 2R}{\lambda} = \frac{\pi^2}{2} = 4,93 \quad (3.104)$$

Al met al is dit een heel simpel en compact resultaat voor  $\text{Fo} > 0,03$  voor dubbelzijdige verwarming of koeling – als gevolg van het feit dat de temperatuur-profielen gelijkvormig zijn.

Evenzo geldt bij lange tijden ( $\text{Fo} > 0,03$ ) voor een lange cilinder en een bol:

$$\begin{array}{ll} \text{lange cilinder:} & \text{Nu} = 5,8 \\ \text{bol:} & \text{Nu} = 6,6 \end{array} \quad (3.105)$$

De tweede mogelijkheid om de drijvende kracht voor de opwarming te definiëren is op basis van de *temperatuur van het centrum* van het lichaam. Het analogon van vergelijking (3.100) is dan

$$\phi_q'' = h (T_1 - T_c) \quad (3.106)$$

Let wel: het gaat om dezelfde warmteflux, maar de drijvende kracht is anders gekozen en daarmee is er ook een andere  $h$ . Door  $T_1 - T_c$  te elimineren m.b.v. vergelijking (3.99) en de resulterende uitdrukking voor  $\phi_q''$  te vergelijken met vergelijking (3.102) wordt nu gevonden dat  $\text{Nu} = \pi$ . Ook hier is dus weer voor de langere tijden  $h$  een constante, terwijl de drijvende kracht voor het warmtetransport, nl.  $\Delta T = T_1 - T_c$ , een functie van de tijd is. De waarde van  $h$  bij gebruik van  $T_c$  wijkt echter wel af van de  $h$ -waarde bij gebruik van  $\langle T \rangle$ .

### Samenvatting

In een vlakke plaat (met dikte  $D$ ) die van beide kanten wordt opgewarmd (of afgekoeld) wordt na verloop van tijd ( $\text{Fo} > 0,03$  met nog steeds  $\text{Fo} = at/D^2$ ) het temperatuurprofiel op achtereenvolgende tijdstippen ruimtelijk gelijkvormig. De oplossing voor  $T(x,t)$  voor deze situatie is gepresenteerd. De warmtestroom door het oppervlak is bij deze doorverwarming te beschrijven met een constante warmteoverdrachtscoëfficiënt, terwijl de drijvende kracht juist een functie van de tijd

is. Als drijvende kracht wordt òf het verschil tussen oppervlaktetemperatuur en de gemiddelde temperatuur òf het temperatuur-verschil tussen het oppervlak en het centrum gebruikt.

Het verschil tussen de penetratietheorie en het doorverwarmingsconcept voor een tweezijdig verwarmd of gekoeld voorwerp kan als volgt worden samengevat:

penetratietheorie	$Fo < 0,03$	$h = h(t)$	$\Delta T = \text{constant}$
doorverwarming	$Fo > 0,03$	$h = \text{constant}$	$\Delta T = \Delta T(t)$

Voor lange tijden en op basis van  $\langle T \rangle$  zijn de volgende constante Nusselt-getallen te gebruiken:

bol	6,6
cilinder	5,8
vlakke plaat	4,93

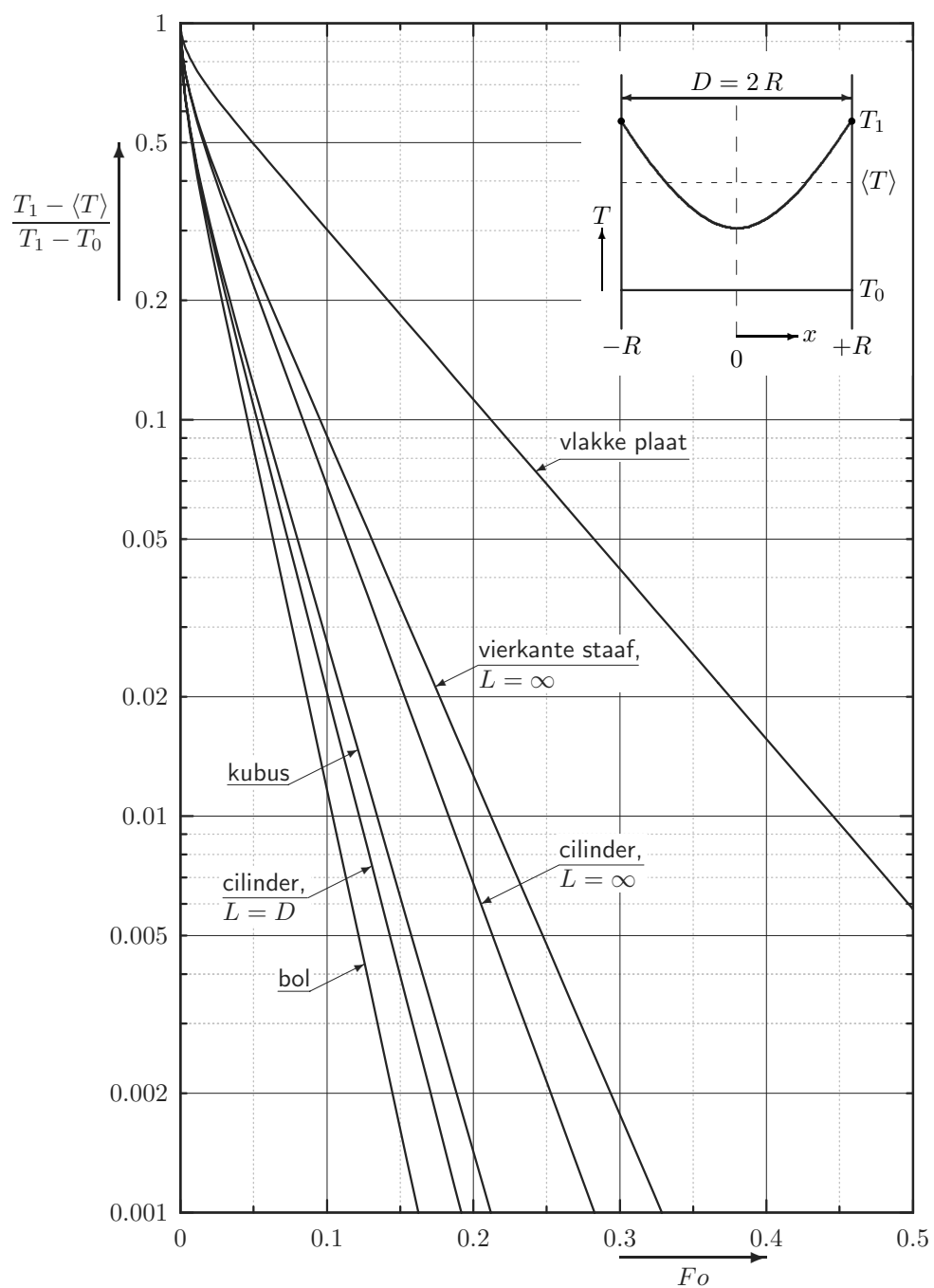
Het is de gewoonte om voor de lengteschaal in zowel  $Fo$  als  $Nu$  de dikte of diameter van het voorwerp te gebruiken.

### 3.3.6 **Het totale opwarmproces van een voorwerp**

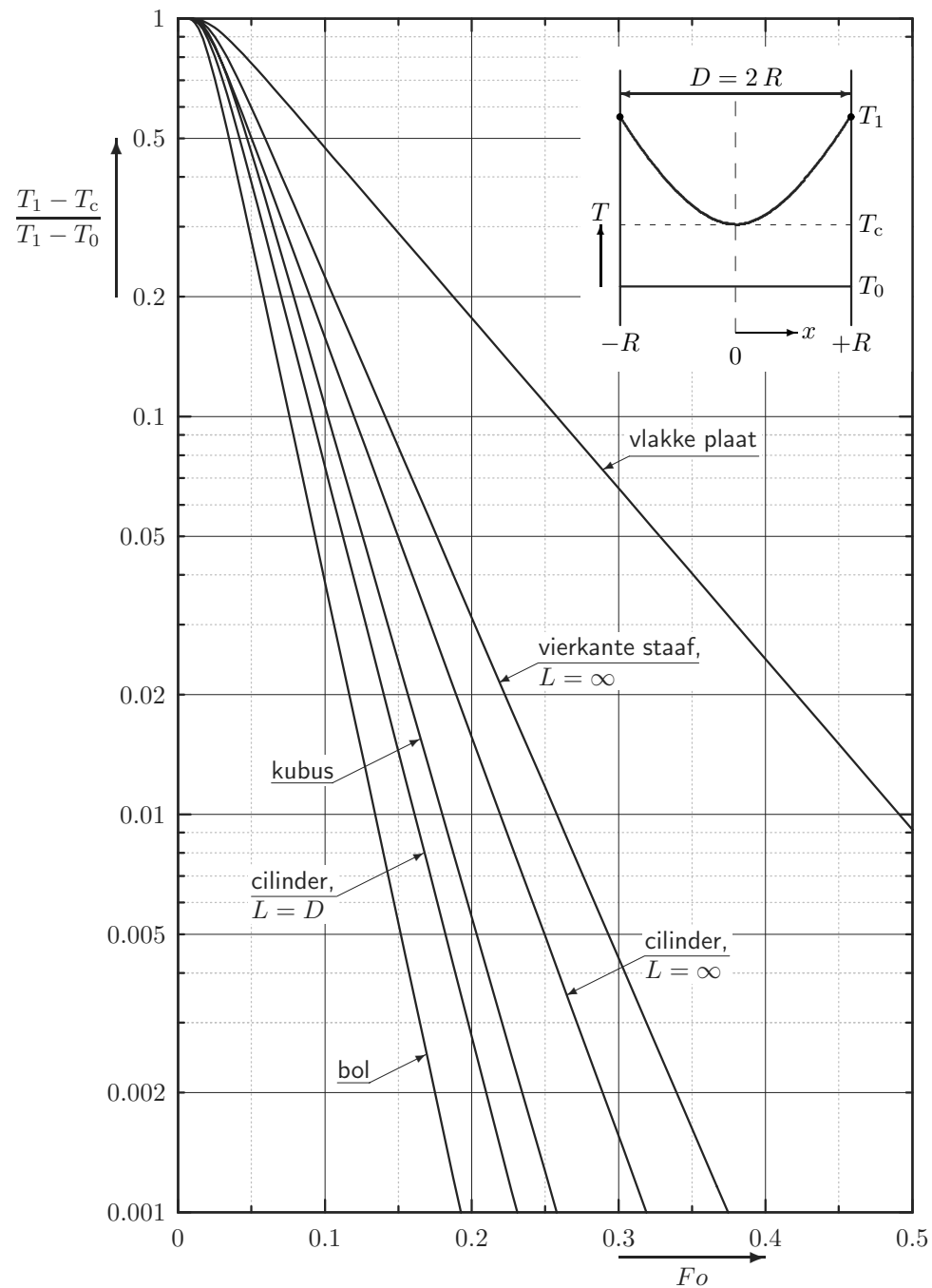
In de voorgaande paragrafen zijn de korte en de lange tijden van instationaire opwarming (of koeling) door geleiding separaat behandeld. Voor het tussenliggende traject van  $Fo$ -waarden – rond 0,1 voor éézijdige verwarming of koeling, of rond 0,03 voor dubbelzijdige – is de differentiaalvergelijking ook op te lossen, maar dat zal hier niet verder aan de orde komen.

De exacte oplossingen voor het totale opwarmingsproces van een aantal objecten van eindige afmetingen zijn grafisch weergegeven in de figuren 3.17 en 3.18 voor respectievelijk de drijvende kracht op basis van  $\langle T \rangle$  en op basis van  $T_c$ . Langs de verticale as is in beide grafieken een dimensieloos temperatuurverschil uitgezet, terwijl langs de horizontale as het Fourier-getal (de dimensieloze tijd) staat. Merk daarbij op dat de hellingen van corresponderende lijnen in beide figuren gelijk zijn voor langere tijden èn dat alle rechte lijnen (voor  $Fo > 0,03$ ) bij extrapolatie niet door het punt (0,1) gaan.

Tenslotte dient vermeld te worden dat voor, zeg,  $Fo > 0,03$  de figuren 3.17 en 3.18 uiterst praktisch zijn, maar dat voor kleinere  $Fo$ -waarden het aflezen in de grafiek erg onnauwkeurige resultaten oplevert en dat dan hoe dan ook beter met penetratie-theorie gewerkt kan worden.



Figuur 3.17.



Figuur 3.18.

**Voorbeeld 3.7. Een glazen bol**

Een massief glazen bol ( $a_{\text{glas}} = 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ) met een diameter van 2 dm heeft een temperatuur van  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Plotseling wordt de temperatuur van het oppervlak met  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  verhoogd.

Hoelang duurt het totdat de gemiddelde temperatuur van de bol  $9 \text{ }^\circ\text{C}$  gestegen is?

Uit de gegevens volgt direct

$$\frac{T_1 - \langle T \rangle}{T_1 - T_0} = 0,1$$

Aflezen van deze waarde in figuur 3.17 op de curve voor de bol levert  $Fo = 0,045$ . Dit levert op dat het 4090 s  $\approx 1,1$  uur duurt voordat  $\langle T \rangle = T_0 + 9^\circ\text{C}$ .

⑤

### Voorbeeld 3.8. De glazen bol II

Voor de dezelfde glazen bol van voorbeeld 3.7: hoe lang duurt het voordat de temperatuur van het centrum van de bol  $9^\circ\text{C}$  in temperatuur is gestegen en bereken de gemiddelde temperatuur van de bol op dat moment.

Als de temperatuur van het centrum van de bol  $9^\circ\text{C}$  in temperatuur is gestegen, dan geldt voor het dimensieloze temperatuurverschil

$$\frac{T_1 - T_c}{T_1 - T_0} = 0,1$$

en daarmee volgt uit figuur 3.18:  $Fo = 0,075$ . Het duurt dus 6820 s  $\approx 1,89$  uur voordat het centrum van de bol  $9^\circ\text{C}$  gestegen is. Zoals verwacht is dit duidelijk langer dan in het  $\langle T \rangle$ -voorbeeld: de temperatuur van het centrum is immers altijd het verst af van de randtemperatuur  $T_1$ .

Het is nu eenvoudig te berekenen wat de gemiddelde temperatuur is als  $T_c = 9^\circ\text{C} + T_0$  is. Kijk nu in figuur 3.17 bij  $Fo = 0,075$ . Dit geeft

$$\frac{T_1 - \langle T \rangle}{T_1 - T_0} = 0,03 \rightarrow \langle T \rangle = T_1 - 0,03 \cdot (T_1 - T_0) = 29,7^\circ\text{C}$$

⑤

Nu gevonden is dat voor lange tijden de inwendige warmteoverdrachtscoëfficiënt  $h$  constant is, kunnen instationaire opwarm- en afkoelproblemen waarbij het alleen gaat om de gemiddelde temperatuur van een lichaam, betrekkelijk rechttoe rechtaan opgelost worden op basis van een warmtebalans over het lichaam in kwestie. Omdat  $h$  constant verondersteld zal worden (en dit is onjuist bij de aanvang van opwarming of afkoeling), gelden de oplossing en de uitkomsten slechts bij benadering.

De werkwijze zal geïllustreerd worden voor een bol die aanvankelijk op een uniforme temperatuur  $T_0$  is. Op  $t = 0$  wordt het boloppervlak op temperatuur  $T_1$  gebracht. De warmtebalans over de bol luidt (op basis van  $\langle T \rangle$ ):

$$\frac{d(\rho V c_p \langle T \rangle)}{dt} = A h (T_1 - \langle T \rangle) \quad (3.107)$$



waaruit voor constante stofgrootheden volgt:

$$\frac{d\langle T \rangle}{dt} = \frac{6h}{\rho c_p D} (T_1 - \langle T \rangle) \quad (3.108)$$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking luidt *indien h constant is*:

$$\langle T \rangle - T_1 = K \exp \left( - \frac{6h}{\rho c_p D} t \right) \quad (3.109)$$

Hierin is  $K$  een integratieconstante, die uit de randvoorwaarde bepaald moet worden. Dit levert echter een probleem op. Op  $t = 0$  was de temperatuur in de bol immers  $T_0$ . Toch kan feitelijk  $T_0$  niet als randvoorwaarde gebruikt worden, aangezien bij het bepalen van de oplossing (3.109) van de differentiaalvergelijking (3.108) verondersteld is dat  $h$  een constante is. Dit is alleen zo voor de langere tijden; voor korte tijden is juist  $h = h(t)$ ! In de figuren 3.17 en 3.18 is dit ook goed te zien: voor korte tijden, d.w.z. voor kleine  $Fo$ , zijn de lijnen gekromd. Daar de verticale as van de figuur logaritmisch is, illustreert dit dat voor korte tijden de oplossing van het stationaire warmtegeleidingsprobleem inderdaad niet overeenkomt met de vorm van vergelijking (3.109). Slechts voor de langere tijden is de lijn in de figuren recht en is de temperatuur een e-macht, zoals uitgedrukt door vergelijking (3.109).

Toch wordt er wel gewerkt met de randvoorwaarde:  $t = 0 \rightarrow \langle T \rangle = T_0$ . Principieel is dit dus onjuist. Of de fout die daarmee gemaakt wordt acceptabel is, kan in het algemeen niet gezegd worden: dat moet per geval bekeken worden.

### Voorbeeld 3.9. De glazen bol III

Gebruik voor de glazen bol van de voorbeelden 3.7 en 3.8 de differentiaalvergelijking (3.108) en de aanname dat  $h$  constant is, om af te schatten hoe lang het duurt voordat de gemiddelde temperatuur  $9^\circ\text{C}$  gestegen is.

Uit de exacte oplossing met behulp van figuur 3.18 is al bekend (zie voorbeeld 3.7) dat  $\langle T \rangle = T_0 + 9^\circ\text{C}$  na  $t = 4090$  s. Oplossen van vergelijking (3.108) met  $h =$  constant voor elke  $t$  en met de randvoorwaarde  $\langle T \rangle = T_0$  levert

$$\frac{T_1 - \langle T \rangle}{T_1 - T_0} = \exp \left( - \frac{6h}{\rho c_p D} t \right) \quad (3.110)$$

Met behulp van dimensieloze kentallen kan vergelijking (3.110) geschreven worden als

$$\frac{T_1 - \langle T \rangle}{T_1 - T_0} = \exp \left( - \frac{6 \text{Nu} (\lambda/D)}{\rho c_p D} t \right) = \exp (-6 \text{Nu} Fo) \quad (3.111)$$

Bij doorverwarming van een bol geldt:  $Nu = 6,6$ . Met behulp van de gegevens voor  $a$ ,  $D$  en  $Nu$  volgt:  $\langle T \rangle = T_0 + 9 \text{ }^\circ\text{C}$  na  $t = 5290 \text{ s}$ . Deze aanpak resulteert dus in een duidelijk langere tijd dan gevonden in voorbeeld 3.7 met behulp van figuur 3.17.

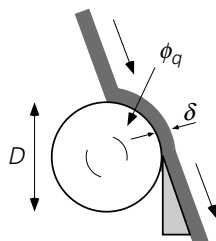
⑤

Tenslotte zal nog middels een voorbeeld gedemonstreerd worden hoe een doorverwarmingsprobleem met één geïsoleerde wand snel opgelost kan worden met behulp van de figuren 3.17 en 3.18.

### Voorbeeld 3.10. Een koelwals

Een koelwals (diameter  $D = 1 \text{ m}$ ) heeft een oppervlaktetemperatuur van  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  en draait rond met een toerental van 1 omwenteling per minuut. Een bitumineus product met een temperatuur van  $80 \text{ }^\circ\text{C}$  (bij deze temperatuur vloeit het bitumen nog net) wordt als een laag op de wals gebracht en wordt er na een kwart omwenteling weer afgeschraapt. Geëist wordt dat dan de gemiddelde temperatuur van het gekoelde bitumen ten hoogste  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  is. Warmte-uitwisseling van de bitumen met de omringende lucht is verwaarloosbaar. Gegeven is voor de bitumen:  $c_p = 920 \text{ J/kgK}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  en  $\lambda = 0,17 \text{ W/mK}$ .

De vraag die beantwoord moet worden, luidt: hoe dik mag de laag bitumen zijn, opdat juist aan de eis betreffende de gemiddelde temperatuur op het punt van afschrapen voldaan is.



Figuur 3.19.

Allereerst moet beseft worden dat bitumen bij de heersende condities ('bitumen vloeit nog net') zich min of meer als een vast materiaal gedraagt en als in propstroom met de wals mee beweegt. Meebewegend met een klein volumelementje in de bitumenlaag zou men merken dat de temperatuur in de tijd daalt. Dit heeft ook als consequentie dat de warmte die via de wals afgevoerd moet worden, slechts door geleiding in de richting van de walswand getransporteerd kan worden.

Verder mag aangenomen worden dat de dikte van de bitumenlaag klein is ten opzichte van de straal van de wals en dit impliceert dat de kromming van de bitumenlaag verwaarloosd mag worden. Derhalve mag het probleem opgevat worden als de afkoeling van een vlakke plaat. In figuur 3.19 zijn de karakteristieke maten en stromen weergegeven.

Tenslotte kan zonder veel bezwaar aangenomen worden dat er geen warmte-uitwisseling is van de bitumen met de lucht – in werkelijkheid is deze niet helemaal nul, maar wel erg klein t.o.v. de warmtestroom aan de walszijde. Maar dan is, vanwege de wet van Fourier, de temperatuurgradiënt aan het bitumen-oppervlak ook (nagenoeg) nul:

$$\phi_q'' = -\lambda \frac{dT}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = 0 \quad (3.112)$$

Indien nu de bitumenlaag gespiegeld wordt in dit grensvlak en het spiegelbeeld tegen de echte laag ‘geplakt’ wordt, dan ontstaat juist de situatie zoals die bij doorverwarming van een vlakke laag (vanaf beide zijden) is behandeld. Dientengevolge kunnen de figuren 3.16 en 3.17 gebruikt worden *mits* voor de laagdikte  $2\delta$  gehanteerd wordt. Nu werd geëist dat de gekoelde bitumen ten hoogste  $25\text{ }^\circ\text{C}$  is. De hoogste temperatuur wordt natuurlijk aangetroffen aan de luchtzijde van de bitumen. Dat is dus in het centrum van de laag inclusief zijn spiegelbeeld. Gebruikmaking van figuur 3.17 levert dan op

$$\frac{T_1 - T_c}{T_1 - T_0} = \frac{20 - 25}{20 - 80} = 0,083 \rightarrow Fo = 0,275 \quad (3.113)$$

of  $at/(2\delta)^2 = 0,275$ . De tijd volgt uit het gegeven dat de bitumen een kwart omwenteling op de wals ligt, derhalve is  $t = 15\text{ s}$ . Hieruit volgt voor de maximale laagdikte:  $\delta_{\max} = 1,6\text{ mm}$ .

5

### **Samenvatting**

Er kan bij de oplossing van instationaire warmtegeleidingsproblemen bij langere tijden gebruik gemaakt worden van twee grafieken waarin de dimensieloze drijvende kracht uitstaat tegen het Fourier-getal. Deze grafieken representeren de exacte oplossing. Daarnaast kan voor de opwarming of afkoeling van een lichaam de techniek van een warmtebalans met constante warmteoverdrachtscoëfficiënt gebruikt worden voor een benaderende oplossing.

### **3.3.7 Intern en extern warmtetransport**

In de vorige paragraaf is steeds aangenomen dat op een gegeven moment ( $t = 0$ ) het oppervlak van het voorwerp op een nieuwe vaste temperatuur werd gebracht. In de praktijk zal echter meestal *niet* het oppervlak op een constante temperatuur worden gebracht. Meestal komt het voorwerp plotseling in een omgeving met een temperatuur die anders is dan die van het voorwerp. Er moet dan ook warmte vanuit de bulk van de omgeving naar het oppervlak van het voorwerp getransporteerd worden (of juist

andersom) alvorens de warmte het voorwerp in (of uit) kan stromen. Er zal dan niet alleen sprake zijn van een inwendige warmteweerstand ( $1/h_i$ ) in het voorwerp, maar ook van een uitwendige warmteweerstand ( $1/h_e$ ) in het omringende medium.

Dit levert analoog aan de behandeling in § 3.2.3 een totale warmteweerstand ( $1/U$ ) op volgens

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_e} = \frac{1}{\text{Nu}_i} \frac{D}{\lambda_i} + \frac{1}{\text{Nu}_e} \frac{D}{\lambda_e} \quad (3.114)$$

Vergelijking (3.114) bouwt voort op vergelijking (3.59). Een belangrijk verschil is dat er nu sprake is van een tijdsafhankelijke situatie wat wel weerspiegeld moet worden door de waarde van  $\text{Nu}_i$ . Met het oog op situaties (later te behandelen) dat het medium rondom het voorwerp niet stilstaat, is ook de uitwendige weerstand in termen van een uitwendig Nusselt getal  $\text{Nu}_e$  uitgedrukt; in geval van een stilstaand extern medium rondom een bolvormig voorwerp wordt gewoonlijk eenvoudigheidshalve  $\text{Nu}_e = 2$  (see § 3.2.2) gebruikt. Ook hier moet weer duidelijk onderscheid gemaakt worden tussen de interne en de externe warmteweerstand, tussen de interne en externe Nusselt-getallen, en tussen de warmtegeleidingscoëfficiënten van de interne en externe media.

Ook bij deze tijdsafhankelijke situaties is het weer niet ongebruikelijk de kleinste van de twee weerstanden (de interne en de externe) te verwaarlozen. Bedenk daarbij wel dat in de eerste fase van een opwarm- of afkoelingsproces de waarde van de inwendige warmteoverdrachtscoëfficiënt even zeer hoog is: zie vergelijking (3.91). In feite is in de gehele eerdere behandeling van tijdsafhankelijke geleiding steeds de uitwendige weerstand tegen warmtetransport verwaarloosd. In het voorbeeld hieronder worden netjes beide warmteweerstanden in acht genomen – resulterend in een langzamere opwarming van het voorwerp dan in de eerdere voorbeelden.

#### Voorbeeld 3.11. De glazen bol IV

De al eerder ten tonele gevoerde bol is aanvankelijk op een temperatuur van  $20^\circ\text{C}$ . Nu stijgt plotseling de omgevingstemperatuur met  $10^\circ\text{C}$ . De warmteoverdrachtscoëfficiënt voor warmtetransport vanuit de bulk van de omgeving naar de bol is  $h_e = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

Hoelang duurt het nu totdat de gemiddelde temperatuur van de bol  $9^\circ\text{C}$  gestegen is?

Bij het oplossen kan nu geen gebruik gemaakt worden van figuur 3.16, want er is ook een uitwendige warmteweerstand. Wel kan een warmtebalans opgesteld worden, geheel analoog aan die van vergelijking (3.108). Nu wordt ‘gewoon’ de randvoorwaarde  $\langle T \rangle = T_0$  op  $t = 0$  gebruikt en wordt er weer gedaan alsof de totale warmteoverdrachtscoëfficiënt  $U$  de gehele opwarmperiode constant is. Dan wordt

voor de gemiddelde temperatuur dus eenzelfde functie als gevonden in vergelijking (3.110):

$$\frac{T_1 - \langle T \rangle}{T_1 - T_0} = \exp\left(-\frac{6U}{\rho c_p D} t\right) \quad (3.115)$$

Het enige dat veranderd is, is dat  $h$  vervangen is door  $U$ . Overigens is dit dus wederom *geen* exacte oplossing (want  $U$  is niet vanaf het begin constant). De totale warmteoverdrachtscoëfficiënt  $U$  volgt uit

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_e} + \frac{1}{h_i} = \frac{1}{h_e} + \frac{1}{\text{Nu}_i} \frac{D}{\lambda_i} \quad (3.116)$$

Nu is, anders dan in de voorgaande bolvoorbeelden (waar alleen de waarde van  $a_{\text{glas}}$  bekend hoefde te zijn), ook  $\lambda_{\text{glas}} = 0,8 \text{ W/mK}$  nodig. Dit levert  $U = 7,3 \text{ W/m}^2\text{K}$  en daarmee wordt de benodigde tijd  $t = 1,9 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 5,3 \text{ uur}$ . Zoals verwacht is dit langer dan in het geval zonder uitwendige warmteweerstand.

⑤

### Samenvatting

Ook in tijdsafhankelijke warmtetransportproblemen moet de inwendige weerstand tegen warmtetransport terdege onderscheiden worden van de uitwendige weerstand. De overall warmteoverdrachtscoëfficiënt  $U$  wordt gevonden uit

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_e}$$

Deze relatie drukt uit dat de totale weerstand de som is van twee deelweerstand: de inwendige en de uitwendige. Dientengevolge zijn er ook twee Nusselt-getallen,  $\text{Nu}_i$  en  $\text{Nu}_e$ , ieder gedefinieerd met de warmtegeleidingscoëfficiënt van het betrokken medium. Wanneer een van de twee deelweerstand (veel) kleiner is dan de andere, mag de kleinste wel verwaarloosd worden.

### 3.3.8 Numerieke aanpak

Ook de instationaire penetratietheorie is numeriek aan te pakken. De vergelijking

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.117)$$

$$\text{met } T(t, 0) = T_1, \quad T(0, x) = T_0, \quad T(t, x \rightarrow \infty) = T_0$$

is wel anders van structuur dan die van de stationaire warmtegeleiding. Door evenwel weer te kijken naar de afleiding van de vergelijking in § 3.3.1, is ook hier eenvoudig de discrete variant van bovenstaande differentiaalvergelijking af te leiden. De half-oneindige plaat wordt ingedeeld in allemaal stripjes met eindige dikte  $\Delta x$ . Beschouw een willekeurig stripje, P, en noem zijn burens west (W) en oost (E). De warmtebalans voor strip P opgesteld over een tijdstapje  $\Delta t$  luidt:

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{T_P(t + \Delta t, x) A \Delta x - T_P(t, x) A \Delta x}{\Delta t} = \\ = -\lambda \frac{T_P - T_W}{\Delta x} A - \left( -\lambda \frac{T_E - T_P}{\Delta x} A \right) \end{aligned} \quad (3.118)$$

De tijd wordt nu ook gediscrètiseerd: de temperatuurverdeling wordt slechts berekend op veelvoudigen van  $\Delta t$  ( $t_i = i \cdot \Delta t$ , met  $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Het is dus voldoende om de tijd aan te geven met een index  $i$ . Daarmee is bovenstaande vergelijking te schrijven als:

$$T_P^{i+1} = T_P^i + \frac{a \Delta t}{\Delta x^2} (T_W^i + T_E^i - 2T_P^i) \quad (3.119)$$

met  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  als voorheen.

In vergelijking (3.94) kunnen we de termen met  $T_P^i$  samennemen:

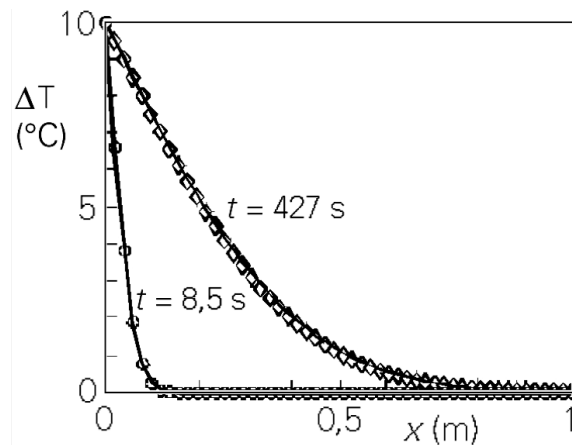
$$T_P^{i+1} = \left( 1 - \frac{2a \Delta t}{\Delta x^2} \right) T_P^i + \frac{a \Delta t}{\Delta x^2} (T_W^i + T_E^i) \quad (3.120)$$

Het superscript slaat op het tijdstip, het subscript op de positie. Oplossen van bovenstaande vergelijking is eenvoudig: voor elke nieuwe tijdstap is slechts informatie van de vorige tijdstap nodig. Wel moet er nog een keuze gemaakt worden voor  $\Delta x$  en  $\Delta t$ . Deze kunnen niet geheel onafhankelijk van elkaar gekozen worden. Het is eenvoudig in te zien dat voor  $\frac{a \Delta t}{\Delta x^2} > \frac{1}{2}$  een negatieve (dus instabiele) koppeling ontstaat tussen

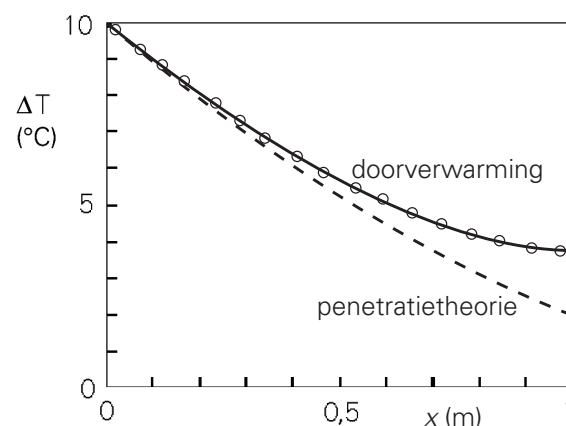
$T_P^{i+1}$  en  $T_P^i$ .

In figuur 3.19 zijn een aantal voorbeelden gegeven van de numerieke oplossing van het penetratietheorie-probleem. Dit is gedaan voor een plak koper ( $a = 1,17 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ) met een dikte  $D = 1 \text{ m}$ . Op tijdstip  $t = 0$  is aan één zijde de temperatuur verhoogd met  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ . Voor de numerieke simulaties moet uiteraard het rekendomein eindig zijn: op de andere rand wordt als randvoorwaarde gebruikt dat het koper daar geïsoleerd is. De penetratietheorie mag gebruikt worden zolang  $\sqrt{\pi a t} < 0,6 D$ . Dit komt overeen met  $t < 980 \text{ s}$ .

In figuur 3.20 zijn numerieke oplossingen gegeven voor twee tijdstippen:  $t = 8,5$  s en  $427$  s, respectievelijk (met  $\Delta x = 0,02$  m en  $\Delta t = 0,85$  s). Tevens zijn de analytische oplossingen (de doorgetrokken lijnen) voor deze twee tijdstippen gegeven. Het is duidelijk dat de numerieke oplossingen zeer goed overeenkomen met de analytische.



Figuur 3.20.



Figuur 3.21.

Uiteraard zijn de numerieke methoden ook goed bruikbaar in het geval van doorverwarming. De temperatuurverdeling van de koperen strip is in figuur 3.21 weergegeven voor  $t = 2654$  s. De getrokken lijn is de 'lange tijden' oplossing van vergelijking (3.99). De cirkeltjes geven de numerieke oplossing weer. De overeenkomst tussen de analytische oplossing en de numerieke is prima. De gestreepte lijn is de oplossing volgens de penetratietheorie. Het is duidelijk dat de penetratietheorie zijn geldigheid hier heeft verloren.

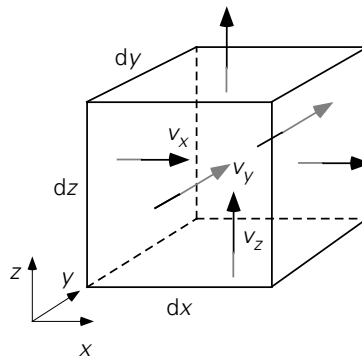
### **Samenvatting**

De behandeling van numerieke methoden is uitgebreid naar tijdsafhankelijke problemen. De discretisatie naar de tijd is uitgelegd en geïllustreerd. De keuze van de tijdstap moet afgestemd worden op de grootte van  $\Delta x$ .

### 3.4 De algemene microbalans voor warmtetransport

In het algemeen zal er niet enkel sprake zijn van zuivere warmtegeleiding. Een vloeistof of een gas kan uiteraard ook convectief warmte transporteren. Bovendien hoeft warmte niet altijd slechts in één richting getransporteerd te worden. In deze paragraaf zal daarom behandeld worden hoe situaties beschreven worden waarin zowel convectie als geleiding een rol spelen. Precies als bij de eenvoudige één-dimensionale warmtegeleidingsgevallen is het uitgangspunt een microbalans over een elementair volumetje ergens in het te beschouwen domein. Om de microbalans zo algemeen mogelijk te laten gelden, worden zo weinig mogelijk aannamen gemaakt. Wel zal eenvoudigheidshalve in een Cartesiaans coördinatenstelsel gewerkt worden.

Beschouw in het driedimensionale domein een fluïdum dat stroomt en waarvan de temperatuur van plaats tot plaats verschillend is. Neem een willekeurig blokje ergens in de stroming tussen  $x$  en  $x + dx$ ,  $y$  en  $y + dy$ , en  $z$  en  $z + dz$  in het fluïdum. Dit is dus het controlevolume met de grootte  $dx dy dz$ . De situatie is geschetst in figuur 3.22.



Figuur 3.22.

Over dit controlevolume kan nu een warmtebalans worden opgesteld. Achtereenvolgens zullen nu de verschillende termen van zo'n warmtebalans besproken worden: de warmte-accumulatieterm die in een balans altijd in het linkerlid staat, de warmtetransporttermen 'in' en 'uit' aan de zes vlakken van het controlevolume, en de warmteproductie. Bij de warmtetransporttermen moet onderscheid gemaakt worden tussen convectie en geleiding. Omdat in principe alle variabelen van tijd en plaats afhangen, zijn alle afgeleiden wel partiële afgeleiden zijn, aangegeven door het partiële-afgeleide symbool  $\partial$ .

#### *Accumulatie*

De instationaire term is



$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u \, dx dy dz) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \, dx dy dz \quad (3.121)$$

waarin de grootte van het controlevolume (=  $dx dy dz$ ) constant, het fluïdum Newtons, en de soortelijke warmte  $c_p$  constant zijn verondersteld, en waarbij de aanname van òf constante druk òf constante dichtheid is gebruikt (see Bird *et al.*<sup>13</sup>).

#### *Convectief transport*

Door het linkzijdvlak stroomt een debiet  $v_x(x,y,z) \, dy dz$  het volumetje binnen met een inwendige energieconcentratie  $\rho c_p T(x,y,z)$  in  $J/m^3$ . Dus convectief komt door dit vlakje binnen:

$$[v_x \rho c_p T]_{x,y,z} \, dy dz \quad (3.122)$$

Door het rechterzijdvlak stroomt echter weer convectief thermische energie het volumetje *uit*. De grootte van deze stroom is uiteraard:

$$[v_x \rho c_p T]_{x+dx,y,z} \, dy dz \quad (3.123)$$

Samen leveren deze twee stromen een nettobijdrage aan convectief transport in de  $x$ -richting (de  $y$ - en  $z$ -subscripten kunnen weg: die hebben ze toch gemeenschappelijk):

$$\begin{aligned} [v_x \rho c_p T]_x \, dy dz - [v_x \rho c_p T]_{x+dx} \, dy dz &= \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho c_p T) \, dx dy dz \end{aligned} \quad (3.124)$$

Geheel analoog leveren de convectieve stromen door het voor- en achtervlak netto op:

$$\begin{aligned} [v_y \rho c_p T]_y \, dx dz - [v_y \rho c_p T]_{y+dy} \, dx dz &= \\ &= - \frac{\partial}{\partial y} (v_y \rho c_p T) \, dx dy dz \end{aligned} \quad (3.125)$$

en door het onder- en bovenvlak:

$$\begin{aligned} [v_z \rho c_p T]_z \, dx dy - [v_z \rho c_p T]_{z+dz} \, dx dy &= \\ &= - \frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho c_p T) \, dx dy dz \end{aligned} \quad (3.126)$$

#### *Moleculair transport*

De moleculaire warmtestroom (geleiding) kan met de wet van Fourier beschreven worden. Door het linkzijdvlak komt via geleiding het controlevolumetje in:

<sup>13</sup> Bird R.B., W.E. Stewart en E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Wiley, 2<sup>nd</sup> Ed., 2002, p. 337

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x,y,z} dydz \quad (3.127)$$

Door het rechterzijvlak gaat er door geleiding weer uit

$$-\lambda \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x+dx,y,z} dydz \quad (3.128)$$

Samenvoegen van deze twee stromen in de  $x$ -richting levert:

$$\begin{aligned} -\lambda \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x,y,z} dydz - \left\{ -\lambda \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x+dx,y,z} \right\} dydz = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (3.129)$$

Het voor- en achtervlak dragen op dezelfde manier bij tot een nettostroom in de  $y$ -richting:

$$\begin{aligned} -\lambda \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{x,y,z} dx dz - \left\{ -\lambda \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{x,y+dy,z} \right\} dx dz = \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (3.130)$$

terwijl in de  $z$ -richting de nettobijdrage gelijk is aan:

$$\begin{aligned} -\lambda \left[ \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{x,y,z} dx dy - \left\{ -\lambda \left[ \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{x,y,z+dz} \right\} dx dy = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (3.131)$$

### *Productie*

Tenslotte is het nog mogelijk dat er warmte in het controlevolumetje geproduceerd wordt. Het is gebruikelijk de productie per volume-eenheid aan te geven met de letter  $q$  (zoals bij chemische reacties ook meestal gewerkt wordt met de omzetting per volume-eenheid). In het controlevolumetje wordt nu dus

$$q dx dy dz \quad (3.132)$$

geproduceerd. In het algemeen is de warmteproductie wel een functie van positie en tijd, dus van  $\{t,x,y,z\}$ .

*De algemene microbalans voor warmtetransport*

Samenvoegen van de accumulatieterm, alle nettostromen (zes stuks) en de productie-term levert nu de warmtebalans voor het controlevolumetje

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} dx dy dz = \\
& - \frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho c_p T) dx dy dz - \frac{\partial}{\partial y} (v_y \rho c_p T) dx dy dz - \frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho c_p T) dx dy dz + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right] dx dy dz + \\
& + q dx dy dz \tag{3.133}
\end{aligned}$$

De methode die hier gebruikt is om de algemene microbalans op te stellen, staat bekend onder de naam ‘*cubic volume element method*’.

Vergelijking (3.133) is te vereenvoudigen door te delen door  $dx dy dz$  en wordt meestal geschreven in een iets andere vorm, namelijk door de convectieve termen naar het linkerlid te verplaatsen:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y \rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho c_p T) = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right] + q \tag{3.134}
\end{aligned}$$

Indien nu de temperatuurverschillen niet te groot zijn, kan gewerkt worden met een constante  $\lambda$  en laat vergelijking (3.134) zich vereenvoudigen tot

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y \rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho c_p T) = \\
& = \lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + q \tag{3.135}
\end{aligned}$$

Vergelijking (3.135) is de algemene vorm voor warmtetransport in een fluïdum indien deze vloeistof voldoet aan de wet van Fourier. Bedenk dat niet alleen de temperatuur  $T$  een onbekende is in deze vergelijking; ook het gehele snelheidsveld  $\{v_x, v_y, v_z\}$  is onbekend en moet dus *eveneens* opgelost worden! In hoofdstuk 5 zal afgeleid worden hoe de algemene balans voor de snelheid (= impulsconcentratie) eruit ziet. Tevens

komt dan aan de orde hoe de balans voor de dichtheid van het fluïdum er in het algemeen uit ziet. Al deze balansen moeten (tegelijk) opgelost worden om het 3-dimensionale temperatuurprofiel in het fluïdum te kunnen bepalen. Daartoe zijn numerieke oplostechieken beschikbaar. Bedenk dat voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen ook altijd begin- en/of randvoorwaarden vereist zijn.

In de praktijk waar veel ingenieurs mee te maken krijgen, zijn de problemen veelal te complex om met deze algemene microbalansen uit te rekenen. Bovendien hoeft lang niet altijd het gehele temperatuurprofiel en het gehele snelheidsveld exact of numeriek opgelost te worden, maar volstaan redelijk nauwkeurige modellen en benaderingen. Daarom zal in de komende paragrafen een andere, meer fenomenologische aanpak gevolgd worden, sterk gericht op het denken in termen van drijvende kracht (oorzaak) en daarmee verbonden stroom (gevolg). Overdrachtscoëfficiënten en dimensieloze kentallen spelen hierin een belangrijke rol.

Voor de praktijk van alledag is het gebruik van kentallen en correlaties daartussen nog steeds de meest geëigende manier. Dat wil overigens niet zeggen, dat zulke correlaties geen theoretische onderbouwing zouden hebben, en dat wil ook niet zeggen dat in de toekomst het gebruik van numerieke oplossingen van de algemene microbalansen in de industriële praktijk niet steeds belangrijker zal worden!

### **Samenvatting**

Met behulp van de cubic volume element method is de algemeen geldige microbalans voor warmtetransport afgeleid. Bij deze analyse is rekening gehouden met de mogelijkheid om zowel convectief als via geleiding warmte te transporteren.

De gevonden microbalans bevat niet alleen het temperatuurveld, maar ook het snelheidsveld en het dichtheidsveld als onbekende functies en is dus niet oplosbaar zonder aanvullende vergelijkingen. Wel bevat deze balans alle gevallen van warmtegeleiding in een fluïdum dat aan de wet van Fourier voldoet.

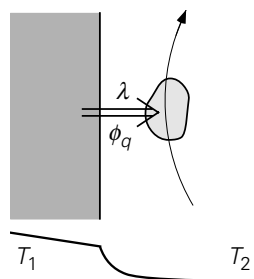
## **3.5 Warmteoverdrachtscoëfficiënten bij convectie**

### **3.5.1 Algemene beschouwingen**

Na de introductie van de algemeen geldige microbalans voor warmtetransport in de vorige paragraaf zullen in de rest van dit hoofdstuk meer specifieke warmteoverdrachtssituaties beschouwd worden. Allereerst zal aandacht besteed worden aan het verschijnsel van warmtetransport van een vaste wand naar een stromend medium (of in de omgekeerde richting). In de praktijk is dit een veel voorkomende situatie.

Denk bijvoorbeeld maar aan een exotherme reactie in een ideaal geroerde tank. De warmte die vrijkomt zal in veel gevallen afgevoerd moeten worden. Dit kan bijvoorbeeld gebeuren door in het vat een koelspiraal te hangen, waardoor koud water stroomt. Om deze installatie goed te kunnen dimensioneren en bedienen is het noodzakelijk om te weten hoeveel warmte het koelwater, onder de verschillende condities die op kunnen treden, zal afvoeren. Zo zal de overdracht van warmte van de tankinhoud naar de wand van de spiraal vast en zeker afhangen van de stromingscondities in de tank. Net zo goed zal de overdracht van warmte van de wand van de spiraal naar het koelwater afhangen van de stromingscondities in de koelspiraal.

Het is dus van belang om nader te analyseren waar warmtetransport van een vaste wand naar een langsstromend medium van afhangt. Breng deze (en soortgelijke) situaties daartoe terug tot het geval van een warme wand waarlangs een koude vloeistof stroomt. Er is sprake van twee mechanismen, die tegelijkertijd optreden. In figuur 3.23 is dit geval geschetst.



Figuur 3.23.

In de eerste plaats is er *warmtegeleiding* loodrecht op de wand nodig om de warmte vanuit de vaste wand overgedragen te krijgen naar de eerste lagen vloeistof. De laag vloeistof direct aan de wand staat immers stil ten opzichte van de wand; uiteraard is er ook geen stroming loodrecht op de wand. Hier kan dus geen warmtetransport door convectie plaatsvinden. Als eenmaal de warmte door geleiding de eerste lagen is binnengedrongen, treedt het tweede mechanisme in werking. Nu hoeft de warmte niet meer alleen verder getransporteerd te worden via geleiding, maar worden de vloeistofpakketjes in de buurt van de wand (die dus warmer zijn dan de bulk van de vloeistof) door het veel krachtiger *convectieve transport* weggevoerd langs de wand en ook wel, in geval van turbulente stroming ten gevolge van het optreden van wervels, loodrecht op de wand; daarmee wordt ook de warmte meegenomen die door geleiding aan de vloeistof was overgedragen. De drijvende kracht voor de geleiding de eerste lagen in blijft daarmee bestaan.

Om nu dit complexe warmteoverdrachtsproces te beschrijven wordt weer gebruik gemaakt van de fenomenologische afkoelingswet van Newton:

$$\phi_q = h A \Delta T \quad (3.136)$$

Het is dus zaak  $h$ - en/of Nusselt-relaties voor de verschillende situaties en geometrieën te vinden. Het betreft dus een uitbreiding van de simpeler gevallen besproken in §3.1.2, §3.2.3 en §3.3.7. Doordat nu de stroming van de vloeistof (of het gas) in rekening moet worden gebracht, wordt de situatie veel complexer dan wanneer uitsluitend geleiding een rol speelt. Een exacte oplossing is langs analytische weg dan ook maar in een klein aantal gevallen mogelijk. Wel kunnen er via de zogenaamde ‘grenslaagtheorie’ benaderende oplossingen worden afgeleid, die overigens door experimenten ondersteund zijn. Het is hiervoor weer wel nodig om zowel de energiebalans als de impuls- en massabalansen voor de stromende vloeistof in ogenschouw te nemen. Hier zal evenwel uitsluitend de fenomenologische benadering in termen van  $h$  en  $Nu$  gevolgd worden.

Eerst zal met behulp van dimensie-analyse nagegaan worden welke dimensieloze groepen een rol kunnen spelen. Op voorhand zal het duidelijk zijn, dat naast  $Nu$  zeker het Reynolds-getal op zal treden, daar er immers sprake is van stroming. De analyse begint met een inventarisatie van de variabelen waarvan de warmteoverdrachts-coëfficiënt  $h$  afhankelijk kan zijn. In het algemeen hangt  $h$  af van:

- $\lambda$  er is geleiding vanaf de wand de vloeistof in (zie figuur 3.17);
- $D, \rho, \langle v \rangle$  hiermee is de massastroom vloeistof, die langs een wand of voorwerp stroomt, te bepalen;
- $x$  de afstand  $x$  vanaf het begin van de buis of vanaf het punt waarop de warmteoverdracht gaat spelen: potentieel van belang bij pijpstroming als de condities in de buurt van de pijpwand nog aan het veranderen zijn;
- $c_p$  bepaalt mede hoeveel warmte de vloeistof kan opnemen en afvoeren (of afstaan)(gr;
- $\mu, \mu_w$  de viscositeit van de bulk van het fluïdum respectievelijk de viscositeit aan de wand: de viscositeit is immers een maat voor de beweeglijkheid van een fluïdum en bepaalt mede op welke afstand van de wand convectie dominant wordt over geleiding; daarnaast is de viscositeit nodig om de stroming te karakteriseren, bv. met  $Re$ , maar met een (groot) temperatuur-verschil tussen vloeistof in de bulk en aan de wand kunnen  $\mu$  en  $\mu_w$  nogal verschillen;
- $\Delta T$  de drijvende kracht achter de warmtestroom van wand naar bulk kan soms de waarde van  $h$  zelf beïnvloeden: namelijk door extra stroming te induceren middels dichtheidsveranderingen;
- $\beta$  de thermische uitzettingscoëfficiënt  $\beta = - (1/\rho) (d\rho/dT)$ : in combinatie met een temperatuurverschil  $\Delta T$  kan er een

dichtheidsverschil in een fluïdum ontstaan waardoor, dankzij de zwaartekracht  $g$ , stroming geïnduceerd kan worden (de zogenaamde vrije convectie);

$g$  de zwaartekrachtsversnelling, alleen van belang bij vrije convectie.

Met andere woorden:

$$h = f(\lambda, D, \rho, \langle v \rangle, x, c_p, \mu, \mu_w, \Delta T, \beta, g) \quad (3.137)$$

Al deze variabelen dienen in een dimensie-analyse meegenomen te worden: 12 variabelen met 4 basiseenheden. Volgens het Buckingham- $\Pi$  theorema spelen dus 8 dimensieloze groepen een rol. Uitvoeren van de dimensie-analyse levert, eventueel na enige herschikking, de volgende groepen:

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}, \text{Br}, \beta \Delta T, \text{Gz}, \text{Gr}, \text{Vi}) \quad (3.138)$$

waarbij Nu staat voor het *Nusselt*-getal, Re voor het *Reynolds*-getal, Pr voor het *Prandtl*-getal, Br voor het *Brinkman*-getal, Gz voor het *Graetz*-getal, Gr voor het *Grashof*-getal, en Vi voor de ‘*viscosity group*’. De verschillende kentallen staan hieronder met hun fysische betekenis:

$$\text{Nu} = \frac{hD}{\lambda} = \frac{\text{werkelijke warmteoverdracht}}{\text{warmteoverdracht door geleiding alleen}}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu} = \frac{v \cdot \rho v}{\mu v / D} = \frac{\text{traagheid}}{\text{wrijving}} \quad (\text{zie } \S 2.2.2)$$

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda} = \frac{v}{a} = \frac{\text{snellheid van moleculair transport van impuls}}{\text{snellheid van moleculair transport van warmte}} \quad (\text{zie } \S 2.2.1)$$

$$\text{Br} = \frac{\mu \langle v \rangle^2}{\lambda \Delta T} = \frac{\mu \frac{\langle v \rangle^2}{D^2} D}{\frac{\lambda}{D} \Delta T} = \frac{\text{warmteproductie door dissipatie}}{\text{warmtetransport door geleiding}}$$

$$\beta \Delta T = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \text{relatieve dichtheidsverschil ten gevolge van } \Delta T$$

$$\text{Gz} = \frac{ax}{\langle v \rangle D^2} = \frac{\text{warmteoverdracht door geleiding}}{\text{warmteoverdracht door convectie}}$$

(ook: een soort Fourier-getal)

$$\text{Gr} = \frac{\beta \Delta T g x^3}{\nu^2} = \frac{\Delta \rho g x}{\rho \langle \nu \rangle^2} \left( \frac{\rho \langle \nu \rangle D}{\mu} \right)^2 \left( \frac{x}{D} \right)^2 = \frac{\text{opwaartse kracht}}{\text{wrijving}}$$

$$\text{Vi} = \frac{\mu}{\mu_w} = \text{maat voor viscositeitsverschillen ten gevolge van } \Delta T$$

Zoals te zien is staan alle kentallen voor verhoudingen van drijvende krachten, transportsnelheden, of transportgrootheden. Ook is te zien dat sommige van de alom gebruikte kentallen eigenlijk samengesteld zijn uit meerdere andere; veelal is dat een kwestie van historisch gegroeide voorkeuren. Niet al deze kentallen spelen te allen tijde een rol. Zo speelt het Grashof-getal (een soort Reynolds-getal voor vrije convectie) geen rol onder condities die volledig gedomineerd worden door gedwongen convectie. Daarom zullen gedwongen en vrije convectie hieronder separaat besproken worden. In dit boek zal verder het Brinkman-getal niet meer ter sprake komen: het speelt voornamelijk een rol bij stromingen van zeer viskeuze polymeren waarbij veel wrijvingswarmte ontwikkeld wordt.

### **Samenvatting**

Bij warmteoverdracht van een vaste wand naar een stromend medium spelen twee mechanismen een rol. Geleiding van warmte loodrecht op de wand door de eerste lagen van de vloeistof, die direct aan de wand grenzen, en convectief transport van warmte parallel aan de wand door de stromende vloeistof (of gas). Dimensie-analyse kan gebruikt worden om te bepalen welke dimensieloze kentallen warmteoverdracht kunnen bepalen. In het algemeen worden dergelijke problemen beheerst door 8 kentallen, maar in de praktijk zijn deze zelden alle acht tegelijk nodig.

## **3.5.2 Warmteoverdracht bij gedwongen convectie**

### **Warmteoverdracht bij gedwongen pijpstroming**

Bij warmteoverdracht van of naar een fluïdum dat *gedwongen*, bijvoorbeeld onder een invloed van een drukverschil, door een buis stroomt, spelen hooguit vijf van de bovengenoemde acht kentallen een rol, nl.

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}, \text{Gz}, \text{Vi}) \quad (3.139)$$

Eén rol van het Reynolds-getal is hier in ieder geval alvast duidelijk: het maakt voor de warmteoverdracht bepaald uit of de stroming door de buis laminair of turbulent is. Bij turbulente stroming transporteren de wervels de warmte immers ook dwars op de hoofdstroomrichting, terwijl bij laminaire stroming enkel geleiding voor transport in die dwarsrichting zorgt. Daarom moet in ieder geval tussen deze twee typen stroming onderscheid gemaakt worden.



In het vervolg worden voor allerlei situaties Nu- relaties gepresenteerd. Daarbij moet allereerst opgemerkt worden dat deze opsomming niet uitputtend is, maar is voor typische gevallen gekozen. Uiteindelijk gaat het er immers om hoe zulke relaties gebruikt worden in warmtebalansen voor het oplossen van warmteoverdrachtsvraagstukken. Verder geldt dat het vaak om empirische correlaties gaat – zie ook de discussie naar aanleiding van vergelijking (2.53) – ofschoon in een aantal gevallen de exponenten van de dimensieloze kentallen ook gevonden worden met behulp van analytische afleidingen of modellen (die te ver voeren voor dit inleidende leerboek).

#### *Laminaire pijpstroming*

Zoals gezegd wordt in laminaire pijpstroming het radiale warmtetransport alleen onderhouden door geleiding binnen en tussen de laagjes (*laminae*) die zo typisch zijn voor laminaire stroming; het radiale snelheidsprofiel bepaalt de snelheid waarmee deze *laminae* over elkaar heen glijden en beïnvloedt dus ook het radiale warmtetransport door geleiding. Dientengevolge vertonen laminaire stromingen radiale temperatuurprofielen. In veel gevallen is men echter niet geïnteresseerd in deze radiale temperatuurprofielen en zal informatie over de gemiddelde temperatuur als functie van de coördinaat  $x$  in de stromingsrichting voldoende zijn. Conceptueel kan de gemiddelde temperatuur  $\langle T(x) \rangle$  verkregen worden door op elke positie  $x$  de vloeistofstroming op te vangen in een beker en de opgevangen vloeistof te mengen; in het Engelse vakjargon wordt  $\langle T(x) \rangle$  daarom wel aangeduid met de term *mixing cup temperature*.

Als een fluïdum met een bepaald debiet een buis instroomt, dan hangt het snelheidsprofiel aan de pijpingang nog in sterke mate af van de voorgeschiedenis, d.w.z. van de situatie stroomopwaarts van de ingang. Vervolgens moet het snelheidsprofiel zich aanpassen aan de omstandigheden van de buisstroming (bv. gekarakteriseerd door het Reynolds-getal). Hierbij is met name de randvoorwaarde aan de pijpwand van belang. Dit zogenaamde inloopstuk waarin het snelheidsprofiel zich nog aan het instellen is, blijft hieronder voor de warmteoverdracht buiten beschouwing.

Volg nu een vloeistofelementje dat – vanaf zeker punt ( $x = 0$ ), waarachter het snelheidsprofiel niet meer verandert – vlak langs de wand stroomt en daarmee warmte uitwisselt. Het blijkt van belang twee situaties te onderscheiden:

a) aanvankelijk geldt:

$$\text{Nu} = 1,08 \text{ Gz}^{-1/3} \quad \text{zolang} \quad \text{Gz} < 0,05 \quad (3.140)$$

Nusselt is alleen een functie van het Graetz-getal Gz (waarin  $x$  voorkomt). Bij nadere beschouwing hoeft dit geen verbazing te wekken, want eigenlijk is het Graetz-getal een Fourier-getal. Immers,  $x/\langle v \rangle$  is een schatting van de tijd die een vloeistofpakketje vanaf bovenbedoeld punt  $x = 0$  (gemiddeld) nodig heeft om

positie  $x$  in de buis te bereiken. Vervangen van  $x/\langle v \rangle$  door  $t$  in het Graetz-getal levert inderdaad  $Fo$  op. Daarmee is  $x/\langle v \rangle$  dus een maat voor de tijd die zo'n pakketje aan die nieuwe condities blootgesteld is.

Eigenlijk doet dit denken aan penetratietheorie: voor korte tijden dringt de warmte het vloeistofelementje binnen vanaf de buiswand en het fluïdum aan de wand warmt dus op of koelt af, terwijl de bulk van het fluïdum nog niets merkt. Daardoor verandert het radiale temperatuurprofiel ook nog volop (zoals dat bij penetratietheorie voor korte tijden altijd gebeurt). Merk op dat, zoals uitgedrukt door de negatieve exponent van  $Gz$ , de warmteoverdracht en dus ook  $Nu$  afnemen met  $x$  – geheel vergelijkbaar met vergelijking (3.93).

Vergelijking (3.140) is via integratie met betrekking tot  $x$  om te schrijven naar het gemiddelde Nusselt-getal voor de afstand  $L$  (gemeten vanaf  $x = 0$ ). Het resultaat is

$$\langle Nu \rangle = 1,62 \left( \frac{aL}{\langle v \rangle D^2} \right)^{-1/3} \quad \text{mits} \quad \frac{aL}{\langle v \rangle D^2} < 0,05 \quad (3.141)$$

Overigens wordt deze laatste relatie ook wel geschreven als

$$\langle Nu \rangle = 1,62 \text{Re}^{1/3} \text{Pr}^{1/3} \left( \frac{L}{D} \right)^{-1/3} \quad \text{mits} \quad \frac{aL}{\langle v \rangle D^2} < 0,05 \quad (3.142)$$

- b) Op grotere afstand vanaf  $x = 0$  zal er weer sprake zijn van een soort doorverwarming waarbij de vorm van het radiale temperatuurprofiel niet meer verandert (zoals bij doorverwarming van een vast lichaam: zie figuur 3.16), en  $h$  en dus ook  $Nu$  constant worden (dat wil zeggen: geen functie meer zijn van de tijd  $x/\langle v \rangle$ ). Deze verwachting is juist: er geldt

$$Nu = 3,66 \quad \text{mits} \quad Gz > 0,1 \quad (3.143)$$

Kennelijk heeft het Graetz-getal de rol van het Fourier-getal overgenomen bij het bepalen van de vraag wanneer  $Nu$  constant is. Het traject  $x < 0,05 \cdot (\langle v \rangle D^2 / a)$  wordt wel het thermische inloopgebied genoemd; indien  $x > 0,1 \cdot (\langle v \rangle D^2 / a)$  spreekt men van thermisch ingesteld.

#### *Turbulente pijpstroming*

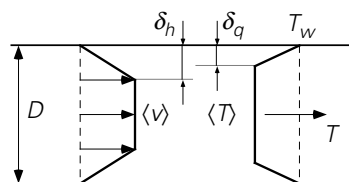
Zoals gezegd is bij turbulente buisstroming de warmteoverdracht naar de bulk van de vloeistof door de aanwezigheid van wervels veel effectiever. De wervels kunnen echter nooit tot vlak bij de buiswand doordringen: zij lopen stuk op de viscositeit. Derhalve zal er vlak bij de wand altijd sprake zijn van een dun, grotendeels laminair stromend grenslaagje zonder wervels, een '*film*'. De dikte van deze film hangt sterk af van de turbulentie-intensiteit van het fluïdum. Aangezien de turbulente wervels

buiten deze film veel effectiever impuls transporteren dan de moleculen in de ‘film’, wordt de snelheidsgradiënt vaak geconcentreerd gedacht in de film. De weerstand tegen warmtetransport wordt om dezelfde reden ook vaak aan zo’n film toegedicht.

Het in figuur 3.24 geschetste temperatuurprofiel is met dit beeld in overeenstemming: de temperatuurgradiënt is erg steil aan de wand en ongeveer nul in de bulk van het fluïdum. In feite ziet het profiel eruit als bij instationaire warmtegeleiding (bij korte tijden: zie figuur 3.13); de convectie voorkomt evenwel dat de penetratiediepte in de tijd kan toenemen. Er is sprake van competitie tussen aanvoer en afvoer van warmte, waarbij de turbulente stroming de afvoer voor zijn rekening neemt. Deze competitie tussen aanvoer en afvoer bepaalt de dikte van de film.

Het werken met een grenslaag of film waarin de hele gradiënt geconcentreerd wordt gedacht (en waarbuiten het transport geheel door wervels wordt verzorgd), is een veel gebruikt beeld en staat bekend onder de naam *filmtheorie*. Bij het gebruik van de filmtheorie wordt verondersteld, dat het profiel in de film steeds een rechte lijn is (zelfs als het gehele gebeuren instationair is: dit veronderstelt dan weer dat de film zich steeds zeer snel aan veranderingen kan aanpassen). Dit beeld van een film langs de wand wordt zowel voor de impulshuishouding als voor het warmtetransport gebruikt.

Strikt genomen hoeven de *hydraulische filmdikte*  $\delta_h$  voor impulstransport en *thermische filmdikte*  $\delta_q$  voor warmtetransport ook niet aan elkaar gelijk te zijn: in de praktijk blijken de twee filmdiktes zich te verhouden als  $Pr^{1/3}$ , mits  $Pr \geq 1$ . In figuur 3.24 zijn beide filmdiktes schematisch weergegeven. Uiteraard geldt (anders dan in de figuur geschetst) dat zowel  $\delta_q \ll D$  als  $\delta_h \ll D$ . Dat  $Pr$  hier opduikt, behoeft geen verbazing te wekken: de dikte  $\delta_h$  mag verwacht worden af te hangen van  $\nu$ , terwijl  $a$  de dikte  $\delta_q$  in sterke mate zal bepalen.



*Figuur 3.24.*

Met het oog op de modellering van warmteoverdracht aan een wand onder de conditie van turbulent stroming parallel aan die wand wordt zo het gehele temperatuurprofiel geschematiseerd: de bulk van de vloeistof is (ten gevolge van de activiteit van de wervels) op een uniforme temperatuur, terwijl het verloop van de temperatuur van de bulkwaarde naar de wandwaarde een rechte lijn is. De warmteflux is dan te modelleren als:

$$\phi_q'' = \lambda \frac{T_w - \langle T \rangle}{\delta_q} \quad (3.144)$$

De weerstand voor warmtetransport zit dan dus geheel in de film; dit wordt ook uitgedrukt in de relatie

$$h = \frac{\lambda}{\delta_q} \quad (3.145)$$

voor de warmteoverdrachtscoëfficiënt. (Overigens lijkt uitdrukking (3.144) sterk op vergelijking (3.78) en past uitdrukking (3.145) prima bij de  $h$ -waarden in de tabel van § 3.2.) In feite is nu het probleem verlegd naar het vinden van de juiste uitdrukking voor  $\delta_q$ , die er voor zorgt dat vergelijking (3.144) inderdaad de warmteflux juist weergeeft. Bedenk dat bovenstaande een schematisering is van de werkelijkheid: de temperatuur- en snelheidsprofielen zijn niet echt vlak en noch  $\delta_q$  noch  $\delta_h$  is scherp gedefinieerd; bovendien hangen de dikten  $\delta_q$  en  $\delta_h$  af van de mate van turbulentie in de bulk van de stroming (dus van het Reynolds-getal).

Voor berekeningen aan warmteoverdracht bij turbulente stroming door pijpen zijn meerdere uitdrukkingen voor het Nusselt-getal beschikbaar. Een van de meest gebruikte is

$$\text{Nu} = 0,027 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{1/3} \quad \text{mits } \text{Re} > 10^4 \quad \text{en} \quad \text{Pr} \geq 0,7 \quad (3.146)$$

waarin de factor  $\text{Pr}^{1/3}$  staat voor de filmdikteverhouding  $\delta_h/\delta_q$ . Ook bij turbulente buisstromingen behoort een inloopgebied  $L_t$  dat overigens korter is dan bij laminaire stroming. Voor de daardoor hogere, over  $L_t$  gemiddelde warmteoverdrachtscoëfficiënt  $L_t$  kan gecorrigeerd worden en wel met de factor  $\{1 + (D/L_t)^{0,7}\}$ .

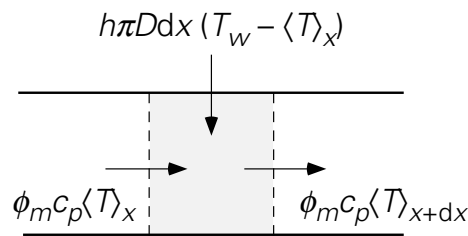
**Voorbeeld 3.12.** *Opwarming van water stromend door een buis*

Een waterstroom van 1 kg/s stroomt door een buis (lengte  $L = 5$  m, diameter  $D = 2$  cm). De vloeistof komt de buis binnen met een temperatuur van 20 °C, terwijl de temperatuur van de buiswand 40 °C bedraagt. De toestand is stationair.

Wat is de gemiddelde temperatuur van de uitstromende vloeistof?

Allereerst moet bepaald worden of er sprake is van laminaire danwel van turbulente stroming. Hiertoe moet eerst de snelheid berekend worden. Deze volgt uiteraard uit  $\phi_m = \frac{\pi}{4} D^2 \rho \langle v \rangle$ , zodat  $\langle v \rangle = 3,2$  m/s. Het Reynolds-getal is daarmee  $\text{Re} = 6,4 \cdot 10^4$ , en de stroming is dus duidelijk turbulent. Na bovenstaande uitleg over het filmmodel en de bulkmenging voor het geval van turbulente stroming is de vraag naar de gemiddelde temperatuur (als functie van  $x$ ) hier een heel vanzelf-sprekende. Het Prandtl-getal voor water (bijvoorbeeld bij 30 °C) is  $\text{Pr} = 5,45$ . Daarmee is Nu-relatie (3.120) te gebruiken.

Om nu de gemiddelde temperatuur aan het uiteinde te bepalen moet de vraag beantwoord worden hoeveel warmte door het water onderweg wordt opgenomen. Aangezien het water opwarmt, is de drijvende kracht  $\Delta T$  plaatsafhankelijk. Dus moet het temperatuurprofiel uitgerekend worden. Dit kan uitgaande van een warmtebalans over een klein plakje uit de buis tussen  $x$  en  $x + dx$  (zie figuur 3.25).



Figuur 3.25.

De (stationaire) warmtebalans over dit plakje luidt dan

$$0 = \frac{\pi}{4} D^2 \rho \langle v \rangle c_p \langle T \rangle \Big|_x - \frac{\pi}{4} D^2 \rho \langle v \rangle c_p \langle T \rangle \Big|_{x+dx} + h \pi D dx (T_w - \langle T \rangle) \quad (3.147)$$

De bijbehorende randvoorwaarde is:  $x = 0 \rightarrow \langle T \rangle = T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Dit geeft voor het temperatuurprofiel:

$$\ln \frac{T_w - \langle T \rangle}{T_w - T_0} = - \frac{4h}{\rho \langle v \rangle c_p D} x \quad (3.148)$$

De warmteoverdrachtscoëfficiënt  $h$  is te berekenen uit vergelijking (3.146):

$$h = \text{Nu} \frac{\lambda}{D} = 0,027 \frac{\lambda}{D} \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{1/3} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2\text{K} \quad (3.149)$$

De gemiddelde temperatuur aan het uiteinde van de buis is daarmee  $29,5 \text{ }^\circ\text{C}$ . Bij deze berekening kan nog opgemerkt worden dat  $h$  strikt genomen niet constant is: omdat  $T$  langs de buis verandert, is  $\text{Pr}$  niet constant, daarmee  $h$  ook niet, en feitelijk dient deze  $x$ -afhankelijkheid bij de integratie te worden meegenomen. Dit is evenwel een zeer secundair effect dat doorgaans verwaarloosd kan worden (dit dient numeriek geverifieerd te worden). Hetzelfde geldt voor  $\rho$  en  $c_p$  die in het algemeen (in geringe mate) van de temperatuur afhangen.

### Warmteoverdracht bij gedwongen omstroming van lichamen

#### *Vlakke plaat*

Langs een vlakke plaat die parallel aan de stroming in de  $x$ -richting in een vloeistof ligt, bouwt zich, zoals al eerder besproken bij de introductie van het begrip *wrijvingsweerstand* (zie figuur 2.15 in § 2.3.1), een laminaire hydrodynamische grenslaag van toenemende dikte  $\delta_h(x)$  op, waarbinnen de snelheid afneemt van de ongestoorde snelheid  $v$  juist op de rand  $y = \delta_h(x)$  van de grenslaag tot nul (stilstaande vloeistof) vlak aan de wand ( $y = 0$ ). Analoog aan de beschrijving bij turbulente buisstroming is er in het geval van warmteoverdracht van/naar de wand ook hier weer een thermische grenslaag met dikte  $\delta_q(x)$ , die weer niet noodzakelijkerwijs even dik is als de hydrodynamische grenslaag. Dientengevolge zal de lokale weerstand voor warmteoverdracht sterk afhangen van de lokale dikte  $\delta_q(x)$ . Berekeningen met behulp van laminaire grenslaagtheorie (ondersteund door experimenten) leveren voor de lokale waarde van het Nusselt-getal

$$\begin{aligned} \text{Nu}_x &= \frac{hx}{\lambda} = 0,332 \left( \frac{\rho v x}{\mu} \right)^{1/2} \left( \frac{v}{a} \right)^{1/3} = \\ &= 0,332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad \text{mits } \text{Re}_x < 3 \cdot 10^5 \end{aligned} \quad (3.150)$$

Merk op, dat zowel  $\text{Nu}$  als  $\text{Re}$  hier gedefinieerd zijn met behulp van de afstand  $x$  van het punt dat bekeken wordt, tot het begin van de plaat. Achtergrond hiervan is dat er geen andere lengteschaal voorhanden is en dat de grenslaagdikte  $\delta_q$  (die dus als een rechtstreekse maat voor de weerstand voor warmteoverdracht te beschouwen is) trouwens een functie van  $x$  is. De restrictie  $\text{Re} < 3 \cdot 10^5$  is nodig, omdat voor grotere waarden van  $\text{Re}$  de grenslaag turbulent wordt.

#### *Bol*

Bij de bepaling van de weerstandscoefficiënt voor omstroming van bollen, is ook al gesproken over de grenslaag die zich bij de omstroming van de bol opbouwt, en over het zog dat zich aan de achterzijde van de bol vormt. Het zogenaamde ‘dode water’ dat zich hierin bevindt, draagt slechts in beperkte mate bij aan de warmteoverdracht. Het wordt lang niet zo vaak ‘ververst’ als het water dat aan de voorzijde langs de bol stroomt. Een veel gebruikte  $\text{Nu}$ -relatie voor convectieve warmteoverdracht aan bollen is

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= 2,0 + 0,66 \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \\ &\quad \text{mits } 10 < \text{Re} < 10^4 \text{ en } \text{Pr} \geq 0,7 \end{aligned} \quad (3.151)$$

In de eerste term aan de rechterzijde kan de bijdrage van zuivere geleiding aan de warmteoverdracht herkend worden (zie § 3.2.2). De tweede term rechts is de

verhoging van de warmteoverdracht ten gevolge van de omstroming van de bol (convectie).

*Cilinder: lang en dwars aangestroomd*

Voor de dwars aangestroomde, lange cilinder geldt een vergelijkbaar verhaal. Hiervoor geldt

$$\text{Nu} = 0,57 \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad \text{mits } 10 < \text{Re} < 10^4 \text{ en } \text{Pr} \geq 0,7 \quad (3.152)$$

**Voorbeeld 3.13.** *Afkoelen van vallende korreltjes*

Ronde koperen bolletjes met diameter  $D = 3 \text{ mm}$ ,  $\rho = 9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  en  $c_p = 386 \text{ J/kgK}$  moeten afgekoeld worden van  $80 \text{ }^\circ\text{C}$  tot een gemiddelde temperatuur van  $35 \text{ }^\circ\text{C}$ . Dit gebeurt door de bolletjes door water van  $30 \text{ }^\circ\text{C}$  te laten vallen. De valsnelheid  $v$  is  $0,88 \text{ m/s}$ . De weerstand voor warmtetransport ligt geheel in het water. Aangenomen mag worden dat het water niet noemenswaardig opwarmt. Hoe hoog moet de kolom zijn waardoor de bolletjes vallen?

Om de afkoeling te kunnen berekenen moet een warmtebalans opgesteld worden over een heel bolletje. Daar gegeven is dat de warmteweerstand geheel in het water ligt, mag ervan uitgegaan worden dat een bolletje praktisch op uniforme temperatuur  $T$  is (metaal geleidt warmte uitstekend). De balans luidt ( $T_w$  is de temperatuur van het water)

$$\frac{d\left(\frac{\pi}{6} D^3 \rho c_p T\right)}{dt} = -h \pi D^2 (T - T_w) \quad (3.153)$$

De randvoorwaarde die hierbij hoort is:  $t = 0 \rightarrow T = T_0 = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ . De oplossing is daarmee (mits  $h$  constant is in de tijd):

$$\ln \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = -\frac{6h}{\rho c_p D} t = -\frac{6hx}{\rho c_p D v} \quad (3.154)$$

Hier is bij de tweede gelijkheid van vergelijking (3.154) de tijd vervangen door de afgelegde weg gedeeld door de snelheid van een bolletje.

De warmteoverdrachtscoëfficiënt  $h$  volgt nu uit een Nu-relatie voor de omstroming van een bol. Op basis van de stofconstanten van water volgt  $\text{Re} = 2650$  en  $\text{Pr} = 5,45$ . Daarom is gebruik van Nu-relatie (3.151) toegestaan. Dit levert  $\text{Nu} = 61,8$  en dus  $h = \text{Nu} \lambda_w / D = 1,24 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2\text{K}$  (met  $\lambda_w = 0,60 \text{ W/mK}$ ). De gegevens invullen in vergelijking (3.154) geeft dat de kolom minimaal een lengte van  $28 \text{ cm}$  moet hebben.

### Warmteoverdracht met viscositeitsverschillen

In vergelijking (3.138) is bij de algemene bespreking van de warmteoverdracht en van de Nu-afhankelijkheid van de overige dimensieloze groepen ook de *viscosity group*  $Vi$  genoemd. Met dit kental kan in rekening gebracht worden dat er door de warmteoverdracht een temperatuurgradiënt loodrecht op de wand ontstaan is, die op haar beurt weer zorgt voor een gradiënt in de viscositeit. Bij turbulente buisstroming en omstroming van lichamen neemt men daarom  $Vi^{0,14}$  op aan de rechterzijde van de Nu-relaties. Zo wordt vergelijking (3.146) dan

$$Nu = 0,027 Re^{0,8} Pr^{1/3} Vi^{0,14} \quad (3.155)$$

Deze correctie met  $Vi$  wordt wel de *Sieder & Tate-correctie* genoemd.

### 3.5.3 Warmteoverdracht bij vrije convectie

In § 3.5.1 is via dimensie-analyse afgeleid dat in het algemeen Nu afhangt van zeven andere dimensieloze groepen. Een daarvan was het Grashof-getal Gr dat niet nodig is bij het beschrijven van gedwongen convectie. Het Grashof-getal brengt immers in rekening dat ten gevolge van lokale opwarming of afkoeling er een dichtheidsverschil in een fluïdum kan ontstaan. Onder invloed van de zwaartekracht kan dit dichtheidsverschil aanleiding geven tot stroming: zogenaamde *vrije convectie*. Deze vrije convectie is alleen van belang als er al niet ten gevolge van drukverschillen een behoorlijke gedwongen stroming aanwezig was.

Een van de bekendste voorbeelden van vrije convectie is de opstijgende lucht langs en boven de radiator van een verwarming. De warme radiator geeft zijn warmte af aan de luchtlaag die aan de radiator grenst (via geleiding). Deze opgewarmde lucht zet uiteraard iets uit en heeft daarmee dan een lagere dichtheid dan de lucht in de rest van de ruimte. De warme lucht zal opstijgen en de ‘vrijgekomen plaats’ wordt ingenomen door koelere lucht, die vervolgens op zijn beurt weer opwarmt. Door deze vrije convectie is uiteraard het warmtetransport weer veel effectiever dan wanneer dezelfde hoeveelheid warmte via zuivere geleiding getransporteerd moest worden. Merk op, dat Gr ook gedefinieerd kan worden met behulp van het dichtheidsverschil in plaats van met het temperatuurverschil; immers,

$$\beta \Delta T = \beta (T_w - T_\infty) = \frac{\rho_\infty - \rho_w}{\langle \rho \rangle} \quad (3.156)$$

In bovenstaande uitdrukking is  $\langle \rho \rangle$  berekend bij  $\langle T \rangle = \frac{1}{2}(T_w + T_\infty)$ , d.w.z. bij een gemiddelde conditie. Daarmee wordt Gr dan

$$Gr = \frac{\beta \Delta T g x^3}{\nu^2} = \frac{x^3 g \Delta \rho}{\nu^2 \langle \rho \rangle} \quad (3.157)$$

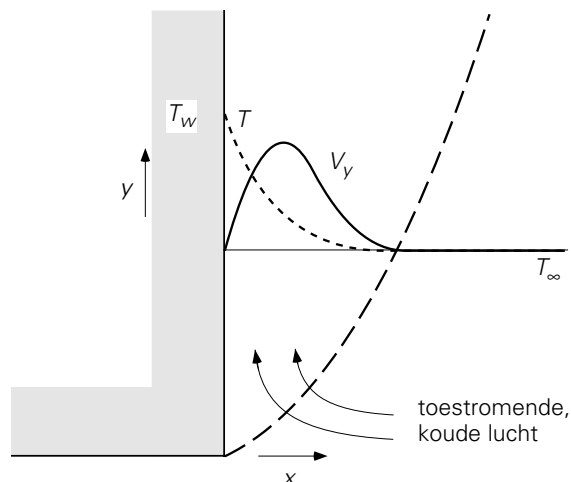


Welke de lengteschaal (hier  $x$  genoemd) is die in dit Grashof-getal gebruikt moet worden, hangt van de beschouwde geometrie af.

Er zijn drie situaties die nader bekeken zullen worden: vrije convectie langs een verticale plaat, vrije convectie boven een horizontaal vlak, en vrije convectie tussen twee grote horizontale platen.

### Verticale plaat

Beschouw een verticale plaat die een (vaste, uniforme) temperatuur  $T_w$  heeft die hoger is dan de temperatuur  $T_\infty$  van de lucht ver weg van de plaat. Op grote afstand van de plaat staat de lucht stil. De situatie is in figuur 3.26 geschetst.



Figuur 3.26.

In eerste instantie wordt de luchtlaag die direct aan de plaat grenst, opgewarmd en zal dus 'uitzetten'. Deze lucht zal derhalve opstijgen en vervangen worden door koudere lucht. Langs de plaat zal zich aldus een snelheidsprofiel ontwikkelen, zoals dat ook gebeurt bijvoorbeeld bij gedwongen stroming langs een vlakke plaat (zie figuur 2.15). Tegelijkertijd stelt zich ook een temperatuurprofiel in. Beide zijn geschetst in figuur 3.26. Ook hier geldt weer dat de snelheidsgrenslaag en de temperatuurgrenslaag niet even dik behoeven te zijn (zie de discussie in § 3.5.2).

Omdat het snelheidsprofiel en het temperatuurprofiel zich langs de plaat ontwikkelen, is de warmteoverdrachtscoëfficiënt  $h$  een functie van  $y$  en dus verschillend van plaats tot plaats. Hoe groter de  $y$ -coördinaat, hoe dikker de grenslaag wordt en dus hoe kleiner de lokale  $h$  daar is.

Voor een verticale plaat met een hoogte  $L$  blijkt de gemiddelde warmtetransportcoëfficiënt  $\langle h \rangle$  geschreven te kunnen worden als:

$$\frac{\langle h \rangle L}{\lambda} = f \left( \frac{L^3 g \beta |T_w - T_\infty|}{\alpha \nu} \right) \quad (3.158)$$

Met behulp van de eerder behandelde dimensieloze groepen is dit te schrijven als:

$$\langle \text{Nu} \rangle = f(\text{Gr} \cdot \text{Pr}) \quad (3.159)$$

Om de vorm van de functie  $f$  te kunnen specificeren moet weer onderscheid gemaakt worden tussen *laminaire* en *turbulente* condities. In tegenstelling tot de situatie bij gedwongen convectie kan bij vrije convectie de stroming niet gekarakteriseerd worden via een Reynolds-getal. De reden hiervoor is dat bij vrije convectie er niet op voorhand een karakteristieke snelheid bekend is. Het is hier zo dat het onderscheid tussen laminair en turbulent gemaakt kan worden op basis van het product  $\text{Gr} \cdot \text{Pr}$ .

Recent onderzoek leverde de volgende relaties op voor  $\langle \text{Nu} \rangle$  (die enigszins afwijken van de relaties uit de Transport Phenomena Data Companion):

*Laminair*

$$\langle \text{Nu} \rangle = 0,52 (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{1/4} \quad \text{mits } 10^4 < \text{Gr} \cdot \text{Pr} < 10^8 \quad (3.160)$$

*Turbulent*

$$\langle \text{Nu} \rangle = 0,12 (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{1/3} \quad \text{mits } \text{Gr} \cdot \text{Pr} > 10^8 \quad (3.161)$$

Hierbij kan opgemerkt worden dat onder laminaire stromingscondities  $\langle h \rangle$  wel degelijk een functie van de hoogte  $L$  is (als gevolg van de ontwikkeling van de laminaire grenslaag langs de plaat), terwijl bij turbulente stromingen  $\langle h \rangle$  niet van de hoogte  $L$  afhangt (omdat de warmteoverdracht dan beheerst wordt door de turbulente wervels waarvan de grootte niets met  $L$  te maken heeft).

#### **Eén horizontale buis**

Laminaire vrije convectie vanaf/rond een horizontale cilindrische buis kan in een goede benadering beschreven worden met vergelijking (3.160) waarin voor de hoogte  $L$  nu de pijpdiameter wordt gekozen.

#### **Eén horizontale plaat**

Ook boven of onder een horizontale plaat kan ten gevolge van warmteoverdracht vrije convectie optreden (bv. boven een kookplaat of een vuur). Deze vrije convectie kan zich hier niet ontwikkelen tot een aangroeiende grenslaag, maar zal hier leiden tot 'uitbarstingen' ('bursts') die zich losmaken van de plaat en opstijgen dan wel naar beneden zakken. De daardoor optredende turbulente wervelingen bevorderen de warmteafvoer aanzienlijk. Ook hier mag op grond van dit beeld niet verwacht worden dat  $\langle h \rangle$  afhangt van de afmeting  $L$  van de plaat. In overeenstemming hiermee is gevonden dat

$$\langle \text{Nu} \rangle = 0,17 (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{1/3} \quad \text{mits } \text{Gr} \cdot \text{Pr} > 10^8 \quad (3.162)$$

**Twee horizontale platen**

Beschouw nu het warmtetransport door een fluïdum dat zich tussen twee zeer grote, horizontaal opgestelde platen bevindt. De afstand tussen de platen is  $D$ . Indien de temperatuur van de bovenste plaat hoger is dan die van de onderste plaat, wordt in de regel een stabiele situatie gecreëerd (water rond  $T = 4\text{ °C}$  vormt hierop een uitzondering). Er treedt dan geen vrije convectie op en warmtetransport vindt plaats via geleiding. Is echter de bovenste plaat de koudste en de onderste plaat de warmste, dan kan er vrije convectie tussen de platen optreden. Ook nu weer wordt het onderscheid tussen de diverse stromingsregimes gemaakt op basis van  $\text{Gr} \cdot \text{Pr}$ . De lengteschaal die hier in  $\text{Gr}$  gebruikt moet worden, is de platafstand  $D$ .

*Nauwelijks vrije convectie*

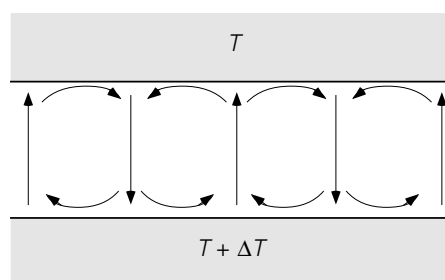
Indien  $\text{Gr} \cdot \text{Pr} < 1800$  is de stroming zo gering dat het warmtetransport praktisch geheel door geleiding verzorgd wordt:

$$\langle \text{Nu} \rangle = 1 \quad \text{mits } \text{Gr} \cdot \text{Pr} < 1800 \quad (3.163)$$

*Laminair*

$$\langle \text{Nu} \rangle = 0,15 (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{1/4} \quad \text{mits } 10^4 < \text{Gr} \cdot \text{Pr} < 10^7 \quad (3.164)$$

In dit gebied treedt een bijzonder verschijnsel op: de stroming vindt plaats in een patroon van kleine cellen, die naast elkaar de hele ruimte tussen de platen opvullen. De hoogte van de cellen is gelijk aan de afstand tussen de platen, terwijl de afmetingen in horizontale richting hieraan ongeveer gelijk zijn. Dit patroon staat bekend onder de naam *Bénard-cellen* en is in figuur 3.27 geschetst.



Figuur 3.27.

*Turbulent*

$$\langle \text{Nu} \rangle = 0,17 (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{1/3} \quad \text{mits } \text{Gr} \cdot \text{Pr} > 10^7 \quad (3.165)$$

De mooie, stationaire structuur van de Bénard-cellen is nu uiteraard verdwenen: de turbulente wervels vereffen de snelheids- en temperatuurverschillen danig, maar maken de stromingsstructuren tijdsafhankelijk en complex.

**Voorbeeld 3.14.** Warmtetransport tussen twee horizontale platen

Beschouw twee grote, horizontaal opgestelde platen op een onderlinge afstand  $D$  van 4 cm. De tussenruimte is gevuld met lucht (de druk is 1 bar). Beschouw de twee volgende situaties:

- de bovenste plaat heeft een temperatuur van 40 °C, de onderste van 20 °C;
- de onderste plaat heeft een temperatuur van 40 °C, de bovenste van 20 °C.

Gevraagd wordt om voor beide stationaire situaties de warmteflux te bepalen.

*Oplossing situatie a:*

Hier is geen sprake van vrije convectie: de warmste laag met de geringste dichtheid ligt boven. Dus wordt het warmtetransport bepaald door geleiding in de lucht en geldt  $Nu = 1$ . De warmteflux volgt nu uit

$$\phi_q'' = h \Delta T = \frac{Nu \lambda}{D} \Delta T = \frac{1 \cdot 0,026}{0,04} 20 = 13 \text{ W/m}^2 \quad (3.166)$$

*Oplossing situatie b:*

Nu kan er wel sprake zijn van vrije convectie. Om de condities af te schatten dient eerst  $Gr \cdot Pr$  uitgerekend te worden. De uitzettingscoëfficiënt  $\beta$  kan geschat worden met behulp van de ideale gaswet:

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{V} \frac{nR}{p} = \frac{1}{T} \quad (3.167)$$

Daarmee volgt voor  $Gr \cdot Pr$

$$Gr \cdot Pr = \frac{D^3 g}{\nu^2} \frac{\Delta T}{\langle T \rangle} \frac{\nu}{a} = 1,2 \cdot 10^5 \quad (3.168)$$

en dus is hier sprake van laminaire vrije convectie. Voor  $Nu$  volgt dan

$$\langle Nu \rangle = 0,15 (Gr \cdot Pr)^{1/4} = 2,79 \quad (3.169)$$

en daarmee volgt dan een grotere warmteflux dan bij geval  $a$ , nl.:

$$\phi_q'' = h \Delta T = \frac{Nu \cdot \lambda}{D} \Delta T = 36 \text{ W/m}^2 \quad (3.170)$$

⑤

**Samenvatting**

Indien er stroming ontstaat ten gevolge van dichtheidsverschillen, die veroorzaakt worden door temperatuurverschillen in een fluïdum, heet dat vrije convectie. Dit type stroming resulteert in een groter warmtetransport dan met geleiding alleen. Er kan onderscheid gemaakt worden tussen laminaire en turbulente vrije convectie. In het

geval van vrije convectie worden de regimes geclassificeerd met behulp van  $Gr \cdot Pr$  in plaats van met een Reynolds-getal. In elk regime is het Nusselt-getal een eenvoudige functie van  $Gr \cdot Pr$ . Dit geldt voor een aantal elementaire geometrieën.

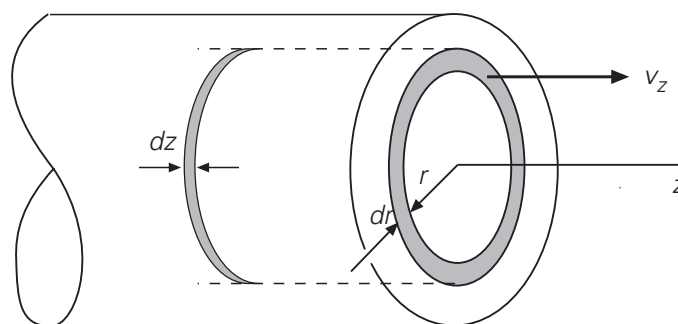
### 3.5.4 De numeriek aanpak van convectief warmtetransport

Een numerieke aanpak van warmtetransport van en naar de wand van een buis, waardoor een vloeistof laminair stroomt, is gecompliceerder dan de eerdere voorbeelden in § 3.1.5 en § 3.3.8 die slechts geleiding als transportmechanisme kenden. Nu moeten we ook convectief transport in ogenschouw nemen. Het warmtetransport wordt nog steeds beschreven door de warmtebalans. Doordat het medium nu stroomt, moeten we ook kennis hebben van het stromingsveld. Voor laminaire stroming (van een Newtonse vloeistof) in een rechte, cilindervormige buis is een exacte oplossing van het snelheidsveld bekend (zie hoofdstuk 5). De snelheid van een vloeistofelementje in de buis is parallel gericht aan de as van de buis en slechts afhankelijk van de radiële positie in de buis:

$$\frac{v_z(r)}{\langle v \rangle} = 2 \left( 1 - \left[ \frac{r}{R} \right]^2 \right) \quad (3.171)$$

waarbij  $\langle v \rangle$  de gemiddelde snelheid van de vloeistof,  $R$  de straal van de buis,  $r$  de radiële coördinaat en  $z$  de axiale coördinaat is.

In de numerieke analyse van het warmtetransport gebruiken we de symmetrie in het probleem. De elementaire volumetjes, waarin we het domein opdelen, zijn nu ringvormig, met straal tussen  $\{r, r+\Delta r\}$  en positie tussen  $\{z, z+\Delta z\}$ . Voor een stationaire situatie kunnen we weer een willekeurig elementje met zijn naaste burens beschouwen, zie figuur 3.28.



Figuur 3.28.

Hierbij is ‘west-oost’ de stromingsrichting van de vloeistof, terwijl de richting ‘zuid-noord’ van de cilinderas naar de pijp wand is. We moeten nu dus bedenken, dat zowel de west- als de oostwand van cel P een oppervlak  $A_w = A_e = 2\pi r_p \Delta r$  heeft. Het noord-

of buitenoppervlak van de ringvormige cel is  $A_n = 2\pi(r_p + \Delta r/2)\Delta$ , terwijl het zuid- of binnenoppervlak  $A_s = 2\pi(r_p - \Delta r/2)\Delta z$  is.

Een stationaire warmtebalans voor ‘ringetje’ P luidt nu:

$$0 = A_w \left( v_w T_w - a \frac{dT}{dz} \Big|_w \right) - A_e \left( v_e T_e - a \frac{dT}{dz} \Big|_e \right) + \\ + A_s \left( -a \frac{dT}{dr} \Big|_s \right) - A_n \left( -a \frac{dT}{dr} \Big|_n \right) \quad (3.172)$$

Let hierbij op, dat de indices w, e, s, n aangegeven dat de grootheden op de grensvlakken van ‘cel’ P berekend moeten worden (dus niet de snelheid in cel W maar óp de grens van cel W en P is van belang). Deze vergelijking kan op dezelfde manier opgelost worden als we bij de stationaire warmtegeleiding gedaan hebben. Doordat er nu evenwel zowel sprake is van convectie als van geleiding is de nauwkeurigheid van het ‘discretisatieschema’ dat we gebruiken veel belangrijker geworden. Een eerste, naïeve poging zou kunnen zijn, dat we de temperatuurgradiënten op een gebruikelijke manier discretiseren, bijvoorbeeld

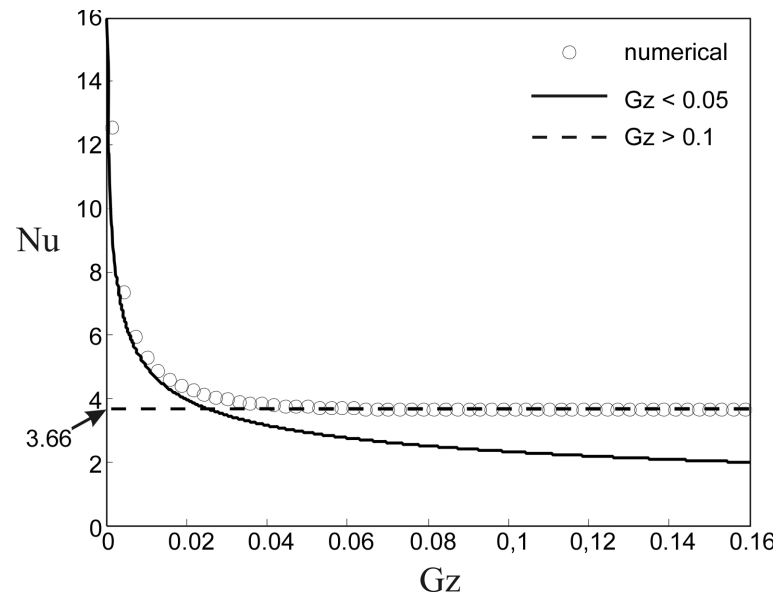
$$\frac{dT}{dz} \Big|_w \approx \frac{T_P - T_W}{\Delta z} \quad (3.173)$$

Voor de convectieve term nemen we de waarden stroomopwaarts. Dat is immers wat er de cel in stroomt, dus (let op het verschil in de subscripten tussen hoofdletters en kleine letters)

$$v_w T_w \approx v_W T_W \quad \text{en} \quad v_e T_e \approx v_P T_P \quad (3.174)$$

Deze manier van discretiseren staat bekend onder de naam ‘upwind’. Het lijkt inderdaad een logische keuze. Maar zonder problemen is dit niet. De nauwkeurigheid van deze manier van discretiseren is niet erg hoog: het schema introduceert nogal wat numerieke diffusie. Dat wil zeggen dat de diffusiecoëfficiënt kunstmatig groter wordt. Dat is in dit geval tamelijk vervelend omdat het probleem afhangt van de verhouding tussen convectief en diffusief transport. Door het upwind schema te gebruiken verstoren we deze verhouding flink. Er zijn gelukkig discretisatieschema’s die hier in veel mindere mate aan lijden. Om daar in detail op in te gaan voert hier te ver.

In figuur 3.29 is het verloop van het lokale Nusselt-getal als functie van het (eveneens lokale) Graetz-getal weergegeven zoals dat volgt uit een numerieke simulatie. Er is te zien hoe de numerieke simulatie aanvankelijk vergelijking (3.140) volgt en dan geleidelijk overschakelt naar de constant Nu-waarde van 3,66 zoals gegeven door vergelijking (3.143).



Figuur 3.29.

### **Samenvatting**

Voor gedwongen buisstroming moet onderscheid gemaakt worden tussen laminaire en turbulente stroming. In het laminaire geval is  $Nu$  een functie van het Graetz-getal en daarmee van de plaats in de buis, terwijl in het turbulente geval  $Nu$  een functie is van het Reynolds-getal en constant langs de buis. Voor convectieve warmteoverdracht van en naar lichamen zijn  $Nu$ -relaties besproken die analoog zijn aan die voor gedwongen turbulente buisstroming. Tenslotte is nog de Sieder-Tate correctie voor belangrijke gradiënten in de viscositeit genoemd.

Aannemend dat het stromingsveld bekend is, is de numerieke behandeling van warmtetransport uitgebreid ten behoeve van de convectieve termen in de warmtebalans over een elementair volumetje. Aan de randen dient bij de discretisatie een keuze gemaakt te worden voor de waarden van de snelheid en de temperatuur ter plaatse. Daartoe is het upwind schema geïntroduceerd dat overigens wel numerieke diffusie kan veroorzaken.

## **3.6 Warmtewisselaars**

### **3.6.1 Inleiding**

In dit hoofdstuk komen geen nieuwe correlaties voor warmteoverdrachtscoëfficiënten of Nusselt-getallen aan de orde, maar wordt aandacht besteed aan apparaten die nadrukkelijk ontworpen zijn voor het effectief bewerkstelligen van warmteoverdracht, zogenaamde warmtewisselaars. In de procesindustrie komen warmtewisselaars in een veelheid van maten en soorten voor. Een uitputtende behandeling van hun werking en

constructie hoort niet thuis in het kader van dit boek over transportverschijnselen. Volstaan zal worden met enige algemene opmerkingen en met een paar illustraties betreffende de werking van warmtewisselaars.

In de voorgaande verhandelingen over warmteoverdracht is steeds weer gebleken dat de warmtestroom  $\phi_q$  (het doel van een warmtewisselaar) recht evenredig is met het warmte uitwisselende oppervlak  $A$ . In de meeste warmtewisselaars wordt daarom het warmte uitwisselend oppervlak zo groot mogelijk gemaakt. Daarbij moet bedacht worden dat dit oppervlak relatief kleiner wordt naarmate het apparaat groter wordt, omdat het oppervlak per volume-eenheid evenredig is met  $L^2/L^3$ , dus met  $L^{-1}$ .

Voorts is het bij warmtewisselaars van belang de warmteoverdrachtscoëfficiënten zo groot mogelijk te laten zijn. Hoge snelheden zijn voor convectieve warmteoverdracht voordelig (maar kosten ook weer energie!). Daarom worden apparaten met roeders en circulatiesystemen met pompen veelvuldig toegepast. In het algemeen moet niet te veel van vrije convectie verwacht worden. Ook is het in het algemeen van belang gunstige constructiematerialen met een hoge warmtegeleidingscoëfficiënt te kiezen voor het warmte uitwisselende oppervlak. Vervuiling van het oppervlak door de gebruikte procesvloeistoffen moet zoveel mogelijk voorkomen worden, of periodiek verwijderd. Soms (bij niet-mengbare fasen) kan een scheidingswand tussen de processtromen zelfs geheel vermeden worden.

Een niet uitputtend lijstje van voorbeelden van warmtewisselaars omvat in ieder geval:

- ‘Shell and tube heat exchangers’: twee processtromen wisselen warmte uit, waarbij de ene stroom door een meestal groot aantal parallelle pijpen stroomt terwijl de andere stroom aan de buitenzijde van de pijpen door de warmtewisselaar gaat. Dit kan zowel in meestroom als in tegenstroom. Vaak wordt met keerschotten bewerkstelligd dat het fluïdum aan de buitenzijde van de pijpen min of meer zigzaggend door de warmtewisselaar stroomt (dode hoeken moeten vermeden worden). Ook wordt dikwijls de andere stroom, die door de pijpen stroomt, in meerdere ‘tube passes’ door de warmtewisselaar gehaald.
- Geroerde vaten waarin (reactie-) warmte wordt ontwikkeld die afgevoerd moet worden, zijn daartoe voorzien van òf een koelmantel òf een spiraal waar doorheen dan een koelmedium wordt gecirculeerd m.b.v. een pomp.
- Geschraapte warmtewisselaars: om het warmte uitwisselend oppervlak zeer frequent vrij te maken van aangegroeide lagen kristallen worden kristallisatoren vaak voorzien van snel ronddraaiende rotoren met één of meer schrapers. Dit schrapen is niet alleen nodig om dichtgroeien van het apparaat te voorkomen, maar veelal vindt de kristallisatie ook juist plaats op een extern gekoelde wand



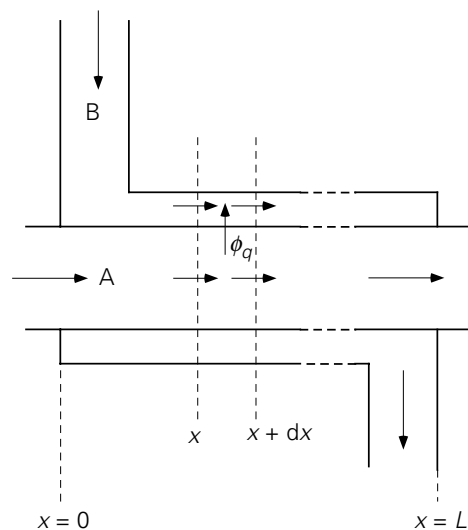
(i.v.m. de afvoer van kristallisatiewarmte). Deze wand moet dan juist met het oog op de koeling geschraapt worden.

- Fornuizen: procesvloeistoffen worden vaak opgewarmd door deze te leiden door buizenpakketten (spiralen, haarspelden) geplaatst in fornuizen (boven de vuurhaard en/of in de schoorsteen). Ook stoom wordt zo doorgaans geproduceerd.
- Chemische reactoren worden wel gekoeld door een van de componenten van het reactiemengsel (vaak het oplosmiddel) te laten verdampen en extern weer te condenseren: een probaat middel om een fase-overgang te benutten voor warmteafvoer. De verdampingswarmte is immers dikwijls groot (in vergelijking met een realiseerbaar  $c_p\Delta T$ -effect). Varianten hierop zijn het gebruik van een kokende vloeistof in een koelmantel en de koeling van een kernreactor met water/stoom. Steeds is dan de temperatuur in de reactor ongeveer constant; een grotere warmteproductie kan immers opgevangen worden door een grotere verdamping en intensievere recirculatie.

### **3.6.2 Warmteoverdracht zonder fase-overgang**

Als voorbeeld van het gebruik van het berekenen van een warmtestroom van het ene stromende medium naar het andere zal een elementaire warmtewisselaar bekeken worden. Voor de eenvoud bestaat deze uit een rechte buis waar doorheen een vloeistof A stroomt, die gekoeld moet worden. Deze koeling geschiedt door om de rechte buis concentrisch een tweede buis te monteren waar doorheen een koudere vloeistof B stroomt. Ten gevolge van het temperatuurverschil tussen de beide vloeistoffen zal er een warmtestroom van vloeistof A naar B ontstaan.

In principe zijn er twee uitvoeringen: de stromen van A en B lopen parallel ('gelijkstroom', *Eng.* 'cocurrent flow') of de stromen van A en B zijn tegengesteld van richting ('tegenstroom', *Eng.* 'countercurrent flow'). Hier zal alleen *gelijkstroom* beschouwd worden. Deze situatie is geschetst in figuur 3.30 en is stationair.



Figuur 3.30.

Een voor de praktijk belangrijke vraag luidt: hoe groot is de warmtestroom  $\phi_q$  die door de buiswand van stroom A naar stroom B overgedragen wordt?

De warmteoverdracht tussen de twee vloeistoffen hangt af van de grootte van het uitwisselend oppervlak  $A$  tussen de twee vloeistofstromen en van de overall warmteoverdrachtscoëfficiënt  $U$ . De reciproque van de laatste grootte staat voor de totale weerstand tegen warmteoverdracht die in dit geval drie deelweerstand omvat: een in vloeistof A (aangeduid met  $1/h_i$ ), een in vloeistof B (aangeduid met  $1/h_e$ ), en een van de wand die de vloeistoffen gescheiden houdt (aangeduid met  $d/\lambda_w$  waarbij  $d$  staat voor de dikte van de pijpwand en  $\lambda_w$  voor de warmtegeleidingscoëfficiënt van het wandmateriaal):

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \frac{d}{\lambda_w} + \frac{1}{h_e} \quad (3.175)$$

Vergeleken met de vergelijkingen (3.59) en (3.114) bevat  $1/U$  nu dus ook een term die staat voor de warmtetransportweerstand van de pijpwand. De twee warmteoverdrachtscoëfficiënten  $h_i$  en  $h_e$  hangen af van het type stroming (laminair, turbulent) en moeten ieder berekend worden uit een geëigende Nu-Re correlatie. Omwille van de eenvoud wordt aangenomen dat  $U$  constant is (dus onafhankelijk van positie  $x$ ) en ook dat de buis waar A doorheen stroomt een constante diameter heeft.

De warmteoverdracht hangt af van het temperatuurverschil tussen de vloeistoffen A en B. Maar omdat er onderweg voortdurend warmte wordt overgedragen (zie ook voorbeeld 3.12), is deze  $\Delta T$  een functie van de positie langs de warmtewisselaar. Derhalve moet een microbalans opgesteld worden over een stukje uit de warmtewisselaar tussen  $x$  en  $x + dx$ . Dit kan twee keer, namelijk één keer voor de vloeistof A in de binnenbuis en één keer voor de vloeistof B in de ‘buitenbuis’:

vloeistof A:

$$0 = \phi_m^A c_p^A (T^A|_x - T^A|_{x+dx}) - U \cdot \pi D \, dx \cdot (T^A|_x - T^B|_x) \quad (3.176)$$

vloeistof B:

$$0 = \phi_m^B c_p^B (T^B|_x - T^B|_{x+dx}) + U \cdot \pi D \, dx \cdot (T^A|_x - T^B|_x) \quad (3.177)$$

Beide balansen kunnen vereenvoudigd worden tot:

$$\frac{dT^A}{dx} = - \frac{U \pi D}{\phi_m^A c_p^A} (T^A - T^B) \quad (3.178)$$

$$\frac{dT^B}{dx} = + \frac{U \pi D}{\phi_m^B c_p^B} (T^A - T^B) \quad (3.179)$$

de vergelijkingen (3.178) en (3.179) vormen een gekoppeld stelsel. Aftrekken van vergelijking (3.179) van vergelijking (3.178) levert een vergelijking in  $(T^A - T^B)$  die eenvoudig oplosbaar is:

$$\frac{d}{dx} (T^A - T^B) = - U \pi D \left\{ \frac{1}{\phi_m^A c_p^A} + \frac{1}{\phi_m^B c_p^B} \right\} (T^A - T^B) \quad (3.180)$$

Deze differentiaalvergelijking aangevuld met de randvoorwaarde

$$x = 0 \rightarrow (T^A - T^B) = T_0^A - T_0^B \quad (3.181)$$

heeft voor het temperatuurverschil als functie van de positie  $x$  de volgende oplossing

$$\ln \frac{T^A - T^B}{T_0^A - T_0^B} = - U \pi D \left\{ \frac{1}{\phi_m^A c_p^A} + \frac{1}{\phi_m^B c_p^B} \right\} x \quad (3.182)$$

De oplossing voor  $x = L$  is nu dus ook bekend. Hierin komt echter de warmtestroom  $\phi_q$  niet voor! Deze kan ingebracht worden door de term tussen haken m.b.v. twee macrobalansen te elimineren. Dit gaat als volgt:

De balans over de gehele ‘binnenbuis’:

$$0 = \phi_m^A c_p^A T_0^A - \phi_m^A c_p^A T_L^A - \phi_q \quad (3.183)$$

De balans over de gehele ‘buitenbuis’:

$$0 = \phi_m^B c_p^B T_0^B - \phi_m^B c_p^B T_L^B + \phi_q \quad (3.184)$$

Combineren van de laatste twee vergelijkingen levert:

$$\frac{1}{\phi_m^A c_p^A} + \frac{1}{\phi_m^B c_p^B} = \frac{1}{\phi_q} \left\{ (T_0^A - T_0^B) - (T_L^A - T_L^B) \right\} \quad (3.185)$$

Daarmee kan de warmtestroom uitgedrukt worden in de temperatuurverschillen tussen de beide vloeistoffen aan begin en einde van de warmtewisselaar:

$$\phi_q = U A \frac{(T_0^A - T_0^B) - (T_L^A - T_L^B)}{\ln(T_0^A - T_0^B) - \ln(T_L^A - T_L^B)} \quad (3.186)$$

De beide massastromen en de soortelijke warmten komen niet meer in deze uitdrukking voor. vergelijking (3.186) wordt meestal in een veel compactere vorm geschreven. Hiertoe worden twee afkortingen ingevoerd, te weten

$$\Delta T = T^A - T^B \quad (3.187)$$

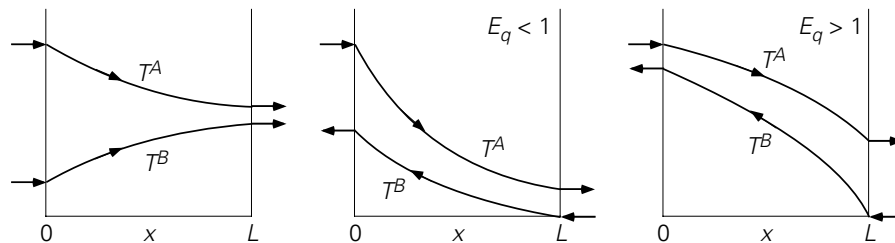
en

$$(\Delta T)_{\ln} = \frac{\Delta T_L - \Delta T_0}{\ln \frac{\Delta T_L}{\Delta T_0}} \quad (3.188)$$

Definitie (3.188) staat bekend als het *logaritmisch gemiddelde temperatuurverschil*. Hiermee is het resultaat (3.186) van de hele berekening weer in de vorm van Newton's afkoelingswet te schrijven:

$$\phi_q = U A (\Delta T)_{\ln} \quad (3.189)$$

Indien de warmtewisselaar in tegenstroom wordt bedreven, wordt via zo'n zelfde analyse exact hetzelfde resultaat verkregen. Hieruit mag echter niet de conclusie getrokken worden dat het er dus niet toe doet of de warmtewisselaar in gelijk- of in tegenstroom wordt bedreven. De waarden van de uitgangstemperaturen in geval van tegenstroom zullen immers wel degelijk verschillen van die bij gelijkstroom. Bij tegenstroom hangt het temperatuurverloop langs de warmtewisselaar voorts nog af van de zogenaamde *warmte-extractiefactor*  $E_q = \phi_m^A c_p^A / \phi_m^B c_p^B$ . Een en ander wordt geïllustreerd in figuur 3.31.



Figuur 3.31.

### Samenvatting

In deze paragraaf is gekeken naar een sterk vereenvoudigde warmtewisselaar. Een belangrijke parameter in zo'n warmtewisselaar is de overall warmteoverdrachtscoëfficiënt die drie bijdragen omvat:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \frac{d}{\lambda_w} + \frac{1}{h_e}$$

Afgezien van de elementaire geometrie is een belangrijke vereenvoudiging dat deze  $U$  niet van de positie in de warmtewisselaar afhangt. Hierdoor kunnen de microbalansen voor de warmtewisselaar opgelost worden. Wel is de  $\Delta T$  tussen de twee vloeistoffen een functie van de plaats.

Met behulp van twee macrobalansen is de warmtestroom in de uitdrukking voor het temperatuurverschil gebracht. Het resultaat is een uitdrukking voor de warmtestroom uitsluitend in termen van de begin- en eindtemperaturen van de beide vloeistoffen. De beide massastromen en de soortelijke warmten komen niet meer in deze uitdrukking voor. Met behulp van het begrip 'logaritmisch gemiddelde temperatuurverschil' is de warmtestroom toch weer in de vorm van de afkoelingswet van Newton te brengen.

Gelijkstroom en tegenstroom zijn twee modi van opereren van een warmtewisselaar. De temperatuurprofielen in de warmtewisselaar hangen af van de operatiemodus en van de warmte-extractiefactor.

### 3.6.3 Warmteoverdracht met fase-overgang

In de inleiding van § 3.6 is al uiteengezet hoe het warmte-effect van een faseovergang goed gebruikt kan worden om warmte af te voeren en natuurlijk ook toe te voeren. Daar komt nog bij dat de bij de faseovergang gevormde fase doorgaans een andere dichtheid heeft dan de oorspronkelijke fase. Dit dichtheidsverschil kan, afhankelijk van de geometrische situatie, aanleiding geven tot een verschillingsnelheid en daarmee tot versnelde warmteafvoer. Zo kan damp, in een verticale verdamperpijp uit vloeistof gevormd, in de vorm van dampbellen versneld opstijgen, en daardoor extra menging en extra warmteoverdracht bewerk-stelligen in de vloeistoffase. Andersom kan in het

geval van een condensorpijp gecondenseerde vloeistof onder invloed van de zwaartekracht (versneld) weg-stromen. Feitelijk zijn dit voorbeelden van vrije convectie ten gevolge van een dichtheidsverschil.

Hieronder volgen twee voorbeelden: in het ene wordt gedemonstreerd hoe met condensatiewarmte gewerkt wordt in een concreet warmteoverdrachtsprobleem, terwijl het in het andere voorbeeld er om gaat hoe condensatie de warmteoverdrachtscoëfficiënt aan de stoomzijde beïnvloedt.

### Voorbeeld 3.15. Een stoomcondensator

In een condensator condenseert stoom op de buitenwand van een bundel evenwijdige pijpen. Het totale buitenoppervlak  $A$  van de pijpen is  $5 \text{ m}^2$ . Er condenseert bij continue, stationaire condities  $1200 \text{ kg}$  stoom per uur (te noteren als  $\phi_{m,st}$ ). De druk in de condensator is  $1 \text{ bar}$ . Door de pijpen stroomt een debiet  $\phi_{m,w}$  van  $14000 \text{ kg}$  koelwater per uur. De temperatuur  $T_i$  van het aan de condensator toegevoerde koelwater bedraagt  $15^\circ\text{C}$ . De condensatiewarmte  $\Delta h_V$  van stoom is  $2685 \text{ kJ/kg}$ . De condensator is goed geïsoleerd: er vindt geen warmte-uitwisseling met de omgeving plaats.

Gevraagd wordt de totale warmteoverdrachtscoëfficiënt  $U$  tussen het koelwater en de stoom.

Vanwege de condensatiewarmte die vrijkomt (bij constante temperatuur) stijgt de temperatuur van het koelwater in de benedenstroomse richting. De drijvende kracht voor warmtetransport is diensgevolge langs de pijpen niet constant. Daarom ligt het voor de hand te werken met het logaritmische gemiddelde temperatuurverschil  $(\Delta T)_{\ln}$  zodat de totale warmteoverdrachtscoëfficiënt  $U$  berekend kan worden uit

$$U = \frac{\phi_q}{A(\Delta T)_{\ln}} \quad (3.190)$$

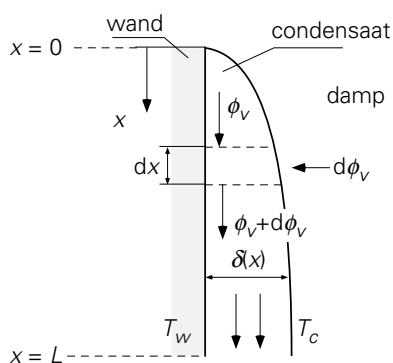
Om met deze uitdrukking aan de slag te kunnen moeten dan zowel de temperatuur  $T_e$  van het koelwater aan de uitgang van de pijpen als de in totaal overgedragen warmtestroom  $\phi_q$  eerst uitgerekend worden. Bedenk dat de condenserende stoom voor een constante temperatuur van  $100^\circ\text{C}$  (bij  $1 \text{ bar}$ ) aan de buitenzijde van de pijpen zorgt. Deze beide grootheden  $T_e$  en  $\phi_q$  volgen uit een warmtebalans over de gehele condensator:

$$\phi_{m,w} c_{p,w} (T_e - T_i) = \phi_q = \phi_{m,st} \Delta h_V \quad (3.191)$$

Hieruit volgt dan eerst dat  $\phi_q = 3222 \text{ MJ/h}$  en dat  $T_e = 69,8^\circ\text{C}$ . Daarmee kan dan weer berekend worden dat  $(\Delta T)_{\ln} = 53,0^\circ\text{C}$  en tenslotte dat  $U = 3384 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

**Voorbeeld 3.16. Filmcondensatie**

Beschouw condensatie van een zuivere damp op een verticaal vlak met hoogte  $L$  en breedte  $b$  (zie figuur 3.32). De plaat is geheel bedekt met een film die onder invloed van de zwaartekracht netjes laminair naar beneden stroomt. De vloeistof heeft dichtheid  $\rho$ , verdampingswarmte  $\Delta h_v$  (in J/kg), en warmtegeleidingscoëfficiënt  $\lambda$ . Eenvoudigheidshalve mag aangenomen worden dat de wandtemperatuur  $T_w$  en de temperatuur  $T$  van de condenserende damp beide constant zijn.



Figuur 3.32.

Leid af hoe de gemiddelde warmteoverdrachtscoëfficiënt afhangt van de hoogte  $L$ . Omdat condensatie over de gehele hoogte  $L$  optreedt, nemen filmdikte  $\delta$  en vloeistofdebiet  $\phi_w$  in de  $x$ -richting toe. Condensatie vindt plaats aan de dampzijde van de film; de afvoer van de condensatiewarmte door de film heen naar de wand hangt van de lokale dikte  $\delta(x)$  af. Deze warmteafvoer wordt immers lokaal gegeven door

$$\frac{\lambda}{\delta}(T - T_w) b dx \quad (3.192)$$

waarbij  $\delta = \delta(x)$ . Voor de lokale condensatiesnelheid (d.i. de lokale toename in vloeistofdebiet) geldt dan de volgende lokale warmtebalans:

$$\Delta h_v \rho d\phi_v = \lambda (T - T_w) \frac{b}{\delta} dx \quad (3.193)$$

met nog steeds  $\delta = \delta(x)$ . Verdere uitwerking van vergelijking (3.193) vergt bekendheid met het verband tussen  $\phi_v$  en  $\delta$  (dat in hoofdstuk 5 wordt behandeld). Uiteindelijk wordt voor de over de hoogte  $L$  gemiddelde warmteoverdrachtscoëfficiënt  $\langle h \rangle$  gevonden:

$$\langle h \rangle = 0.94 \left[ \frac{\Delta h_v \rho^2 \lambda^3 g}{L \mu (T - T_w)} \right]^{1/4} \quad (3.194)$$

Te zien is dat  $\langle h \rangle$  omgekeerd evenredig is met  $L^{1/4}$ . Om deze reden worden condensors vaak liggend uitgevoerd; vergroting van de capaciteit wordt gemakkelijk bereikt door vergroting van de breedte  $b$ .

⑤

### Samenvatting

Gebruik maken van enthalpieveranderingen bij fase-overgangen is een veelvuldig toegepaste en effectieve wijze van warmtetransport. Soms is het mogelijk de daarbij geldende warmteoverdrachtscoëfficiënten via modellering te berekenen.

## 3.7 Warmtetransport door straling

In het voorafgaande is uitgebreid gesproken over warmtetransport onderhouden door moleculen, of door collectief gedrag (convectie) of door individueel gedrag (geleiding). Er is echter nog een belangrijke vorm van warmtetransport mogelijk: door (elektromagnetische) straling, dus eigenlijk door fotonen. Eigenlijk is het preciezer om te spreken van energietransport, maar in veel praktische toepassingen zal de straling zich pas openbaren als deze geabsorbeerd wordt en omgezet in warmte.

Overigens verloopt deze vorm van energietransport onafhankelijk van en parallel aan het transport verzorgd door geleiding en convectie. We spreken dan dus van een parallelschakeling van weerstanden. In analogie met parallelschakeling van elektrische weerstanden levert dit voor de totale weerstand:

$$\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3.195)$$

In het geval dat naast warmtestraling ook convectie een rol speelt maar geleiding verwaarloosd mag worden, geldt dan dus

$$U = h_{\text{straling}} + h_{\text{convectie}} \quad (3.196)$$

De warmteoverdrachtscoëfficiënt  $h_{\text{straling}}$ , ofwel de bijdrage van warmtestraling aan een warmtebalans over een of ander controlevolume, is het onderwerp van § 3.7. Een precieze beschrijving van warmte-overdracht door straling is complex, o.a. doordat de warmtestraling die door objecten wordt uitgezonden en geabsorbeerd, op een complexe wijze afhangt van de materiaaleigenschappen, de hoek waaronder de straling wordt uitgezonden, en van de golflengte van de uitgezonden straling. In het onderstaande wordt een eerste eenvoudige inleiding in warmte-overdracht door straling gegeven, zoals die gebruikt kan worden in benaderende technologische berekeningen.



### 3.7.1 Emissie

Elk voorwerp zendt voortdurend elektromagnetische straling uit. Voor een ‘volkomen zwart’ lichaam, of voorwerp, is theoretisch af te leiden dat de uitgezonden straling evenredig is met de absolute temperatuur (in K) van het (oppervlak van het) voorwerp tot de vierde macht:

$$\phi''_{\text{zwart}} = \sigma T^4 \quad (3.197)$$

Dit is de *wet van Stefan-Boltzmann*. De evenredigheidsconstante  $\sigma$  heet de *constante van Stefan-Boltzmann* en heeft de waarde  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ . Nusselt's notatie<sup>14</sup> is heel praktisch voor berekeningen:

$$\phi''_{\text{zwart}} = \sigma' \left( \frac{T}{100} \right)^4 \quad (3.198)$$

met  $T$  nog steeds in K en  $\sigma' = 5,67 \text{ W/m}^2\text{K}^4$ .

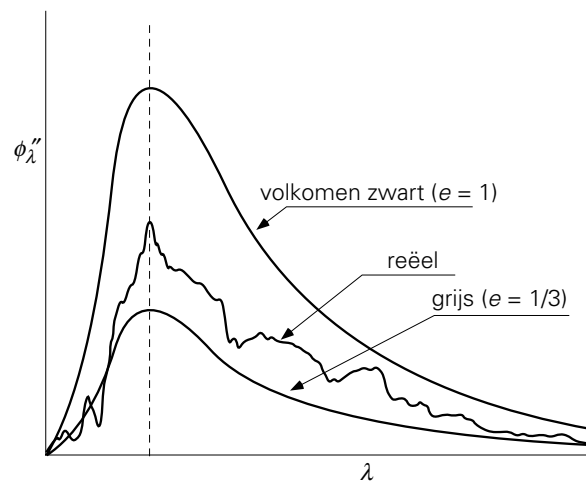
[De afleiding van deze wet behoort tot het gebied van de statistische mechanica en leert dat  $\sigma$  exact gelijk is aan  $\pi^2 k_B^4 / 60 \hbar^3 c^2$  waarin  $k_B$  de Boltzmann constante is,  $\hbar$  de constante van Planck, en  $c$  de lichtsnelheid. De wet van Stefan-Boltzmann volgt uit de *wet van Planck*, die de energieflex geeft die in het golflengtegebiedje tussen  $\lambda$  en  $\lambda + d\lambda$  wordt uitgezonden door een voorwerp met oppervlaktetemperatuur  $T$ .]

Nu is echter vrijwel geen enkel voorwerp volkomen zwart. Dit probleem wordt opgelost door het invoeren van de *emissiecoëfficiënt*  $e$ . Deze heeft een waarde tussen 0 en 1. In het algemeen zendt een voorwerp straling uit volgens

$$\phi''_q = e\sigma T^4 \quad (3.199)$$

Indien  $e = 1$ , dan is het voorwerp een volkomen *zwarte straler*. Bij het andere uiterste,  $e = 0$ , zendt een voorwerp geen straling uit. Indien  $0 < e < 1$  en als tevens geldt dat de emissiecoëfficiënt niet van de golflengte van de uitgezonden straling afhangt, dan spreekt men van een *grijs lichaam* (of voorwerp). Een voorbeeld hiervan is geschetst in figuur 3.33. Hierin is het spectrum van een volkomen zwart voorwerp ( $e=1$ ) en een grijs voorwerp (in dit voorbeeld  $e=1/3$ ) weergegeven.

<sup>14</sup> Nusselt W., *Technische Thermodynamik II*, Ed. Walter de Gruyter, Berlin, 1951



Figuur 3.33.

Voor een zwart of grijs voorwerp hangt de golflengte  $\lambda_{\max}$  waarbij het maximum in het spectrum optreedt uitsluitend af van de oppervlaktetemperatuur van het voorwerp:

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (3.200)$$

Dit heet de *verschuivingswet van Wien*. De zon, met een oppervlaktetemperatuur  $T_s$  van zo'n 5800 K, zendt de meeste energie uit in het zichtbaar licht spectrum met golflengtes van 400–800 nm, terwijl hete aardse objecten hun energie voornamelijk uitzenden in het infrarood bij golflengtes van 2–10  $\mu\text{m}$ .

Het werkelijke spectrum dat een voorwerp uitzendt of absorbeert is veel complexer dan op grond van de wet van Planck verwacht mag worden: zie nogmaals figuur 3.33. Eigenlijk moet gewerkt worden met een golflengte-afhankelijke emissie-coëfficiënt  $e_\lambda$ . In de technologische praktijk kan een goede eerste-orde benadering van warmtestraling echter vaak worden verkregen door uit te gaan van de grijs lichaam benadering van vergelijking (3.199) met  $0 < e < 1$ . Enige typische waarden van de emissiecoëfficiënt van enige materialen voor (infrarode) warmtestraling staan opgesomd in onderstaande tabel.

Tabel 3.2. Typische waarden van emissiecoëfficiënten voor warmtestraling

Gepolijst metaal en metaalfolie	0,01 – 0,13	Menselijke huid	0,88 – 0,97
Schoon metaal	0,1 – 0,3	Oppervlaktewater	0,88 – 0,97
Geoxideerd metaal	0,25 – 0,7	(Witte en zwarte) verf	0,90 – 0,95
Keramische materialen	0,4 – 0,8	Steen, beton, asfalt	0,90 – 0,95
Zandgrond	0,7 – 0,8	Sneeuw	0,95
Glas	0,8 – 0,95		

### 3.7.2 **Reflectie, transmissie, absorptie**

Indien straling op een voorwerp valt, dan kan deze worden geabsorbeerd, gereflecteerd, of doorgelaten. Elk van deze processen is in principe weer afhankelijk van de golflengte van het ingevallen licht, maar ook hier wordt vaak gebruik gemaakt van de grijze benadering, waarin al deze processen niet van de golflengte afhangen.

De fractie van de opvallende straling die wordt geabsorbeerd, wordt weergegeven met de *absorptiecoëfficiënt*  $a$ . Volgens de Wet van Kirchhoff (die hier niet wordt bewezen) geldt voor een grijs lichaam altijd  $a = e$ . Een volkomen zwart voorwerp absorbeert alle invallende straling en daarvoor geldt  $a = e = 1$ .

De fractie van de opvallende straling die wordt doorgelaten, wordt weergegeven met de *transmissiecoëfficiënt*  $t$ . De straling die een lichaam niet absorbeert en niet doorlaat, wordt gereflecteerd. Deze fractie wordt aangeduid met de *reflectie coëfficiënt*  $r$ . Uiteraard geldt:

$$a + t + r = 1 \quad (3.201)$$

Een voorwerp (of een medium) is volkomen transparant indien  $t = 1$ , en volkomen *opaak* (ondoorzichtig) indien  $t = 0$ . Voor een transparant materiaal (bv. glas, water, lucht) geldt dat de transmissiecoëfficiënt afhangt van de dikte van het materiaal. Voor een vlakke laag met dikte  $L$  van zo een materiaal geldt de wet van Beer

$$t = \exp(-\alpha L) \quad (3.202)$$

Hierin is  $\alpha$  de *absorptiviteit* (eenheid  $m^{-1}$ ). Indien  $L \gg 1/\alpha$ , dan heet de laag ‘optisch dik’ en geldt  $t \approx 0$ . Voor  $L \ll 1/\alpha$  heet de laag ‘optisch dun’ en geldt  $t \approx 1$ . Ook hier geldt vaak weer een sterke golflengte-afhankelijkheid.

Zo heeft vensterglas een absorptiviteit  $\alpha = 30 m^{-1}$  voor zichtbaar licht en een absorptiviteit  $\alpha \approx 10^6 m^{-1}$  voor infrarood straling. Hierdoor is 5 mm dik vensterglas optisch dun voor zichtbaar licht, en vrijwel opaak voor infrarood straling (ga dit na!). Voor de atmosfeer geldt iets soortgelijks: voor zonnestraling heeft de atmosfeer een transmissiecoëfficiënt  $t_{\text{atm}}$  ongeveer gelijk aan 1, terwijl we voor (door de aarde uitgezonden) infrarood straling de atmosfeer als een grijs lichaam kunnen beschouwen met een emissiecoëfficiënt  $e_{\text{atm}}$  en een absorptie-coëfficiënt  $a_{\text{atm}}$  beide gelijk aan 0,8.

#### **Voorbeeld 3.17.** *De temperatuur van de aarde*

De aarde ontvangt van de zon stralingsenergie. Een gedeelte hiervan wordt door de aardse atmosfeer gereflecteerd. Deze reflectiecoëfficiënt, vaak het *albedo* van de aarde genoemd, bedraagt ongeveer  $r = 0,3$ . De aarde zendt zelf ook straling uit. Het systeem aarde-zon verkeert in een stationaire toestand. Het maximum in het zonnenspectrum treedt op bij  $\lambda_{\text{max}} = 500 \text{ nm}$ .

Beschouw zowel de zon als de aarde als volkomen zwarte lichamen. Wat is volgens deze gegevens de stationaire temperatuur  $T$  van het aardoppervlak? Hierbij mag aangenomen worden dat het aardoppervlak op een uniforme temperatuur is. Convectief warmtetransport mag verwaarloosd worden.

Gegevens: de straal van de zon  $R_s = 6,92 \cdot 10^8$  m  
 de straal van de aarde  $R = 6,37 \cdot 10^6$  m  
 afstand aarde-zon  $s = 1,49 \cdot 10^{11}$  m

### Oplossing 1:

De oppervlaktetemperatuur van de aarde onder stationaire condities volgt uit een warmtebalans over de aarde die de in- en uitgaande warmtestromen aan elkaar gelijk stelt. Om te bepalen hoe groot de op aarde inkomende energiestroom is, dient eerst vastgesteld te worden hoeveel energie de zon uitstraalt en vervolgens hoe groot de fractie daarvan is die op aarde komt. Met behulp van de verschuivingswet van Wien volgt voor de oppervlaktetemperatuur  $T_s$  van de zon:

$$T_s = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{\lambda_{\max}} = 5800 \text{ K} \quad (3.203)$$

Dus zendt de zon een energiestroom  $\phi_s$  uit ter grootte van

$$\phi_s = 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4 = 3,86 \cdot 10^{26} \text{ W} \quad (3.204)$$

Hiervan treft slechts een klein deel de aarde, omdat de zonnestraling immers naar alle kanten uitgezonden wordt. Op een afstand  $s$  van de zon is alle uitgezonden straling verdeeld over een bol met oppervlak  $4\pi s^2$ . De aarde neemt hiervan slecht het oppervlak  $\pi R^2$  in. Van de op de aardatmosfeer vallende straling wordt een fractie  $r$  door de atmosfeer gereflecteerd, terwijl de rest door de aarde wordt geabsorbeerd. De door het aardoppervlak geabsorbeerde hoeveelheid zonnestraling bedraagt dus

$$\phi_{\text{in}} = (1-r) \frac{\pi R^2}{4\pi s^2} 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4 \quad (3.205)$$

Het aardoppervlak zendt een hoeveelheid straling uit gelijk aan

$$\phi_{\text{uit}} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (3.206)$$

Daarmee volgt uit de stationaire warmtebalans over de aarde  $0 = \phi_{\text{in}} - \phi_{\text{uit}}$  dat

$$T = \left( (1-r) \frac{R_s^2}{4s^2} \right)^{1/4} T_s = 256 \text{ K} = -17^\circ\text{C} \quad (3.207)$$

Merk allereerst op dat de straal van de aarde niet in deze uitdrukking voorkomt! Verder is deze uitkomst duidelijk onjuist: in werkelijkheid is ‘de’ temperatuur van het aardoppervlak zo’n 15°C! De fout die we gemaakt hebben is dat we helemaal geen rekening hebben gehouden met het zogenaamde broeikas effect van de atmosfeer.

### Oplossing 2:

Voor zonnestraling geldt immers dat de atmosfeer een transmissiecoëfficiënt  $t_{\text{atm}}$  van ongeveer 1 heeft, maar dat voor een fractie  $a_{\text{atm}}$  van ongeveer 0,8 de door de aarde uitgezonden infraroodstraling geabsorbeerd wordt door de atmosfeer en weer naar twee kanten uitgezonden: naar het aardoppervlak en naar het heelal.

Een stationaire warmtebalans over het aardoppervlak geeft dan

$$0 = (1-r) \frac{\pi R^2}{4\pi s^2} 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4 + 4\pi R^2 \sigma e_{\text{atm}} T_{\text{atm}}^4 - 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (3.208)$$

Met  $e_{\text{atm}} = a_{\text{atm}}$  kan deze balans omgeschreven worden tot

$$T^4 - a_{\text{atm}} T_{\text{atm}}^4 = (1-r) \frac{R_s^2}{4s^2} T_s^4 \quad (3.209)$$

Al met al is intussen een nieuwe onbekende, nl.  $T_{\text{atm}}$ , geïntroduceerd en dat vergt een nieuwe (balans)vergelijking. Een stationaire energiebalans over de atmosfeer geeft

$$0 = a_{\text{atm}} 4\pi R^2 \sigma T^4 - 2 \cdot 4\pi R^2 e_{\text{atm}} \sigma T_{\text{atm}}^4 \quad (3.210)$$

waaruit weer volgt:

$$T_{\text{atm}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} T \quad (3.211)$$

Substitutie van vergelijking (3.211) in vergelijking (3.209) resulteert in

$$T = \left( \frac{(1-r) \frac{R_s^2}{4s^2}}{1 - \frac{1}{2} a_{\text{atm}}} \right)^{1/4} \cdot T_s = 290.5 \text{ K} = 17.3^\circ\text{C} \quad (3.212)$$

Deze uitkomst klopt veel beter met de werkelijkheid.

### Samenvatting

Behalve via moleculen (convectief of via geleiding) kan warmte ook getransporteerd worden door straling (fotonen). Voor een volkomen ‘zwart’ lichaam is de flux van de uitgezonden straling te beschrijven met de wet van Stefan-Boltzmann. Bovendien geldt dat een volkomen zwart voorwerp alle invallende straling absorbeert.

In de praktijk komen er geen volkomen zwarte stralers voor en wordt met emissie- en absorptiecoëfficiënten gewerkt. Algemeen geldt dat absorptie- en emissiecoëfficiënten numeriek gelijk zijn. In het algemeen wordt

$$\phi''_{q,\text{rad}} = e \sigma T^4$$

gebruikt en spreken we van een grijs lichaam voor  $0 < e < 1$  en als tevens geldt dat de emissiecoëfficiënt niet van de golflengte van de uitgezonden straling afhangt.

Het hangt van de golflengte-afhankelijke absorptiviteit van een materiaal af of een medium opaak dan wel transparant is, en of dit medium al dan niet als een grijs lichaam kan worden beschouwd.

### 3.7.3 Warmteoverdracht door straling

Omdat elk voorwerp voortdurend warmtestraling uitzendt, is de warmteoverdracht door straling tussen twee objecten 1 en 2 het netto resultaat van de warmtestraling  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  van object 1 naar object 2 en de warmtestraling  $\phi_{2 \rightarrow 1}$  van object 2 naar 1. Indien beide objecten zwarte stralers zijn, dan wordt alle straling van object 1 die op object 2 valt, geabsorbeerd door object 2, en vice versa. Dit geeft

$$\phi_{\text{netto}, 1 \rightarrow 2} = \phi_{1 \rightarrow 2} - \phi_{2 \rightarrow 1} \quad (3.213)$$

Gewoonlijk valt slechts een fractie van de door object 1 uitgezonden straling op object 2 en vice versa. Deze fracties worden aangeduid met de *zichtfactoren* (Eng. ‘visibility factors’)  $F_{1 \rightarrow 2}$  en  $F_{2 \rightarrow 1}$ . Dit leidt dan voor zwarte voorwerpen tot

$$\phi_{\text{netto}, 1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} A_1 \sigma T_1^4 - F_{2 \rightarrow 1} A_2 \sigma T_2^4 \quad (3.214)$$

De zichtfactoren  $F_{1 \rightarrow 2}$  en  $F_{2 \rightarrow 1}$  worden uitsluitend bepaald door de geometrie van de twee objecten en door hun onderlinge ligging. Wanneer de twee objecten dezelfde temperatuur hebben, dus  $T_1 = T_2$ , dan wisselen ze uiteraard geen netto warmtestraling uit en volgt uit vergelijking (3.214) dat

$$\frac{F_{1 \rightarrow 2}}{F_{2 \rightarrow 1}} = \frac{A_2}{A_1} \quad (3.215)$$

Dit is de zogenaamde *reciprociteitsrelatie* voor de zichtfactoren. Ook al is deze relatie hier afgeleid voor het geval van twee zwarte stralers op dezelfde temperatuur, geldt hij algemeen, omdat zichtfactoren slechts afhangen van de geometrie van de objecten.

Voor twee even grote, parallelle schijven met straal  $R$  op een onderlinge afstand  $b$ , waarbij  $b \ll R$ , geldt dat  $F_{1 \rightarrow 2} = F_{2 \rightarrow 1} = 1$ . Voor twee concentrische bollen of twee oneindig lange, concentrische cilinders met stralen  $R_1$  en  $R_2$  waarbij  $R_1 < R_2$  geldt dat  $F_{1 \rightarrow 2} = 1$  (want alle straling uitgezonden door object 1 bereikt object 2) en, dankzij vergelijking (3.215), dat factor  $F_{2 \rightarrow 1} = R_1^2 / R_2^2$  (omdat een deel van de door object 2 uitgezonden straling elders op object 2 terecht komt).

**Voorbeeld 3.18.** *Stralingswarmteverliezen van een oventje*

Een bolvormig oventje (diameter  $D = 0.5$  m) met een buitenwandtemperatuur  $T_1 = 700$  °C bevindt zich in een fabriekshal. Alle overige objecten in de fabriekshal, evenals de vloeren, plafonds en muren, hebben een temperatuur  $T_a = 20$  °C. Zowel de oven als alle objecten, vloeren, muren en plafonds mogen beschouwd worden als zwarte stralers.

Bereken het netto warmteverlies van het oventje door straling.

Door de fabriekshal op te vatten als een concentrische bol om het oventje, met diameter  $D_2 > D$ , volgt uit vergelijking (3.214) met  $F_{1 \rightarrow 2} = 1$  en met  $F_{2 \rightarrow 1} \rightarrow 0$  dat de netto warmteflux van oven naar omgeving  $\phi_{\text{netto}} = A_1 \sigma (T_1^4 - T_a^4)$ . [Ditzelfde resultaat wordt ook gevonden door de overige objecten als afzonderlijke zwarte stralers te behandelen.] Het gezochte numerieke antwoord is dan 3,3 kW.

⑤

Voor twee niet-transparante ( $t = 0$ ) grijze stralers is het netto warmtetransport van object 1 naar object 2 lastiger te berekenen dan bij twee zwarte stralers, omdat nu de door object 1 uitgezonden straling voor een deel door object 2 wordt terug gereflecteerd naar object 1. Voor beide niet-transparante grijze objecten ( $i=1,2$ ) geldt uiteraard  $a_i = e_i = 1 - r_i$ . Indien er geen stralingswarmteoverdracht is naar andere objecten, kan voor twee grijze stralers met emissiviteiten  $e_1$  en  $e_2$ , oppervlakken  $A_1$  en  $A_2$ , en onderlinge zichtfactoren  $F_{1 \rightarrow 2}$  en  $F_{2 \rightarrow 1}$  afgeleid worden dat:

$$\phi_{\text{netto},1 \rightarrow 2} = A_1 e_{\text{eff}} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (3.216)$$

waarin

$$e_{\text{eff}} = \left( \frac{1 - e_1}{e_1} + \frac{A_1}{A_2} \frac{1 - e_2}{e_2} + \frac{1}{F_{1 \rightarrow 2}} \right)^{-1} \quad (3.217)$$

staat voor de *effectieve emissiecoëfficiënt* of *effectieve emissiviteit*.

Drie voor de ingenieurspraktijk vaak nuttige toepassingen van vergelijking (3.217) zijn de volgende:

- Stralingswarmteoverdracht tussen twee oneindig grote, evenwijdige, grijze platen met emissiecoëfficiënten  $e_1$  en  $e_2$ : met  $F_{1 \rightarrow 2} = 1$  (d.w.z. alle straling van plaat 1 valt op plaat 2) en met  $A_1/A_2 = 1$  leidt vergelijking (3.217) tot

$$e_{eff} = \frac{e_1 e_2}{e_1 + e_2 - e_1 e_2} \quad (3.218)$$

- Stralingswarmteoverdracht tussen twee concentrische, grijze bollen (of oneindig lange cilinders) met emissiecoëfficiënten  $e_1$  en  $e_2$  en met diameters  $D_1$  en  $D_2$ : met  $F_{1 \rightarrow 2} = 1$  (alle straling van de binnenste bol of cilinder 1 valt op de buitenste bol of cilinder 2) geeft vergelijking (3.217) nu

$$e_{eff} = \left( \frac{1}{e_1} + \frac{D_1^2}{D_2^2} \frac{1 - e_2}{e_2} \right)^{-1} \quad (3.219)$$

- Stralingswarmteoverdracht tussen een convex grijs voorwerp en zijn grijze omgeving. Indien we een convex grijs object 1 omsloten denken door een grijze omgeving 2, met  $A_2 \gg A_1$  en met  $F_{1 \rightarrow 2} = 1$  (omdat alle straling van het object op de omgeving valt), dan vereenvoudigt vergelijking (3.219) zich tot  $e_{eff} = e_1$ . Met  $e_{eff} = e_1 = 1$  (d.w.z. voor een zwarte straler in een 'grote' omgeving) reduceert vergelijking (3.216) tot de vergelijking gehanteerd in voorbeeld 3.18.

Dit model is ook prima toepasbaar om de netto stralingsverliezen van een voorwerp naar de atmosfeer te berekenen; daarbij speelt de emissiviteit van de atmosfeer dus geen rol.

### Samenvatting

Bij warmteoverdracht door straling tussen twee zwarte of grijze voorwerpen spelen zichtfactoren een grote rol; zij worden uitsluitend bepaald door de geometrie van de twee objecten en door hun onderlinge ligging.

Waar elk grijs voorwerp straalt, reflecteert en absorbeert, gaat het steeds om het netto warmtetransport:

$$\phi_{\text{netto}, 1 \rightarrow 2} = A_1 e_{eff} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

waarin de effectieve emissiecoëfficiënt, of effectieve emissiviteit, staat voor



$$e_{eff} = \left( \frac{1-e_1}{e_1} + \frac{A_1}{A_2} \frac{1-e_2}{e_2} + \frac{1}{F_{1 \rightarrow 2}} \right)^{-1}$$

en een functie is van de emissiecoëfficiënten van de beide voorwerpen, van hun oppervlakken en van de zichtfactor  $F_{1 \rightarrow 2}$ . Voor enkele typische situaties kan deze relatie vereenvoudigd worden. Als een 'klein' voorwerp omsloten wordt door een 'grote' omgeving, speelt de emissiviteit van de omgeving geen rol.

### 3.7.4 Warmteoverdrachtscoëfficiënt bij straling

Het is vaak handig ook een warmteflux door straling te schrijven in termen van een warmteoverdrachtscoëfficiënt en een drijvende kracht  $\Delta T$ . Deze stralingswarmteoverdrachtscoëfficiënt wordt wel aangeduid als  $h_r$  en kan worden verkregen uitgaande van vergelijking (3.216). Daartoe wordt  $T_1^4 - T_2^4$  herschreven door  $T^4$  te lineariseren:

$$T_1^4 = T_2^4 + 4\bar{T}^3 \cdot (T_1 - T_2) \quad (3.220)$$

vanwege  $dT^4/dT = 4T^3$  en met  $\bar{T} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ . Een alternatieve afleiding ontleedt  $T_1^4 - T_2^4$  in factoren:

$$\begin{aligned} T_1^4 - T_2^4 &= (T_1^2 + T_2^2)(T_1^2 - T_2^2) = \\ &= \left\{ (T_1 + T_2)^2 - 2T_1T_2 \right\} (T_1 + T_2)(T_1 - T_2) \end{aligned} \quad (3.221)$$

Met  $\bar{T} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$  en  $T_1T_2 \approx \bar{T}^2$  wordt vergelijking (3.220) ook verkregen.

Vergelijking (3.220) combineren met vergelijking (3.216) resulteert in een uitdrukking die erg lijkt op Newton's afkoelingswet (zie § 3.2.1):

$$\phi_{\text{net},1 \rightarrow 2} = h_r A_1 (T_1 - T_2) \quad (3.222)$$

waarin

$$h_r \approx 4 e_{eff} \sigma \bar{T}^3 \quad (3.223)$$

Het is duidelijk dat de coëfficiënt  $h_r$  niet alleen van de stralingsconstante  $\sigma$  afhangt, maar ook van de emissiecoëfficiënten  $e_1$  en  $e_2$  (en dus van de materialen waaruit de beide voorwerpen vervaardigd zijn of waarmee ze gecoat zijn) en van de temperaturen  $T_1$  en  $T_2$ .

Ga na dat bovenstaande benadering in termen van  $\bar{T}$  voor  $T_1 = 300$  K en  $T_2 = 400$  K leidt tot een fout van slechts 2%, en dat voor  $T_1 = 300$  K en  $T_2 = 1000$  K de fout circa

20% bedraagt. Ga ook na dat voor (gemiddelde) temperaturen in de buurt van de kamertemperatuur  $h_r$  van de orde van 1-10 W/m<sup>2</sup>K is en daarmee niet te verwaarlozen ten opzichte van bijvoorbeeld vrije convectie. Bij hogere temperaturen neemt  $h_r$  aanzienlijk toe en daarmee dus ook de stralingsbijdrage aan het totale warmtetransport.

**Voorbeeld 3.19.** *Een thermometer in een koude kamer*

Midden in een kamer waar de lucht een temperatuur  $T_a$  heeft, hangt een thermometer. Als de wanden een uniforme, lagere temperatuur  $T_w$  hebben, welke temperatuur  $T_1$ , wijst de thermometer dan aan?

Voer de berekening uit voor  $\bar{T} = 300$  K, voor  $T_1 - T_w = 10$  K, en uit een emissiecoëfficiënt  $e = 0,05$  voor de thermometer. Beschouw de situatie als stationair.

Het is de bedoeling dat de thermometer de luchttemperatuur  $T_a$  aanwijst. Probleem daarbij is dat de thermometer de koudere wanden ‘ziet’. Dientengevolge zal er door straling warmte ‘wegvloeien’ van de thermometer naar de wanden en zal de temperatuur  $T_1$  van de thermometer lager worden dan  $T_a$ . Ten gevolge van het temperatuurverschil ( $T_a - T_1$ ) zal er dan warmte over-gedragen worden vanuit de lucht naar de thermometer. Dit transport zal onderhouden worden door vrije convectie (waarom?). In een stationaire toestand geldt dan dat de warmteafvoer door straling evenwicht maakt met de warmtetoevoer door vrije convectie:

$$e\sigma(T_1^4 - T_w^4) = h(T_a - T_1) \quad (3.224)$$

waaruit volgt dat bij benadering geldt

$$T_a - T_1 = \frac{4e\sigma}{h} \bar{T}^3 (T_1 - T_w) \quad (3.225)$$

Indien voor de warmteoverdrachtscoëfficiënt  $h$  voor vrije convectie een normale waarde van 6 W/m<sup>2</sup>K genomen wordt, volgt dat  $T_a - T_1 \approx 0,5$  K. ⑤

**Voorbeeld 3.20.** *Zonne-instraling op een plat dak*

Bij windstil weer schijnt de zon op een horizontaal plat dak. De warmteflux  $\phi_s''$  door de zonnestraling naar het dak bedraagt 300 W/m<sup>2</sup>. Alle straling wordt door het dak geabsorbeerd, terwijl door een goede isolatie aan de onderzijde van het dak het warmteverlies daar verwaarloosbaar is. Bereken in de stationaire toestand de oppervlaktetemperatuur  $T_w$  van het dak bij een omgevingstemperatuur  $T_a$  van 20 °C.

Ten gevolge van de warmte-instraling door de zon stijgt de temperatuur van het dak. Bij windstil weer zijn er, afgezien van warmtegeleiding, twee mechanismen van warmtetransport mogelijk: vrije convectie wordt veroorzaakt doordat het dak de lucht direct boven het dak opwarmt; de daar dan lagere luchtdichtheid induceert

vrije convectie. Uiteraard zal het warme dak gaan stralen, maar de warmte-uitstraling hangt af van de vooralsnog onbekende daktemperatuur, maar kan berekend worden met behulp van vergelijking (3.216) met  $e_{eff} = e_1 = a_1 = 1$ :

$$\phi''_{\text{netto},1 \rightarrow 2} = \sigma (T_w^4 - T_a^4) \quad (3.226)$$

Voor de warmteafvoer door vrije convectie volgt de warmteoverdrachtscoëfficiënt  $h$  uit vergelijking (3.162). Als lucht eenvoudigheidshalve als een ideaal gas beschouwd mag worden, zodat

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_w} = \frac{T_w - T_a}{T_a} \quad (3.227)$$

(waarin  $\rho_w$  de dichtheid van lucht bij  $T = T_w$  voorstelt), dan volgt:

$$\phi''_{\text{vrije convectie}} = 0,17\lambda \left( \frac{g}{\nu a T_a} \right)^{1/3} (T_w - T_a)^{4/3} \quad (3.228)$$

Bij stationaire condities geldt dan dat de fluxen (3.216) en (3.228) evenwicht maken met de zonne-influx  $\phi''_s$ :

$$\phi''_s = \sigma (T_w^4 - T_a^4) + 0,17\lambda \left( \frac{g}{\nu a T_a} \right)^{1/3} (T_w - T_a)^{4/3} \quad (3.229)$$

$T_w$  dient hieruit iteratief berekend te worden dan wel afgeschat te worden met behulp van bijvoorbeeld een vergelijking als (3.223). De gezochte daktemperatuur bedraagt zo'n 44°C. Wie de stralingsbijdrage aan de warmteafvoer zou hebben verwaarloosd en alleen met vrije convectie zou hebben gerekend, zou op een daktemperatuur van zo'n 63°C zijn uitgekomen. De stralingsbijdrage en de bijdrage van vrije convectie zijn hier van dezelfde grootte-orde. ⑤

### **Samenvatting**

Ook bij warmteoverdracht door straling kan gewerkt met een warmteoverdrachtscoëfficiënt. Deze  $h_r$  hangt in het algemeen af van emissiecoëfficiënten, temperaturen en oppervlakken van de stralende lichamen:

$$h_r \approx 4 e_{eff} \sigma \bar{T}^3$$

waarin  $e_{eff}$  de effectieve emissiecoëfficiënt of effectieve emissiviteit voorstelt.

Warmteoverdracht door straling en door vrije convectie treden vaak tegelijk op en zijn bij omgevingstemperaturen vaak van dezelfde grootte-orde. Bij hogere temperaturen neemt het belang van straling alleen nog maar toe.

# 4 Massatransport

## 4.1 Analogie tussen massatransport en warmtetransport

In hoofdstuk 1 is al naar voren gekomen dat convectief transport van warmte en convectief transport van massa analoog verlopen en analoog beschreven kunnen worden. De uitdrukkingen voor *convectief transport* van warmte en een bepaalde stof of component zien er immers hetzelfde uit:

$$\phi_q = \phi_v \cdot \rho c_p T \quad (4.1)$$

$$\phi_m = \phi_v \cdot c \quad (4.2)$$

Beide vergelijkingen hebben de vorm van volumedebiet maal betreffende concentratie. De fluxen worden gegeven door het product van snelheid en betreffende concentratie.

In hoofdstuk 2 is *moleculaire transport* nader bekeken. Moleculen transporteren tijdens hun temperatuurbewegingen hun eigen massa en hun eigen kinetische energie. In een fenomenologische benadering worden de resulterende diffusieve nettofluxen van een stof en van warmte op dezelfde wijze beschreven: de massa- en warmtefluxen zijn evenredig met de gradiënten in de massaconcentratie respectievelijk thermische-energieconcentratie. De evenredigheidsconstanten (respectievelijk de diffusiecoëfficiënt  $ID$  en de warmtevereffeningscoëfficiënt  $a$ ) hebben beide dezelfde dimensie, te weten  $m^2/s$ . Beide coëfficiënten zijn stofgrootheden die de beweeglijkheid van de individuele moleculen en hun vermogen om thermische energie door te geven weerspiegelen. De fenomenologische uitdrukkingen voor de stromen luiden:

$$\phi_q'' = -\lambda \frac{dT}{dx} = -a \frac{d(\rho c_p T)}{dx} \quad \text{wet van Fourier} \quad (4.3)$$

$$\phi_m'' = -ID \frac{dc}{dx} \quad \text{wet van Fick} \quad (4.4)$$

Zoals in hoofdstuk 2 opgemerkt is de tweede formulering van de wet van Fourier slechts correct indien het product  $\rho c_p$  constant is; deze schrijfwijze toont echter duidelijker de overeenkomst met de wet van Fick voor stoftransport en koppelt expliciet het transport van 'iets' aan de concentratiegradiënt in datzelfde 'iets'.

Bij de wet van Fick dient hier opnieuw opgemerkt te worden dat deze slechts beperkt geldig is: ‘Fick’ beschrijft massatransport ten gevolge van concentratieverschillen (en laat andere drijvende krachten voor massatransport buiten beschouwing), geldt voor verdunde systemen, is beperkt tot binaire systemen en beschrijft de diffusie van complexe (lees: niet-bolvormige en polaire) moleculen maar matig of slecht<sup>15</sup>. De analogie met warmtetransport geldt dus niet onder alle condities: hier dient men wel voortdurend op bedacht te zijn!

De concentratie en de stofflux in de wet van Fick kunnen nog op twee manieren uitgedrukt worden: op massabasis (dus in  $\text{kg/m}^3$  en  $\text{kg/m}^2\text{s}$ ) en in termen van molen (dus in  $\text{kmol/m}^3$  en  $\text{kmol/m}^2\text{s}$ ). Dit laatste is vaak meer voor de hand liggend in geval van chemische reacties. Nu is bij de wet van Fick de diffusiecoëfficiënt zo gedefinieerd dat het netto moleculair transport van twee componenten A en B door een in de ruimte vastgelegd oppervlak nul is. Daarbij dient dan onderscheid gemaakt te worden naar gelang de basis ‘kg’ of ‘kmol’ is:

a) *de nettomassaastroom (in kg) is nul:*

in deze ‘*barycentrische*’ benadering geldt in elk vlak in het domein

$$\phi''_{m,A,x} + \phi''_{m,B,x} = 0 \quad (4.5)$$

waarbij – met de massaconcentraties  $c_i$  in  $\text{kg/m}^3$  – geldt

$$\phi''_{m,A,x} = - ID_{AB} \frac{dc_A}{dx} \quad (4.6)$$

en

$$\phi''_{m,B,x} = - ID_{BA} \frac{dc_B}{dx} \quad (4.7)$$

terwijl

$$c_A + c_B = c = \text{constant} \quad (4.8)$$

zodat

$$ID_{AB} = ID_{BA} \quad (4.9)$$

De definities zijn zo vastgelegd dat de diffusiecoëfficiënten van A in B en van B in A dezelfde numerieke waarde hebben. Deze definities worden doorgaans gebruikt bij diffusie in vaste stoffen en vloeistoffen, omdat dan bij niet te hoge

<sup>15</sup> Het valt buiten het bestek van deze inleiding in transportverschijnselen om de algemeen geldige Stefan-Maxwell vergelijkingen voor massatransport te behandelen. Hiervoor raadplege men bijvoorbeeld J.A. Wesselingh & R. Krishna, ‘Mass Transfer in Multicomponent Mixtures’, VSSD, Delft, 2000.

concentraties van bijvoorbeeld A in B de dichtheid constant verondersteld kan worden.

b) *de nettomolenstroom is nul:*

dezelfde vergelijkingen als hierboven zijn ook hier van toepassing, maar nu met de concentraties  $c_i$  in  $\text{kmol/m}^3$  en de fluxen  $\phi''_{\text{mol}}$  in  $\text{kmol/m}^2\text{s}$ . Er geldt ook hier dat de diffusiecoëfficiënten van A in B en van B in A numeriek dezelfde waarde hebben. Deze keuze is zeer geschikt om diffusie in gassen te beschrijven, daar vergelijking (4.8) zeker geldt voor ideale gassen bij constante druk en temperatuur.

In de rest van dit hoofdstuk zal zowel gewerkt worden in termen van kg als in termen van ‘molen’, afhankelijk van de vraag in kwestie. In het geval van componentenbalansen met chemische reacties is werken in ‘molen’ de aangewezen weg.

Dankzij de hierboven geschetste analogieën tussen warmte- en stoftransport zal veel van hetgeen in hoofdstuk 3 is besproken en afgeleid, zonder veel moeite omgezet kunnen worden van warmtetransport- naar stoftransporttermen. Ook de techniek van balansen opstellen, waarin meestal wel termen voorkomen als weergegeven in de vergelijkingen (4.1) tot en met (4.4), het daaruit afleiden van (meestal) differentiaalvergelijkingen en het oplossen daarvan onder inachtneming van de randvoorwaarden werken bij stoftransport- en warmtetransportvraagstukken geheel identiek.

Er zijn echter twee belangrijke verschillen:

- a) afhankelijk van de randvoorwaarden, laat diffusie van stof A aan stof B nog diverse opties open voor beweging of transport die op hun beurt weer het transport van stof A zullen beïnvloeden; en
- b) indien twee media met elkaar in thermisch evenwicht zijn, dan is de temperatuur van beide gelijk; indien echter twee verschillende media (of fasen) met daarin opgelost stof A in evenwicht met elkaar zijn, dan zijn in het algemeen de concentraties van A in beide media (or fasen) *verschillend!*

Alvorens in de § 4.3 en § 4.6 dieper op deze afwijkende situaties ingegaan wordt, zullen eerst in § 4.2 de analogieën in de beschrijvingswijzen van moleculair transport in meer detail toegelicht worden. In § 4.2 en § 4.3 komen dan processen met een diffusief karakter aan de orde, terwijl pas in § 4.5 convectief stoftransport bij verschillende condities behandeld zal worden naar analogie met convectief warmtetransport. In § 4.4 passeert dan massatransport in de meest algemene zin de revue. Tenslotte worden dan in § 4.6 stoftransport vanuit één fase naar een andere fase en in § 4.7 het gelijktijdig optreden van warmte- en stofoverdracht besproken.

### Samenvatting

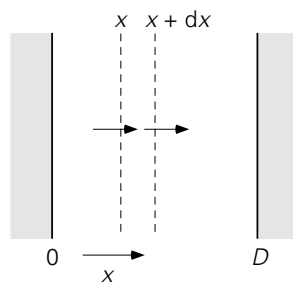
In deze paragraaf is besproken dat in principe stoftransport geheel analoog aan warmtetransport verloopt. Aangegeven is waar de begrenzings liggen aan de geldigheid van met name de wet van Fick en daarmee van het idee van de analogie. Daarnaast zijn twee soorten situaties aangestipt die aparte bespreking verdienen omdat de analogie daarbij niet opgaat. Er kan zowel in termen van kg als in termen van ‘molen’ gewerkt worden.

## 4.2 Wederzijdse diffusie naar analogie van warmtetransport

In deze paragraaf zullen binaire systemen besproken worden (dat wil zeggen: systemen met slechts twee componenten, zoals stof A in een zuiver oplosmiddel B) waarin enkel sprake is van zuivere diffusie en waarin geen convectief transport plaatsvindt. Indien de twee soorten moleculen A en B netto van plaats verwisselen, geldt de wet van Fick. Er is dan sprake van *wederzijdse diffusie*. In dit geval gaat diffusie geheel analoog aan geleiding. Achtereenvolgens zullen weer de drie basisgeometrieën de revue passeren.

### 4.2.1 Stationaire diffusie in cartesische coördinaten

Beschouw twee grote evenwijdige vlakke platen (plaatafstand  $D$ ) waartussen zich twee gasvormige (of twee vloeibare) stoffen A en B bevinden (zie figuur 4.1). Veronderstel dat er een concentratieverschil  $\Delta c_A$  tussen de platen heerst. Macroscopisch gezien is de situatie onveranderlijk in de tijd (stationair). Verder is de totale concentratie  $c$  constant (dus geen functie van  $x$ ):  $c = c_A + c_B = \text{constant}$ . Dit betekent dat er dus een concentratieverschil voor stof B tussen de platen heerst van  $\Delta c_B = -\Delta c_A$ . Het gevolg hiervan is dat er twee even grote maar tegengesteld gerichte massafluxen  $\phi_A''$  en  $\phi_B''$  zijn. Dit is eenvoudig in te zien: stel daartoe een massabalans op voor stof A voor een plakje tussen  $x$  en  $x + dx$  (zie figuur 4.1):



Figuur 4.1.

$$0 = -ID \left. \frac{dc_A}{dx} \right|_x - \left( -ID \left. \frac{dc_A}{dx} \right|_{x+dx} \right) \quad (4.10)$$

Oplossing van vergelijking (4.11) met randvoorwaarden:  $x = 0 \rightarrow c_A = c_{A,0}$  en  $x = D \rightarrow c_A = c_{A,D}$  levert

$$c_A(x) = c_{A,0} + (c_{A,D} - c_{A,0}) \frac{x}{D} \quad (4.11)$$

Vergelijking (4.11) is geheel equivalent met vergelijking (3.5) voor warmtetransport. Ook nu is het verband tussen de drijvende kracht  $\Delta c_A$  en de massaflux te bepalen:

$$\Delta c_A = \phi''_{m,A} \frac{D}{ID} \quad (4.12)$$

Dit is weer geheel analoog aan de wet van Ohm: de drijvende kracht  $\Delta c_A$  en de massaflux zijn lineair verbonden door een weerstand. Vergelijk vergelijking (4.12) met vergelijking (3.17).

Voor het transport van stof B is precies zo'n redenering op te zetten. Het resultaat is:

$$\Delta c_B = \phi''_{m,B} \frac{D}{ID} \quad (4.13)$$

Omdat geldt:  $\Delta c_A = -\Delta c_B$  volgt uit de vergelijkingen (4.12) en (4.13) direct dat de beide massafluxen inderdaad even groot maar tegengesteld zijn. De weerstand voor transport is voor beide stoffen ook even groot.

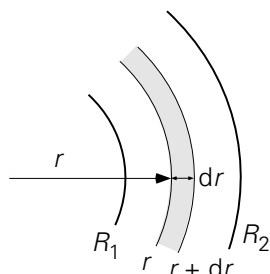
#### 4.2.2 Stationaire diffusie in cilindrische coördinaten

De wederzijdse diffusie van twee stoffen A en B tussen twee concentrische cilinders in een stationaire situatie wordt aangeduid in figuur 4.2. De totale concentratie  $c = c_A + c_B$  is weer constant, dus geen functie van de plaats. Op beide cilinderoppervlakken wordt ervoor gezorgd dat de concentraties een vaste waarde hebben:  $r = R_1 \rightarrow c_A = c_{A1}$ ,  $c_B = c_{B1}$  en  $r = R_2 \rightarrow c_A = c_{A2}$ ,  $c_B = c_{B2}$ .

Geheel analoog aan de cilindergeometrie bij warmtetransport is nu het concentratieprofiel van bijvoorbeeld stof A te bepalen uit een massabalans voor stof A over een volume tussen de cilinders tussen  $r$  en  $r + dr$  (en dezelfde lengte  $L$  als beide cilinders). Deze balans luidt (bedenk dat er enkel sprake is van transport van A ten gevolge van wederzijdse diffusie):

$$0 = 2\pi L \cdot \left( -IDr \frac{dc_A}{dr} \right) \Big|_r - 2\pi L \cdot \left( -IDr \frac{dc_A}{dr} \right) \Big|_{r+dr} \quad (4.14)$$





Figuur 4.2.

Vergelijking (4.14) levert na vereenvoudiging een tweede-orde differentiaalvergelijking op:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dc}{dr} \right) = 0 \quad (4.15)$$

Vergelijking (4.15) is geheel analoog aan vergelijking (3.36); éénmaal integreren levert op dat  $r \cdot dc/dr$  constant is, waarna de oplossing verder gaat zoals gepresenteerd na vergelijking (3.26). Voor het verband tussen de drijvende kracht  $\Delta c_A$  en de massastroom  $\phi_{m,A}$  resulteert dan de uitdrukking:

$$\Delta c_A = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi IDL} \phi_{m,A} \quad (4.16)$$

geheel analoog aan vergelijking (3.30). Ook hier komt niet de afstand  $R_2 - R_1$  (waarover het concentratieverschil staat) als zodanig voor, maar wel impliciet vanwege  $\ln(R_2/R_1) = \ln R_2 - \ln R_1$ ! Dit is dus een gevolg van de cilindergeometrie.

#### Voorbeeld 4.1. Zuurstoftransport in menselijk weefsel

In een studie naar het zuurstoftransport in menselijk weefsel beschouwde Nobelprijswinnaar August Krogh (Denemarken, 1874 – 1949) een cilindrisch bloedvat met daaromheen een annulaire ‘schil’ of ring weefsel. Het metabolisme waarbij in het weefsel zuurstof in kooldioxide wordt omgezet, werd gemodelleerd met een nulde-orde reactie met reactiesnelheid  $k_r$  (in mol/m<sup>3</sup>s). Transport in het weefsel vindt plaats door diffusie met diffusiecoëfficiënt  $ID$ .

Aan de binnenrand van het weefsel, aan de kant van het bloedvat, op  $r = R_1$ , werd een zuurstofconcentratie  $c = c_0$  aangenomen, terwijl aan de buitenrand, op  $r = R_2$  (met  $R_2 > R_1$ ) geen zuurstoftransport werd verondersteld, ofwel  $dc/dr = 0$ . In Krogh’s studie werd een stationaire situatie beschouwd.

Leid met behulp van een geschikt gekozen massabalans uitdrukkingen af voor het concentratieverloop in het weefsel als functie van  $r$  en voor de zuurstofstroom per lengte-eenheid die vanuit het bloedvat het weefsel ingaat.

De gevraagde massabalans (in mol/s) is feitelijk een uitbreiding van vergelijking (4.14): vanwege de chemische reactie moet een verbruiksterm worden toegevoegd

aan de balansvergelijking, te weten  $-k_r \cdot 2\pi r L dr$ . Alle termen van de vergelijking delen door  $2\pi r L \cdot ID dr$  leidt tot de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dc}{dr} \right) = \frac{k_r}{ID} r \quad (4.17)$$

Twee maal integreren geeft

$$c = A \ln r + \frac{k_r}{4ID} r^2 + B \quad (4.18)$$

Met behulp van de twee gegeven randvoorwaarden wordt voor het radiale concentratieprofiel

$$(c - c_0) \frac{2ID}{k_r R^2} = \ln \left( \frac{r}{R_1} \right) - \frac{r^2 - R_1^2}{2R_2^2} \quad (4.19)$$

gevonden, en voor de zuurstoftoevoer van bloedvat naar weefsel per lengte-eenheid bloedvat

$$\frac{\phi_m}{L} = -ID \left. \frac{dc}{dr} \right|_{r=R_1} = 2\pi R_1 = \pi k_r (R_2^2 - R_1^2) \quad (4.20)$$

Dit laatste resultaat had ook gevonden kunnen worden met behulp van een stationaire overall massabalans voor een annulaire ring weefsel: toevoer van zuurstof = verbruik van zuurstof in het metabolisme.

⑤

### 4.2.3 Stationaire diffusie in bolcoördinaten

Bekijk tenslotte twee concentrische bollen met stralen  $R_1$  en  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ). In de tussenruimte bevinden zich weer twee stoffen A en B die wederzijds diffunderen. De toestand is opnieuw stationair. Op de randen gelden als vaste randvoorwaarden:

$$r = R_1 \rightarrow c_A = c_{A1}, c_B = c_{B1} \quad \text{en} \quad r = R_2 \rightarrow c_A = c_{A2}, c_B = c_{B2}.$$

Het verband tussen drijvende kracht en massastroom is natuurlijk weer te vinden door eerst het concentratieprofiel op te lossen. De uitkomst van deze berekening is:

$$\Delta c_A = c_{A1} - c_{A2} = \frac{1}{4\pi ID} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \phi_{m,A} \quad (4.21)$$

Voor  $R_2 \rightarrow \infty$  resulteert een uitdrukking die weer geheel analoog is aan vergelijking (3.45) voor warmtegeleiding vanaf een boloppervlak een oneindig uitgestrekt stilstaand medium in.

Bovenstaande beschouwingen voor wederzijdse diffusie in een binair mengsel zijn ook geldig als er sprake is van diffusie van slechts één stof door een stilstaand medium (feitelijk wederzijdse diffusie van die ene stof en ‘lege plaatsen’). Dit komt bijvoorbeeld voor bij diffusie van een gas door een vaste stof.

**Voorbeeld 4.2.** *Gasdiffusie door een vaste wand*

Zuiver helium (gas) zit opgesloten in een glazen bol (inwendige diameter  $D_1 = 20$  cm, uitwendige diameter  $D_2 = 21$  cm). De bol is omgeven door lucht. In deze lucht is de concentratie van helium verwaarloosbaar. Helium kan door glas diffunderen, terwijl lucht niet door glas kan (een heliummolecuul is veel kleiner dan een ‘luchtmolecuul’). Hier is dus sprake van diffusie van een stof (helium) door een stilstaand medium (glas).

De diffusiecoëfficiënt  $ID$  van helium in glas bedraagt  $0,2 \cdot 10^{-11}$  m<sup>2</sup>/s. De oplosbaarheid  $c^*$  van helium in glas (in kg/m<sup>3</sup>) is slechts 0,84% van de dichtheid (ook in kg/m<sup>3</sup>) van het heliumgas waaraan het glas (langdurig) wordt blootgesteld. De temperatuur van bol en lucht is 20 °C.

Als de druk in de bol 2 bar is, hoe groot is dan de massastroom door het glas?

Aangezien de diffusiecoëfficiënt zeer klein is, zal de stroom en daarmee de afname van de heliummassa in de bol zeer klein zijn. Dit betekent dat het transport van het helium door het glas quasi-stationair verondersteld mag worden: de verandering in de randvoorwaarde aan de binnenkant van het glas is zo gering dat het effect van die verandering op het transport verwaarloosd kan worden.

De eerste stap is dan het opstellen van een massabalans over een concentrische bolschil in het glas tussen  $r$  en  $r + dr$ , op dezelfde wijze als in § 3.1.4 voor warmtegeleiding in een bolgeometrie. De oplossing van de resulterende differentiaalvergelijking – die dezelfde vorm heeft als vergelijking (3.42) – levert het profiel van de concentratie van het helium in het glas. Hieruit volgt, via vergelijking (3.179), voor de massastroom aan helium:

$$\phi_{m,\text{He}} = \frac{4\pi ID}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} (c^* - 0) \quad (4.22)$$

waarin  $c^*$  de heliumconcentratie in het glas aan de binnenwand van de bol voorstelt en de heliumconcentratie in het glas aan de buitenwand gelijk aan 0 is genomen. Vergelijking (4.22) is immers het resultaat van een massabalans over een bolschilletje in het glas en dus moeten ook de heliumconcentraties aan binnen- en buitenrand in het glas ingevuld worden.

Zelfs aan de binnenwand is de heliumconcentratie in het glas, ook in een evenwichtssituatie, natuurlijk veel kleiner dan de heliumconcentratie in de gasfase

binnen de glazen bol. Gegeven is dat de *oplosbaarheid* van helium  $c^*$  in glas afhangt van de heliumdichtheid (of –concentratie)  $c$  in het aangrenzende gas; daarbij is het voldoende nauwkeurig te veronderstellen dat helium zich als een ideaal gas gedraagt:

$$c = \frac{Mp}{RT} = 0,33 \text{ kg/m}^3 \quad (4.23)$$

waarin  $M$  staat voor de molaire massa van helium. Invullen van de verschillende numerieke waarden in vergelijking (4.22) levert op:  $\phi_{m,\text{He}} = 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ kg/s}$ .

⑤

#### Voorbeeld 4.3. Een bolvormige schimmelvlok

In een beluchte bioreactor worden schimmelvlokken gekweekt die gemakshalve als een bol mogen worden opgevat. Een schimmelvlok heeft voor zijn groei zuurstof nodig en die verbruikt hij volgens een nulde-orde reactie. Aangezien de groei uniform verdeeld overal in een vlok plaatsvindt, dient zuurstof een vlok in te diffunderen. De zuurstofbehoefte van een vlok neemt derhalve toe naarmate hij groeit. Kan zuurstof daardoor niet meer doordringen tot de kern van de vlok, dan komen daar door anaerobe (zuurstofloze) reacties toxische stoffen vrij. Het groeiproces dient derhalve te worden stopgezet voordat de kern van de schimmelvlok zuurstofloos wordt.

Beschouw een quasi-stationaire toestand van een vlok met straal  $R$  waarbij de groei even buiten beschouwing wordt gelaten. Leid uit een zuurstofbalans voor zo'n vlok de differentiaal vergelijking af voor de zuurstofconcentratie  $c$ . Los deze differentiaalvergelijking op, specificeer de daarbij gebruikte rand-voorwaarde(n), en bereken de maximale vlokdiаметer met gebruikmaking van de volgende gegevens: diffusiecoëfficiënt van zuurstof in een vlok  $D = 5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ ; reactieconstante voor zuurstofverbruik  $k_r = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol/m}^3\text{s}$ ; zuurstofconcentratie  $c_0$  aan het oppervlak in een vlok  $c^* = 0,3 \text{ mol/m}^3$ .

Dit probleem wordt weer aangepakt door een massabalans voor zuurstof op te stellen over een bolschilletje binnen in een vlok tussen  $r$  en  $r+dr$ , op dezelfde wijze als in het voorgaande voorbeeld. Het verschil is dat er nu een negatieve productieterm meedoet als gevolg van de nulde-orde chemische reactie. De balans voor de bedoelde stationaire conditie luidt:

$$0 = \left( -4\pi r^2 D \frac{dc}{dr} \right) \Big|_r - \left( -4\pi r^2 D \frac{dc}{dr} \right) \Big|_{r+dr} - k_r 4\pi r^2 dr \quad (4.24)$$

Door de twee diffusie termen in het rechterlid te combineren en alle termen te delen door  $4\pi dr$  volgt

$$0 = ID \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dc}{dr} \right) - k_r r^2 \quad (4.25)$$

Een keer integreren levert:

$$r^2 \frac{dc}{dr} = \frac{k_r}{ID} \frac{1}{3} r^3 + \alpha \quad (4.26)$$

De randvoorwaarde  $r = 0 \rightarrow dc/dr = 0$  levert op dat  $\alpha = 0$  waarmee

$$\frac{dc}{dr} = \frac{k_r}{3ID} r \quad (4.27)$$

Nog een keer integreren met de tweede randvoorwaarde  $r = R \rightarrow c = c^*$  geeft dan het concentratieprofiel

$$c = c^* - \frac{k_r}{6ID} (R^2 - r^2) \quad (4.28)$$

De eis dat  $c = 0$  op  $r = 0$  vermeden moet worden, leidt tot de conclusie dat de maximale vlokstraal  $R_{\max}$  gegeven wordt

$$R_{\max}^2 = \frac{6IDc^*}{k_r} \quad (4.29)$$

Invullen van de numerieke waarden leidt tot een maximale vlok diameter  $D_{\max}$  van 1 cm.

5

### **Samenvatting**

In het bovenstaande is stationaire wederzijdse diffusie in binaire systemen geheel analoog aan warmtetransport behandeld. Het verband tussen drijvende kracht  $\Delta c_A$  en massastroom  $\phi_{m,A}$  is weer analoog te schrijven aan de wet van Ohm. Drijvende kracht en massastroom zijn recht evenredig; de evenredigheidsconstante is op te vatten als een weerstand, nu tegen massatransport. Voor vlakke en niet-vlakke geometrieën zijn – met behulp van microbalansen voor dunne plakjes, ringetjes en schilletjes – uitdrukkingen voor deze weerstand gevonden die geheel overeenkomstig zijn aan die bij warmtetransport.

#### **4.2.4 Stofoverdrachtscoëfficiënt en Sherwood getal**

In de vorige paragraaf is geconstateerd dat de massastroom en de drijvende kracht evenredig met elkaar zijn. Deze bevinding kan weer gebruikt worden om drijvende

kracht en massastroom aan elkaar te koppelen volgens het recept van de afkoelingswet van Newton. Voor massatransport geldt dan

$$\phi_{m,A} = kA\Delta c_A \quad (4.30)$$

waarin de constante  $k$  de *stofoverdrachtscoëfficiënt* (SI-eenheid: m/s) heet. Geheel naar analogie met warmtetransport wordt nu  $1/k$  geïnterpreteerd als de weerstand tegen massatransport. De resultaten van de vorige paragraaf kunnen vervolgens weer gegeven worden in termen van een  $k$ -waarde voor elke situatie:

stofoverdrachtscoëfficiënt	tussen twee vlakke platen	voor annulaire ruimte tussen twee cilinders (betrokken op buitenoppervlak)	voor bol in oneindig medium
$k$	$\frac{ID}{D}$	$\frac{2ID}{D_2 \ln D_2/D_1}$	$\frac{2ID}{D}$

Ook nu kunnen deze relaties in een dimensieloze vorm gegoten worden. Het dimensieloze kental dat bij stofoverdracht hoort is het *Sherwood-getal*, afgekort als Sh en gedefinieerd als:

$$\text{Sh} = \frac{\text{weerstand tegen stofoverdracht t.g.v. diffusie}}{\text{werkelijke weerstand tegen stoftransport}} = \frac{D/ID}{1/k} = \frac{kD}{ID} \quad (4.31)$$

Voor (wederzijdse) diffusie vanaf een boloppervlak in een oneindig uitgestrekt medium geldt  $\text{Sh} = 2$  zoals  $\text{Nu} = 2$  geldt voor afkoeling van een bol door geleiding in een oneindig uitgestrekt medium.

Het begrip *totale stofoverdrachtscoëfficiënt* kan nu nog niet behandeld worden naar analogie met het begrip totale warmteoverdrachtscoëfficiënt. Omdat dan sprake is van diffusie over het grensvlak tussen twee verschillende media waarin ook bij evenwicht de concentraties in het algemeen niet gelijk zullen zijn, moet bespreking hiervan uitgesteld worden tot § 4.6.

### Samenvatting

Er geldt ook een soort ‘afkoelingswet’ in het geval van stoftransport: een stofstroom wordt bepaald door drijvende kracht (hier een concentratieverschil), het oppervlak waardoorheen de stofstroom gaat, en de stofoverdrachtscoëfficiënt  $k$ :

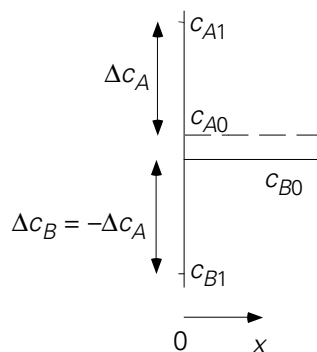
$$\phi_{m,A} = kA\Delta c_A$$

Deze stofoverdrachtscoëfficiënt  $k$  staat centraal in een nieuw dimensieloos kental: het Sherwood-getal  $\text{Sh} = k D/ID$ . Voor de verschillende basisgeometrieën gelden soortgelijke relaties voor het Sherwood-getal als bij warmtetransport door geleiding voor het Nusselt-getal.

### 4.2.5 Instationaire diffusie: penetratietheorie

Net zoals bij instationaire warmtegeleiding zal hieronder alleen de vlakke basisgeometrie aan de orde komen. Beschouw een medium (zie figuur 4.3) dat aan één zijde, op  $x=0$ , begrensd is door een vlakke wand; naar de andere zijde is het ‘oneindig’ uitgestrekt. De afmetingen  $W$  en  $L$  in de twee overige richtingen zijn ook zeer groot. Dit medium bestaat uit een stof A en een stof B. De toestand is in evenwicht, d.w.z. de concentraties van beide stoffen,  $c_{A0}$  respectievelijk  $c_{B0}$ , zijn constant.

Op zeker tijdstip  $t = 0$  wordt momentaan op positie  $x = 0$  de concentratie van stof A verhoogd met een stap  $\Delta c_A$ , terwijl tegelijkertijd de concentratie van stof B op  $x = 0$  verlaagd wordt met  $\Delta c_B = -\Delta c_A$  (zo wordt bereikt dat steeds aan eis (4.10) wordt voldaan:  $c_A + c_B = c$ ). Deze nieuwe randcondities blijven vervolgens gehandhaafd. Wat zal er gebeuren?



Figuur 4.3.

Deze nieuwe concentraties zullen het medium in gaan penetreren, analoog aan de penetratie van warmte (zie figuur 3.11 en § 3.3.1), waarbij ervan wordt uitgegaan dat er weer sprake zal zijn van wederzijdse diffusie. [Merk op, dat de randvoorwaarden met het oog hierop gekozen zijn.] In het vervolg zal evenwel alleen component A worden gezien.

Om te kunnen bepalen hoe de concentratie van bijvoorbeeld stof A verloopt, moet weer een massabalans voor stof A opgesteld worden over een stukje van het medium tussen  $x$  en  $x + dx$ . Deze balans luidt als volgt:

$$\frac{\partial(WLdx c_A)}{\partial t} = WL \cdot \left\{ -ID \frac{\partial c_A}{\partial x} \Big|_x \right\} - WL \cdot \left\{ -ID \frac{\partial c_A}{\partial x} \Big|_{x+dx} \right\} \quad (4.32)$$

Vergelijking (4.32) kan vereenvoudigd worden tot

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = ID \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \quad (4.33)$$

Dit resultaat is geheel overeenkomstig met vergelijking (3.72) bij warmtetransport. Omdat ook de randvoorwaarden precies hetzelfde zijn, is de hele oplossing hetzelfde: alle resultaten uit § 3.3.1 kunnen zonder meer overgenomen worden. De oplossing van vergelijking (4.33) is dus weer de *errorfunctie*. Dit betekent dat we ook hier werken met de *penetratietheorie*. De *indringdiepte* of *penetratiediepte* is nu gedefinieerd als  $x = \sqrt{\pi IDt}$ . Deze indringdiepte heeft weer dezelfde betekenis als bij warmtetransport: de massaflux die door het grensvlak ( $x = 0$ ) het medium instroomt, wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}\phi''_{m,A} &= - ID \left. \frac{\partial c_A}{\partial x} \right|_{x=0} = ID \frac{c_{A1} - c_{A0}}{\sqrt{\pi IDt}} = \\ &= \sqrt{\frac{ID}{\pi t}} (c_{A1} - c_{A0}) = k \cdot (c_{A1} - c_{A0})\end{aligned}\quad (4.34)$$

Vergelijking (4.34) is daarmee weer geheel analoog aan vergelijking (3.78). Ook hier is de drijvende kracht  $\Delta c_A = c_{A1} - c_{A0}$  een constante, terwijl de stofoverdrachtscoëfficiënt  $k$  een functie van de tijd is. Uiteraard is ook nu de geldigheid van de penetratietheorie beperkt tot een vlakke geometrie en korte tijden. Of het tijdsinterval in kwestie inderdaad voldoende kort is om penetratietheorie toe te mogen passen, wordt wederom geschat door de indringdiepte te vergelijken met de relevante lengteschaal (bijvoorbeeld de dikte  $D$  van de laag waarin van een kant de warmte penetreert), oftewel met het Fourier-getal. Er moet gelden:

$$\sqrt{\pi IDt} < 0,6D, \text{ of } Fo = \frac{IDt}{D^2} < 0,1 \quad (4.35)$$

Deze voorwaarde is geheel identiek aan voorwaarde (3.79) voor het toepassen van penetratietheorie voor korte tijden in het geval van tijdsafhankelijke warmtegeleiding. Het Fourier-getal is, afgezien van dimensieloze constanten, ook nu het kwadraat van de verhouding van twee lengteschalen (of de verhouding van twee tijdschalen): zie de discussie volgend op vergelijking (3.80).

Voor de stofoverdrachtscoëfficiënt  $k$  wordt dan, vergelijkbaar met uitdrukking (3.91), gevonden

$$k(t) = \sqrt{\frac{ID}{\pi t}} \quad (4.36)$$

Hieruit volgen weer de gemiddelde massaflux door het vlak  $x = 0$  die gedurende  $t_e$  seconden (startend vanaf  $t = 0$ ) het medium binnenstroomt, de over dit interval gemiddelde stofoverdrachtscoëfficiënt en de bij  $k(t)$  behorende Sherwood-relatie:



$$\overline{\phi''_{m,A}} = \frac{1}{t_e} \int_0^{t_e} k(t) \Delta c_A dt = 2 \sqrt{\frac{ID}{\pi t_e}} \Delta c_A \quad (4.37)$$

$$\bar{k} = 2 \sqrt{\frac{ID}{\pi t_e}} = 2 k(t_e) \quad (4.38)$$

$$\text{Sh} = \frac{kD}{ID} = 0,564 \text{ Fo}^{-1/2} \quad (4.39)$$

**Voorbeeld 4.4.** Een verontreinigde stortplaats I

Op een stortplaats in de gemeente L. is 10 jaar geleden verontreinigde grond gestort. Gedurende deze jaren is de stof langzaam de schone ondergrond ingedrongen (denk aan sijpelend regenwater). Dit proces kan beschreven worden in termen van een diffusie- of dispersieproces met een effectieve diffusiecoëfficiënt  $ID = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ . Verondersteld mag worden dat de concentratie van de verontreiniging juist aan het oppervlak van de schone grond een constante waarde van  $c^* = 2 \text{ kg/m}^3$  heeft.

Om te kunnen beslissen over de dikte van de laag grond die afgegraven zou dienen te worden en over de bestemming van de eenmaal afgegraven grond dienen eerst een aantal vragen beantwoord te worden:

- Hoe diep is deze stof gedurende deze 10 jaar de grond in gediffundeerd?
- Hoeveel van de stof is er in de ondergrond terecht gekomen?

Vraag (a) wordt beantwoord door de indringdiepte te berekenen:

$$x_e = \sqrt{\pi ID t_e} = 45 \text{ cm} \quad (4.40)$$

Aangezien aangenomen mag worden dat de schone grondlaag veel dikker is dan 45 cm, mag penetratietheorie hier wel toegepast worden. De indringdiepte geeft meteen een redelijke schatting hoe ver de verontreiniging is doorgedrongen.

Het antwoord op vraag (b) wordt bepaald door eerst de gemiddelde massastroom door het grensvlak schone/verontreinigde grond uit te rekenen:

$$\overline{\phi''_m} = \bar{k} \cdot (c^* - 0) = 2 \sqrt{\frac{ID}{\pi t_e}} c^* \quad (4.41)$$

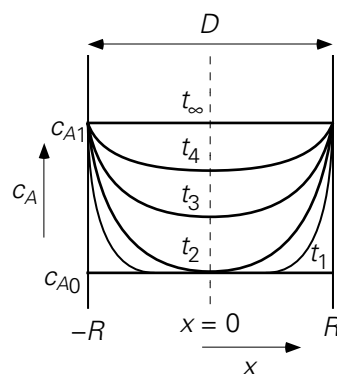
Hieruit is eenvoudig de massa te bepalen die er gedurende de 10 jaar per oppervlakte-eenheid de grond ingedrongen is:

$$M'' = \overline{\phi''_m} \cdot t_e = \frac{2}{\pi} \sqrt{\pi ID t_e} \cdot c^* = 0,57 \text{ kg/m}^2 \quad (4.42)$$

### 4.2.6 Instationaire lange-termijn diffusie

Instationaire diffusie voor lange tijden is ook geheel analoog aan tijdsafhankelijke lange-tijden warmtegeleiding (§ 3.3.5 en § 3.3.6). Dit wordt fraai geïllustreerd door het Fourier-getal: bij warmtetransport is het gedefinieerd als  $Fo = a \cdot t / D^2$  terwijl voor stoftransport  $Fo = ID \cdot t / D^2$  wordt gebruikt. Net als bij lange-tijden warmtegeleiding spreken we van lange-tijden diffusie

- als  $Fo > 0,1$  voor diffusieprocessen (tenminste bij lage concentratieniveaus – zie § 4.3 verderop) van een component vanaf (of naar) een enkel grensvlak door een stilstaand medium of een vast materiaal; en
- als  $Fo > 0,03$  in gevallen waar de diffusie van (of naar) twee kanten plaats vindt, d.w.z. van (of naar) de twee vlakken van een laag van een stilstaand medium of een vast materiaal, of van (of naar) het oppervlak van een vast of stilstaand cilindrisch of bolvormig lichaam.



Figuur 4.4.

Voor lange-tijden diffusie van twee kanten een vlakke laag in moeten de concentratieprofielen (zie figuur 4.4) nog steeds gehoorzamen aan de tijdsafhankelijke diffusievergelijking:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = ID \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \quad (4.43)$$

maar weer – zie ook de condities (3.98) – met de volgende begin- en randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} c_A(t=0) &= c_{A0} && \text{voor } |x| \leq R \\ c_A(x=R) &= c_{A1} && \text{voor } t > 0 \\ \frac{\partial c_A}{\partial x} &= 0 && \text{voor } x=0 \text{ en } t > 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ook nu geldt weer dat voor voldoende lange tijden ( $Fo > 0,03$ ) de profielen ruimtelijk gelijkvormig worden (mits uiteraard de randcondities de gehele tijd hetzelfde blijven). De resultaten uit § 3.3.5 en § 3.3.6 laten zich direct vertalen en ook de figuren 3.17 en 3.18 zijn weer bruikbaar, mits  $T$  vervangen wordt door  $c_A$  (en dus ook  $\langle \bar{T} \rangle$  en  $T_c$  door respectievelijk  $\langle c_A \rangle$  en  $c_{Ac}$ ) en, zoals eerder opgemerkt,  $Fo$  gedefinieerd wordt met  $ID$  in plaats van met  $a$ !

Voor de vlakke plaat, de cilinder en de bol gelden dezelfde waarden voor het Sherwood-getal als in het geval van warmtetransport voor het Nusselt-getal. Bedenk wel dat het nog steeds gaat om massatransport een lichaam in (of uit) waarbij de weerstand tegen het stoftransport binnen het lichaam zelf ligt (en de randvoorwaarden opgelegd en constant in de tijd zijn). Dus voor lange tijden ( $Fo > 0,03$ ):

vlakke plaat	$ Sh = 4,93$
cilinder	$ Sh = 5,8$
bol	$ Sh = 6,6$

De bevindingen voor penetratietheorie (korte tijden) en diffusie over langere tijden zijn weer samen te vatten als

penetratietheorie	$ Fo < 0,03$	$ k = k(t)$	$ \Delta c_A = \text{constant}$
lange tijden	$ Fo > 0,03$	$ k = \text{constant}$	$ \Delta c_A = \Delta c_A(t)$

In feite is deze samenvatting identiek aan die aan het eind van § 3.3.5.

#### **Voorbeeld 4.5.** *Een verontreinigde stortplaats II*

Beschouw nu wat er gebeurt met de stortplaats in de gemeente L. (zie voorbeeld 4.4) als er niet ingegrepen wordt. De laagdikte van de schone ondergrond is 1 m. Daaronder zit een laag klei die (praktisch) ondoordringbaar is voor de verontreiniging. De concentratie van de verontreinigde grond juist aan het oppervlak van de schone grond was  $c^* = 2 \text{ kg/m}^3$ , de diffusiecoëfficiënt  $ID = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ . Hoe lang duurt het voordat de gemiddelde concentratie van de verontreiniging in die 1 m dikke laag grond  $1 \text{ kg/m}^3$  bedraagt?

Dit probleem kan het snelst opgelost worden met behulp van figuur 3.16. Eerst dient de parameter langs de verticale as bepaald te worden uit de gegevens:

$$\frac{c_1 - \langle c \rangle}{c_1 - c_0} = \frac{2 - 1}{2 - 0} = 0,5 \quad (4.45)$$

Aflezen van figuur 3.17 levert dan:  $Fo = 0,05$ . Hieruit volgt (bedenk dat voor  $D$  niet de laagdikte, maar twee maal de laagdikte genomen moet worden: zie ook voorbeeld 3.10):

$$t = 1,0 \cdot 10^9 \text{ s} \approx 32 \text{ jaar}$$

**Samenvatting**

De analyse van instationaire (wederzijdse) diffusie verloopt geheel analoog aan die van instationaire warmtegeleiding. Ook nu wordt er onderscheid gemaakt tussen penetratietheorie (korte tijden) en diffusie over langere tijden. Voor een vlakke laag met diffusie vanaf (of naar) beide vlakken, voor een cilinder en voor een bol geldt wederom:

penetratietheorie	$Fo < 0,03$	$k = k(t)$	$\Delta c_A = \text{constant}$
lange-tijden diffusie	$Fo > 0,03$	$k = \text{constant}$	$\Delta c_A = \Delta c_A(t)$

Dezelfde theorie en wetmatigheden als bij warmtetransport gelden hier. Zelfs de figuren 3.16 en 3.17 zijn weer heel bruikbaar. Het Fourier-getal is wel anders gedefinieerd (met behulp van de diffusiecoëfficiënt) en de plaats van het Nusselt-getal wordt ingenomen door het Sherwood-getal waarvoor overigens dezelfde numerieke waarden gelden bij de verschillende basisgeometrieën (laag, cilinder, bol).

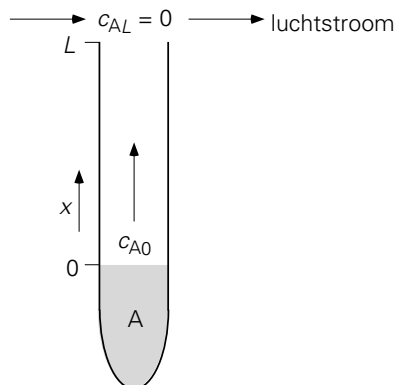
**4.3 Diffusie en driftflux**

Tot nu toe is zeer bewust alleen gesproken over situaties waarin transport van massa beschreven wordt met de wet van Fick: wederzijdse diffusie en diffusie van slechts één component in een vaste stof. Bij wederzijdse diffusie geldt dat gemiddeld gesproken de moleculen van de twee stoffen slechts van positie verwisselen binnen een afgesloten ruimte. In dat geval is er in bijvoorbeeld gassen geen verandering van de totale concentratie (ongeacht soort) van de moleculen op een bepaalde plaats.

In het algemeen zullen diffusieproblemen complexer zijn. Het is zeer eenvoudig om in een mengsel van stoffen A en B een andere vorm van diffusieverschijnselen op te wekken: er is netto-transport van stof A, terwijl stof B netto niet getransporteerd wordt. Een voorbeeld hiervan is het *Winkelman-experiment* (zie figuur 4.5): in de reageerbuis bevindt zich een laagje van een vluchtige<sup>16</sup> stof A. Deze stof verdampt voortdurend en diffundeert naar de rand van de reageerbuis. Daar wordt zuivere lucht overheen geblazen zodat de concentratie van stof A aan de rand van de buis (praktisch) nul is.

Op het eerste gezicht lijkt dit te beschrijven met de wet van Fick. Er is immers een drijvend concentratieverschil: de concentratie van stof A net boven het vloeistofoppervlak minus de concentratie aan de rand van de buis. Als gevolg hiervan zal stof A dus naar de uitgang van de buis diffunderen.

<sup>16</sup> In voorbeeld 2.2 is het geval van een stof met zeer geringe vluchtigheid bekeken.



Figuur 4.5.

Dit is echter niet het complete verhaal. Dit is in te zien door naar de ‘lucht’-moleculen te kijken. De concentratie van de luchtmoleculen (aangegeven met B) is ook niet constant in de buis: bij de rand van de buis is de concentratie  $c_B$  gelijk aan die van de buitenlucht ( $c_{BL} = p/RT$  (in mol/m<sup>3</sup>)), terwijl de luchtconcentratie aan het vloeistofoppervlak veel lager is. De totale concentratie  $c = c_A + c_B$  is constant omdat de druk in de reageerbuis overall hetzelfde is. – Als dat niet het geval was, zou er onmiddellijk een grote convectieve massastroom optreden, omdat een drukverschil immers altijd (behalve bij alleen een hydrostatisch drukverschil) stroming veroorzaakt. – Dit betekent dat de concentratie van de lucht vlak boven het vloeistofoppervlak gelijk is aan  $c_{B0} = c - c_{A0} = (p - p_{A0})/RT$  (waarin  $p_A$  de dampspanning is van stof A, die gemakshalve als ideaal gas wordt opgevat). Toch is er in de stationaire situatie<sup>17</sup> geen nettotransport van de lucht in de reageerbuis van boven naar beneden. Immers: waar zou deze lucht moeten blijven?

De diffusiestroom van de lucht, die een gevolg van het concentratieverschil is, wordt blijkbaar gecompenseerd door een convectieve stroom: de totale concentratie  $c$  is niet precies constant, maar is bij het vloeistofoppervlak iets hoger dan bij de rand van de buis. Dit verschil is echter zo gering dat de drukval over de buis ( $p_0 > p_L$ ) zo klein is, dat er slechts een hele geringe convectieve stroom is, precies voldoende om ervoor te zorgen dat de nettostroom van de luchtmoleculen nul is!

Deze convectieve stroom, veroorzaakt door een heel klein drukverschil, maakt geen onderscheid tussen stof A of B. Beide worden getransporteerd: er is dus ook een convectieve stroom van stof A. Deze convectieve stroom wordt de *driftstroom* (aangegeven met  $\phi$  in mol/s) genoemd. De netto-massafluxen voor stof A en stof B in de buis (met de concentraties in mol/m<sup>3</sup>) zijn nu:

<sup>17</sup> Feitelijk is de verdamping van de vloeistof in deze reageerbuis natuurlijk een instationair proces. De hoogte van het vloeistofniveau (in feite een randvoorwaarde voor het transport door de gasfase) verandert evenwel zo langzaam (gezien het dichtheidsverschil tussen vloeistof- en gasfase) dat voor het transport door de gasfase de situatie als quasi-stationair opgevat kan worden.

$$\phi_A'' = -ID \frac{dc_A}{dx} + \phi'' \frac{c_A}{c} \quad (4.46)$$

$$\phi_B'' = -ID \frac{dc_B}{dx} + \phi'' \frac{c_B}{c} \quad (4.47)$$

De vergelijkingen (4.46) en (4.47) zijn nog zeer algemeen. In elk van beide vergelijkingen geeft de eerste term in het rechterlid de diffusieflux (volgens de wet van Fick) weer, terwijl de tweede term laat zien dat de *driftflux* beide componenten vervoert.

Omdat de totale concentratie (vrijwel) constant is:  $c = c_A + c_B$ , geldt voor de concentratiegradiënten dat  $dc_B/dx = -dc_A/dx$ . Optellen van de vergelijkingen (4.46) en (4.47) levert nu:

$$\phi'' = \phi_A'' + \phi_B'' \quad (4.48)$$

In het Winkelman-experiment geldt  $\phi_B'' = 0$  volgt nu dus:  $\phi'' = \phi_A''$  (zie hierboven). Dit terug invullen in vergelijking (4.46) resulteert in:

$$\phi_A'' = -ID \frac{c}{c - c_A} \frac{dc_A}{dx} \quad (4.49)$$

Vergelijking (4.49) staat bekend als *wet van Stefan* en beschrijft, wat genoemd wordt, *eenzijdige diffusie*.

Als nu een molbalans voor stof A opgesteld wordt over een dun plakje tussen  $x$  en  $x + dx$  uit de buis, dan wordt gevonden (de toestand is nog steeds quasi-stationair):

$$0 = \phi_A''|_x - \phi_A''|_{x+dx} \quad (4.50)$$

Combineren van de vergelijkingen (4.49) en (4.50) levert

$$\frac{c}{c - c_A} \frac{dc_A}{dx} = \text{constant} \quad (4.51)$$

Met  $c = \text{constant}$  luidt de oplossing van deze vergelijking, met de twee randvoorwaarden  $x = 0 \rightarrow c_A = c_{A0}$  en  $x = L \rightarrow c_A = c_{AL}$ :

$$\frac{c - c_A(x)}{c - c_{A0}} = \left( \frac{c - c_{AL}}{c - c_{A0}} \right)^{x/L} \quad (4.52)$$

Nu het concentratieprofiel bekend is, kan de flux van stof A met de wet van Stefan, vergelijking (4.49), uitgerekend worden:

$$\phi_A'' = \frac{IDc}{L} \cdot \ln\left(\frac{c - c_{AL}}{c - c_{A0}}\right) \quad (4.53)$$

Een analyse die uitsluitend op de wet van Fick gebaseerd is, levert het foutieve resultaat op:

$$\phi_A'' = -ID \frac{c_{AL} - c_{A0}}{L} \quad (4.54)$$

De laatste twee vergelijkingen verschillen een factor – *Stefan's correctiefactor* :

$$f_D = \frac{c}{c_{A0} - c_{AL}} \cdot \ln\left(\frac{c - c_{AL}}{c - c_{A0}}\right) \quad (4.55)$$

Zo'n correctiefactor treedt ook op bij eenzijdige diffusie vanaf bijvoorbeeld een boloppervlak naar het 'oneindige', zoals bij een *verdampende druppel* of een *oplossend deeltje*. Uiteraard speelt deze correctiefactor ook bij processen in de omgekeerde richting, zoals condensatie of kristallisatie. Dit geeft dan voor Sherwood:  $Sh = 2f_D$  (in plaats van  $Sh = 2$ ).

Overigens is, voor  $c_{AL}$  en  $c_{A0}$  klein ten opzichte  $c$ , Stefan's correctiefactor  $f_D$  te schrijven als

$$f_D = 1 + \frac{1}{2} \frac{c_{A0} + c_{AL}}{c} + \dots \quad (4.56)$$

en dus kan, indien  $c_{A0} + c_{AL} \ll c$ , gerekend worden met wederzijds diffusie. Dit klopt met de limietsituatie dat voor  $c_A \ll c$  de wet van Stefan, vergelijking (4.49), overgaat in de wet van Fick (zie voorbeeld 2.2).

De beide basisvergelijkingen (4.46) en (4.47) zijn algemeen geldig voor binaire diffusie (dus zonder extern opgelegde stroming) en dekken dus ook wederzijdse diffusie. In dat geval is namelijk de driftstroom gelijk aan nul en gaat de wet van Stefan over in de wet van Fick.

Bedenk wel dat de hierboven gegeven theorie in molstromen en molbalansen is geformuleerd. Het kan ook in massastromen en massabalansen, maar dan is de beschrijving iets gecompliceerder.

Ook andere vormen dan wederzijdse en eenzijdige diffusie worden door de vergelijkingen (4.46) en (4.47) beschreven: zie onderstaand voorbeeld.

#### **Voorbeeld 4.6. Nikkelcarbonyl**

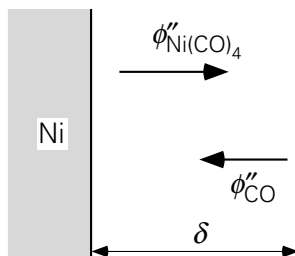
Beschouw een proces waarin koolmonoxyde reageert met nikkel (aanwezig in de vorm van een vlakke plaat) tot gasvormig nikkelcarbonyl:



De reactie (zie figuur 4.6) gebeurt aan het oppervlak van het vaste nikkel dat zich bevindt in een atmosfeer die oorspronkelijk geheel uit CO bestaat. Door de reactie ontstaat er een laag in de buurt van het nikkeloppervlak waar minder CO aanwezig is en juist meer nikkelcarbonyl. De reactiesnelheid wordt bepaald door de flux van CO-moleculen door deze grenslaag (dikte  $\delta$ ) naar het nikkeloppervlak toe. [Een verwijzing naar de filmtheorie besproken in § 3.5.2 is hier op zijn plaats.]

Alle CO-moleculen die het nikkeloppervlak bereiken, reageren daar instantaan, zodat de CO-concentratie daar nul is. Tegelijkertijd diffundeert het nikkelcarbonyl weg van het oppervlak naar de bulk van de gasfase, waar de nikkelcarbonyl-concentratie nul verondersteld mag worden. Beschouw dit proces in de stationaire situatie.

De vraag: hoe groot is de CO-flux door de grenslaag?



Figuur 4.6.

Dit is een voorbeeld van een diffusieproces waarbij sprake is van een driftflux: de driftflux is de som van de nikkelcarbonylflux en de CO-flux en is af te leiden uit de reactievergelijking. Voor elk te vormen nikkelcarbonylmolecuul moeten er immers vier CO-moleculen worden aangevoerd:

$$\phi''_{\text{Ni}(\text{CO})_4} = -\frac{1}{4} \phi''_{\text{CO}} \quad (4.58)$$

Het minteken geeft aan dat beide fluxen (in mol/s) tegengesteld van richting zijn.

In deze situatie mag weer gebruikt worden dat de totale concentratie  $c$  praktisch constant is:  $c = c_1 + c_2 = \text{constant}$  (met  $c_1 = \text{concentratie CO}$  en  $c_2 = \text{concentratie Ni}(\text{CO})_4$ , beide in mol/m<sup>3</sup>). Dit betekent dus dat de gradiënten gelijk van grootte maar tegengesteld van teken zijn:  $dc_1/dx = -dc_2/dx$ . Daarmee worden de vergelijkingen (4.46) en (4.47):

$$\phi''_{\text{CO}} = -ID \frac{dc_1}{dx} + \frac{c_2}{c} (\phi''_{\text{CO}} + \phi''_{\text{Ni}(\text{CO})_4}) \quad (4.59)$$

$$\phi''_{\text{Ni}(\text{CO})_4} = -ID \frac{dc_2}{dx} + \frac{c_2}{c} (\phi''_{\text{CO}} + \phi''_{\text{Ni}(\text{CO})_4}) \quad (4.60)$$



In beide vergelijkingen is de driftflux geschreven als de som van de beide nettofluxen, zoals is afgeleid in vergelijking (4.48).

Als nu in vergelijking (4.59) de nikkelcarbonylflux geëlimineerd wordt met behulp van vergelijking (4.58), volgt:

$$\phi''_{\text{CO}} = -ID \frac{4c}{4c - 3c_1} \frac{dc_1}{dx} \quad (4.61)$$

Een CO-molbalans over een plakje tussen  $x$  en  $x + dx$  in de grenslaag levert op dat de CO-flux constant is, d.w.z. niet van  $x$  afhangt. Uit vergelijking (4.61) kan dan weer het CO-concentratieprofiel bepaald worden, met de randvoorwaarden  $x = 0 \rightarrow c_1 = 0$  en  $x = \delta \rightarrow c_1 = c$ :

$$c_1(x) = \frac{4}{3}c \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{x/\delta} \right\} \quad (4.62)$$

Hieruit kan weer de CO-flux via vergelijking (4.61) berekend worden:

$$\phi''_{\text{CO}} = - \left( \frac{4}{3} \ln 4 \right) \frac{IDc}{\delta} \quad (4.63)$$

In dit voorbeeld is dus geen sprake van wederzijdse diffusie, maar ook niet van eenzijdige diffusie. Hier is immers sprake van twee componenten die niet één op één tegen elkaar in diffunderen, maar in een verhouding die opgelegd wordt door de chemische reactie. De chemische reactie bepaalt dan ook de sterkte en de uitdrukking voor de driftflux.

⑤

### **Samenvatting**

Vaak is sprake van het netto-transport van één component door een medium heen (eenzijdige diffusie) of van meerdere componenten die tegen elkaar in diffunderen in een andere verhouding dan één op één. Alleen in het geval dat twee componenten echt uitgewisseld worden (wederzijdse diffusie), is de analogie met moleculair warmte-transport (geleiding) perfect. De Winkelman-proef met een verdampende stof laat eenvoudig zien dat er rekening gehouden moet worden met de zogenaamde driftflux  $\phi''$ . Deze brengt in het geval van eenzijdige diffusie in rekening dat er ook nog stroming kan ontstaan ten gevolge van (dreigende) drukverschillen, zodat er convectief transport optreedt. De algemene uitdrukking voor de molfluxen in een binair systeem luidt:

$$\phi''_{\text{A}} = -ID \frac{dc_{\text{A}}}{dx} + \phi'' \frac{c_{\text{A}}}{c}$$

$$\phi_B'' = -ID \frac{dc_B}{dx} + \phi'' \frac{c_B}{c}$$

met

$$\phi'' = \phi_A'' + \phi_B''$$

In het bijzondere geval van eenzijdige diffusie (d.w.z. de stroom van een van de twee componenten is gelijk aan nul) is dat transport van de diffunderende component te beschrijven met behulp van de wet van Stefan. Soms bepaalt een faseveranderingsproces de driftflux naar of van een grensvlak, soms een chemische reactie. De wet van Fick voldoet wel weer bij lage concentraties.

## 4.4 De algemene microbalans voor stoftransport

Tot zo ver is in dit hoofdstuk over massatransport uitsluitend diffusie (moleculair transport) aan de orde geweest en dan nog wel in één richting ten gevolge van een concentratiegradiënt in die richting. In het algemeen – zowel in industriële toepassingen (in procesapparaten) als in andere gevallen (in huis, in het milieu) – zal er sprake zijn van tijdsafhankelijke driedimensionale concentratieverdelingen: de concentratie is een functie van alle drie de plaatscoördinaten en van de tijd. Naast diffusie ten gevolge van concentratiegradiënten is er in het algemeen ook sprake van convectief transport van componenten als gevolg van stroming (in het algemeen weer een driedimensionaal snelheidsveld).

Deze algemene schets is niet anders dan die gegeven bij warmtetransport (§ 3.4). Deze situatie wordt dan ook weer geheel analoog beschreven met een algemene microbalans, waarvan de afleiding weer gaat aan de hand van een klein controlevolume  $dx dy dz$  zoals geschetst in figuur 3.21 (*cubic volume element method*).

Bij die afleiding is de basisvorm van een balans weer aan de orde en dienen aan de zes vlakken zowel het convectieve transport als de diffusie verantwoord te worden. Elke convectieve transportterm heeft de vorm  $v \cdot c$ . Zo gaat er door het linkerzijvlak van het kubusje een stroom

$$[v_x c]_{x,y,z} dy dz \quad (4.64)$$

naar binnen, en door het rechterzijvlak gaat

$$[v_x c]_{x+dx,y,z} dy dz \quad (4.65)$$

naar buiten. De nettobijdrage van het transport in de  $x$ -richting wordt daarmee

$$- \frac{\partial}{\partial x} (v_x c) dx dy dz \quad (4.66)$$

Voor het nettotransport in de twee andere richtingen gelden soortgelijke uitdrukkingen. Indien de diffusie gehoorzaamt aan de wet van Fick, dan komt door het linkerzijvlak door diffusie

$$- ID \left[ \frac{\partial c}{\partial x} \right]_{x,y,z} dy dz \quad (4.67)$$

het kubusje binnen en gaat door het rechterzijvlak door diffusie

$$- ID \left[ \frac{\partial c}{\partial x} \right]_{x+dx,y,z} dy dz \quad (4.68)$$

weer naar buiten. Netto geven deze twee termen

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ ID \frac{\partial c}{\partial x} \right] dx dy dz \quad (4.69)$$

Aan de andere vlakken van het kubusje gelden soortgelijke uitdrukkingen. Tenslotte heeft de accumulatieterm de vorm

$$\frac{\partial c}{\partial t} dx dy dz \quad (4.70)$$

en ziet de productieterm er uit als

$$r dx dy dz \quad (4.71)$$

waarin  $r$  de reactiesnelheid (in mol/m<sup>3</sup>s) voorstelt.

De algemene microbalans ontstaat dan door samenvoegen van de drie nettobijdragen van convectief transport, van de drie nettodiffusie termen, van de accumulatieterm en van de productieterm, en door alle te delen door  $dx dy dz$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x} (v_x c) - \frac{\partial}{\partial y} (v_y c) - \frac{\partial}{\partial z} (v_z c) + \\ & + ID \left\{ \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right\} + r \end{aligned} \quad (4.72)$$

Deze vergelijking is geheel analoog aan vergelijking (3.135) voor warmtetransport. Het concentratieveld oplossen vergt ook weer een oplossing van het snelheidsveld dat evenwel pas in hoofdstuk 5 aan de orde komt.

Voor veel toepassingen is echter geen kennis van het gehele snelheids- en concentratieveld nodig en kan volstaan worden met stofoverdrachtsmodellen waarin stofoverdrachtscoëfficiënten voor het stoftransport aan de rand(en) van het stromingsveld een hoofdrol spelen. De rest van dit hoofdstuk is dan ook geheel aan deze fenomenologische benadering gewijd.

### **Samenvatting**

Met behulp van de cubic volume element method is de algemeen geldige microbalans voor massatransport afgeleid. Bij deze analyse is wederom zowel convectief als moleculair stoftransport in rekening gebracht. Aangenomen is dat de wet van Fick geldt.

Met de gevonden microbalans kan de concentratieverdeling echter pas berekend worden als het snelheidsveld bekend is.

## **4.5 Stofoverdrachtscoëfficiënten bij convectie**

### **4.5.1 Algemene beschouwingen**

Net zoals in § 3.5 gedaan is voor warmtetransport, kan convectief stoftransport handzaam beschreven worden met als uitgangspunt het analogon van de afkoelingswet van Newton:

$$\phi_m = k A \Delta c \quad (4.73)$$

Deze vergelijking geldt in ieder geval binnen een enkele fase, maar kan bij een geschikte keuze van de drijvende kracht ook voor stofoverdracht over fasegrensvlakken gebruikt worden mits dan het begrip *totale stofoverdrachtscoëfficiënt* gehanteerd wordt (zie verder § 4.6).

De overdrachtscoëfficiënt  $k$  hangt in het algemeen af van  $\rho$ ,  $\langle v \rangle$ ,  $ID$ ,  $\mu$ ,  $D$ , enz.

$$k = k(\rho, \langle v \rangle, ID, \mu, D, \dots) \quad (4.74)$$

Ook hier mag weer een verre gaande analogie met convectief warmtetransport verwacht worden. Dezelfde overwegingen als besproken in § 3.5 gelden immers ook voor de keuze van de onafhankelijke variabelen die de stofoverdrachtscoëfficiënt kunnen beïnvloeden: alleen moeten nu grootheden typisch voor warmtetransport overgezet worden naar grootheden typisch voor stoftransport, bijvoorbeeld  $a \rightarrow ID$ . Met behulp van dimensie-analyse is vergelijking (4.74) dan te reduceren tot

$$Sh = Sh(Re, Sc, \dots) \quad (4.75)$$

Het Schmidt-getal  $Sc$ , gedefinieerd als  $\nu/ID$ , vervangt het Prandtl-getal en is gerelateerd aan de verhouding van de hydrodynamische grenslaagdikte en de stofoverdrachtsgrenslaagdikte. Zie ook de discussie over de rol van grenslagen bij convectief warmtetransport naar aanleiding van figuur 3.24. Het Reynolds-getal geeft ook nu de verhouding van convectief t.o.v. moleculair transport van impuls in de stroming weer.

Voor verschillende situaties zijn Sherwood-relaties voorhanden analoog aan die voor het Nusselt-getal bij warmtetransport. Deze worden hieronder nader besproken.

#### 4.5.2 **Stofoverdracht bij gedwongen convectie**

Geheel naar analogie met convectief warmtetransport gelden voor verschillende stromingsconfiguraties de volgende correlaties:

##### *Laminaire pijpstroming*

Mits de stroming zich heeft ingesteld qua snelheidsprofiel geldt voor stofoverdracht vanaf zeker punt  $x = 0$ :

$$Sh = 1,08 \left( \frac{IDx}{\langle v \rangle D^2} \right)^{-1/3} \quad \text{mits} \quad \frac{IDx}{\langle v \rangle D^2} < 0,05 \quad (4.76)$$

$$\langle Sh \rangle = 1,62 \left( \frac{IDL}{\langle v \rangle D^2} \right)^{-1/3} \quad \text{mits} \quad \frac{IDL}{\langle v \rangle D^2} < 0,05 \quad (4.77)$$

$$Sh = 3,66 \quad \text{mits} \quad \frac{IDx}{\langle v \rangle D^2} > 0,1 \quad (4.78)$$

Bij deze relaties behoren dezelfde overwegingen als vermeld bij warmtetransport (zie § 3.5.2).

##### *Turbulente pijpstroming*

*Filmtheorie* (zie ook § 3.5.2, figuur 3.24) kan ook hier gehanteerd worden om de stofoverdracht te modelleren, resulterend in  $k = ID/\delta$ ; voor berekeningen kan gebruik gemaakt worden van de correlatie

$$Sh = 0,027 Re^{0,8} Sc^{0,33} \quad \text{mits} \quad Re > 10^4 \quad \text{en} \quad Sc \geq 0,7 \quad (4.79)$$

##### *Gedwongen stroming om een bol*

Hiervoor geldt de correlatie:

$$Sh = 2,0 + 0,66 Re^{0,50} Sc^{0,33} \quad \text{mits} \quad 10 < Re < 10^4 \quad \text{en} \quad Sc \geq 0,7 \quad (4.80)$$

waarbij aangenomen is dat er geen driftflux optreedt (zie § 4.3).

**Voorbeeld 4.7. Een natte-wandkolom**

Lucht die een geringe concentratie  $c_0$  aan  $\text{SO}_2$  bevat, moet van deze  $\text{SO}_2$  ontdaan worden. Dit wordt gedaan in een *natte-wandkolom* (Eng. 'wetted-wall column') waarin de lucht opwaarts stroomt met een volumedebiet  $\phi_v$ , terwijl een loogoplossing naar beneden stroomt in de vorm van een dunne vloeistoffilm aan de binnenkant van de kolom – reden waarom dit apparaat ook wel aangeduid wordt als een *film contactor*. De dikte van deze vloeistoffilm is heel klein ten opzichte van de kolomdiameter  $D$ .

In dit tegenstroomproces moet de  $\text{SO}_2$  eerst getransporteerd worden vanuit de bulk van de luchtstroming naar het grensvlak met de vloeistoffilm; dit transport in de gasfase wordt vergemakkelijkt door in het turbulente gebied te opereren zodat de bulk van de luchtstroming radiaal goed gemengd is – met als resultaat dat de  $\text{SO}_2$  concentratie  $c$  alleen een functie van  $x$  is en de weerstand tegen stoftransport geconcentreerd is in een dunne luchtfilm die grenst aan de vloeistoffilm. Aan het lucht-vloeistof grensvlak wordt de  $\text{SO}_2$  overgedragen naar de vloeistof waar deze onmiddellijk reageert met het loog tot sulfiet – hetgeen resulteert in de waarde 0 voor de  $\text{SO}_2$  concentratie  $c_i$  aan het grensvlak.

De vraag is nu de uitdrukking af te leiden die beschrijft hoe onder stationaire condities de  $\text{SO}_2$  concentratie  $c$  in de lucht afneemt met  $x$ , waar  $x$  de (opwaartse) coördinaat is in de stromingsrichting. Verder wordt gevraagd hoe de totale hoeveelheid  $\text{SO}_2$  die per tijdseenheid in de kolom wordt overgedragen, hier aangeduid als  $\dot{M}$ , afhangt van de kolomhoogte  $L$ .

De vraag met betrekking tot het  $\text{SO}_2$  concentratieprofiel  $c(x)$  vraagt om het opstellen van een massabalans voor de component  $\text{SO}_2$  over een dun plakje met dikte  $dx$  op een willekeurige positie  $x$  ergens in de kolom voor een stationaire situatie, met als resultaat:

$$0 = \phi_v c|_x - \phi_v c|_{x+dx} - k \cdot \pi D \cdot (c - c_i) dx \quad (4.81)$$

Deze componentbalans leidt tot de differentiaalvergelijking

$$\frac{\pi}{4} D^2 v \frac{dc}{dx} = -k \cdot \pi D \cdot c \quad (4.82)$$

met de randvoorwaarde  $c(0) = c_0$ . De stofoverdrachtscoëfficiënt  $k$  dient gevonden te worden via het Sherwood-getal en met behulp van vergelijking (4.79), en is een constante (d.w.z., hangt niet van  $x$  af) – mits voldaan wordt aan de twee condities met betrekking tot  $Re$  en  $Sc$ . De integratie resulteert dan rechttoe rechtaan in

$$\frac{c}{c_0} = \exp\left(-\frac{4k}{vD} x\right) = \exp\left(-\frac{4D}{vD^2} \text{Sh } x\right) \quad (4.83)$$

De tweede vraag heeft betrekking op  $\dot{M}$ : deze grootte kan gevonden worden door òf de 3<sup>e</sup> term van het rechterlid van vergelijking (4.81) – die staat voor de lokale stofoverdrachtssnelheid – te integreren, met  $c_i = 0$ , van 0 tot  $L$ :

$$\dot{M} = \int_0^L k \cdot \pi D \cdot c(x) dx = \phi_v c_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{4kL}{vD}\right) \right\} \quad (4.84)$$

òf met behulp van de uitdrukking  $\phi_v \cdot \{c_0 - c(L)\}$  die, vergelijking (4.81) in aanmerking nemend, uiteraard hetzelfde resultaat geeft. In beide gevallen dient in de uitdrukking voor  $\dot{M}$  nog de uitkomst van vergelijking (4.83) ingevuld te worden voor  $c(x)$  danwel  $c(L)$ .

5

#### Voorbeeld 4.8. Een verdampende bol

Een bolletje van een zuivere stof X (met  $\rho = 1950 \text{ kg/m}^3$ ) wordt aan een draadje in een luchtstroom gehangen. De aangevoerde luchtstroom bevat de component X niet, heeft een temperatuur van  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ , een uniforme snelheid  $v$  van  $5 \text{ m/s}$  en een kinematische viscositeit  $\nu$  van  $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . De diameter van de bol aan het begin van het experiment is  $D_0 = 25 \text{ mm}$ . Temperatureffecten van de verdamping mogen buiten beschouwing gelaten worden.

Voor stof X geldt: molaire massa  $M = 120 \text{ g/mol}$ , dampspanning bij de heersende condities  $p^* = 0,01 \text{ bar}$ , en diffusiecoëfficiënt  $ID = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Bepaal het tijdstip waarop de diameter van de bol precies  $20 \text{ mm}$  is.

De massabalans voor de verdampende bol luidt:

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho \frac{\pi}{2} D^2 \frac{dD}{dt} = -\pi D^2 k \cdot \left( M \frac{p^*}{RT} - 0 \right) \quad (4.85)$$

Hierbij is ingevuld dat de concentratie van X in de lucht ver van de bol nul is en blijft. Verder is het bolvolume  $\pi D^3/6$  gedifferentieerd naar de tijd.

Vergelijking (4.85) is de differentiaalvergelijking die de verandering van de diameter van de bol als functie van de tijd beschrijft. Alvorens deze vergelijking te integreren dient eerst de relatie tussen  $k$  en  $D$  gevonden te worden. Deze relatie volgt in het algemeen uit vergelijking (4.80), maar deze heeft met het oog op de integratie van vergelijking (4.85) een lastige vorm. Uit vergelijking (4.80) volgt dat  $Sh$  tijdens deze verdamping minimaal de waarde 80 heeft. Met ingenieursnauwkeurigheid wordt de relatie tussen  $k$  en  $D$  vereenvoudigd tot

$$k = \frac{Sh ID}{D} = 0,66 ID \left( \frac{v}{\nu} \right)^{1/2} \left( \frac{v}{ID} \right)^{1/3} D^{-1/2} \quad (4.86)$$

Dit invullen in vergelijking (4.85) leidt tot:

$$D^{1/2} \frac{dD}{dt} = -C \quad \text{met} \quad C = 1,32 \frac{M}{\rho} \frac{p^*}{RT} ID^{2/3} \nu^{-1/6} \nu^{1/2} \quad (4.87)$$

Dankzij de randvoorwaarde  $D(0) = D_0$  luidt de oplossing van deze differentiaalvergelijking:

$$\frac{2}{3}(D^{3/2} - D_0^{3/2}) = -C \cdot t \quad (4.88)$$

Substitutie van de numerieke gegevens laat zien dat  $D = 20$  mm op  $t = 5,5 \cdot 10^3$  s, dus ongeveer 1,5 uur.

⑤

#### *Chilton en Colburn*

De hierboven behandelde analogie tussen convectief warmte- en stoftransport impliceert dat  $k$  uit kennis over  $h$  bepaald kan worden (en omgekeerd). In het bijzonder voor niet te kleine waarden van  $Re$  is immers in het algemeen te schrijven:

$$Nu = C Re^m Pr^n \quad (4.89)$$

en

$$Sh = C Re^m Sc^n \quad (4.90)$$

In alle hierboven vermelde gevallen is  $n$  gelijk aan  $1/3$  – wat te maken heeft met de verhouding van de respectievelijke grenslaagdiktes (zie ook de discussie naar aanleiding van figuur 3.24). Chilton en Colburn hebben hiervan gebruik gemaakt om twee nieuwe dimensieloze overdrachtsgetallen in te voeren: één voor warmteoverdracht ( $j_H$ ) en één voor stofoverdracht ( $j_D$ ):

$$j_H = \frac{Nu}{Re Pr^{1/3}} = \frac{h}{\rho c_p \nu} \left( \frac{\nu}{a} \right)^{2/3} \quad (4.91)$$

$$j_D = \frac{Sh}{Re Sc^{1/3}} = \frac{k}{\nu} \left( \frac{\nu}{ID} \right)^{2/3} \quad (4.92)$$

Deze kentallen relateren de snelheid van het warmte- resp. stofoverdrachtsproces (loodrecht op de hoofdstroom) aan het convectief transport van de hoofdstroom (zie ook figuur 3.23). Daarmee zijn deze kentallen een maat voor de effectiviteit van het overdrachtsproces. In die zin zijn  $j_H$  en  $j_D$  vergelijkbaar met het Reynolds-getal: zie vergelijking (2.49).

Combinatie van de vier bovenstaande vergelijkingen levert nu dus voor niet te kleine waarden van het Reynolds-getal dat deze beide nieuwe kentallen voor geometrisch gelijkvormige situaties gelijk aan elkaar zijn en slechts afhangen van het Reynolds-getal:



$$j_H = j_D = C \operatorname{Re}^{m-1} \quad (4.93)$$

De bevinding dat  $j_H$  en  $j_D$  aan elkaar gelijk zijn, kan met behulp van de definities van  $j_H$  en  $j_D$  ook herschreven worden tot een verband tussen de overdrachtscoëfficiënten  $k$  en  $h$ . Vanwege de definities (4.91) en (4.92) valt de convectieve snelheid weg uit het verband tussen  $k$  en  $h$ :

$$k = \frac{h}{\rho c_p} \cdot \left( \frac{ID}{a} \right)^{2/3} = \frac{h}{\rho c_p} \operatorname{Le}^{-2/3} \quad (4.94)$$

In uitdrukking (4.94) duikt het Lewis-getal ( $\operatorname{Le}$ ) op: zie voor de definitie vergelijking (2.38). Het blijkt dus dat  $k$  bepaald kan worden door  $h$  te meten en een aantal stofconstanten op te zoeken. Dit levert in de praktijk grote winst op, want voor  $h$  behoeven slechts relatief eenvoudige temperatuurmetingen te worden verricht, terwijl ter bepaling van  $k$  vaak zeer langdurige en moeizame stofoverdrachtsexperimenten moeten worden uitgevoerd. Deze laatste vaak ook nog eens voor verschillende stoffen. Met behulp van vergelijking (4.94) is dus slechts kennis van  $h$  en wat stofconstanten nodig. De relatie bevat niet het Reynolds-getal en ook niet expliciet de geometrie.

#### Voorbeeld 4.9. Aankoeking oplossen

Op de bodem van een ideaal geroerde tank (diameter  $D = 3$  m) is in de loop van de tijd een vaste stof aangekoekt. Om deze te verwijderen wordt de tank doorstroomd met een zuiver oplosmiddel waarin deze koek langzaam oplost. Het debiet van dit oplosmiddel is  $\phi_v = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ .

Men heeft warmteoverdrachtsmetingen aan deze tank uitgevoerd en gevonden dat

- de warmteoverdrachtscoëfficiënt  $h$  aan de bodem afhangt van het toerental van de roerder volgens  $h \propto N^{2/3}$ ,
- voor zeker toerental  $h = 3000 \text{ W/m}^2\text{K}$  is, en
- het vermogen  $P$  dat aan de roerder wordt toegevoerd, varieert met  $N^3$ .

Gegevens:

diffusiecoëfficiënt van de koek in het oplosmiddel	$ID = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
dichtheid oplosmiddel	$\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$
soortelijke warmte oplosmiddel	$c_p = 3000 \text{ J/kgK}$
warmtegeleidingscoëfficiënt oplosmiddel	$\lambda = 0,5 \text{ W/mK}$
oplosbaarheid van de koek in oplosmiddel	$c^* = 50 \text{ kg/m}^3$

Gevraagd wordt hoe groot tijdens dit langzaam verlopende oplosproces de constante oplossnelheid is voor het geval  $h = 3000 \text{ W/m}^2\text{K}$  en hoe deze oplossnelheid verandert als tweemaal zoveel vermogen aan de roerder wordt toegevoerd.

Zo'n oplosproces als beschreven betekent dat er stof overgedragen dient te worden vanuit een dunne verzadigde laag vlak boven de koek naar de bulk van het geroerde

vat, dat als gevolg van dit oplossen en de doorstroming met oplosmiddel een in de tijd constante concentratie opgeloste stof bevat. In deze stationaire toestand luidt de massabalans voor de in het oplosmiddel opgeloste koek ( $c$  = concentratie in de bulk) immers:

$$0 = -\phi_v c + k \frac{\pi}{4} D^2 (c^* - c) \quad (4.95)$$

De tweede term in het rechterlid is de gevraagde oplossnelheid, maar voor de berekening hiervan is kennis van de bulkconcentratie vereist. Daartoe moet vergelijking (4.95) opgelost worden en daarvoor is weer een waarde van  $k$  vereist. Omdat het warmteoverdrachtsexperiment onder dezelfde omstandigheden in dezelfde geometrie is verricht, kan met behulp van relatie (4.94) gevonden worden dat  $k = 3,1 \cdot 10^{-5}$  m/s. Hieruit volgt dan dat de concentratie in de bulk gelijk is aan  $c = 15,2$  kg/m<sup>3</sup>. Hiermee volgt voor de oplossnelheid:

$$\phi_m = k \frac{\pi}{4} D^2 (c^* - c) = 7,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s} \quad (4.96)$$

Bij verdubbeling van het toegevoerde vermogen geldt:

$$P_n = 2P \rightarrow N_n = 2^{1/3} N \rightarrow \\ h_n = 2^{2/9} h \rightarrow k_n = 2^{2/9} k = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} \quad (4.97)$$

en daarmee

$$c_n = 16,9 \text{ kg/m}^3 \rightarrow \phi_{m,n} = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s} \quad (4.98)$$

⑤

### 4.5.3 Stofoverdracht bij vrije convectie

In § 3.5.3 is besproken hoe warmte wordt getransporteerd als er sprake is van vrije convectie. Ook bij stofoverdracht is dit mechanisme mogelijk. De analogie is hier, zo mogelijk, nog groter dan bij gedwongen convectie. Het maakt immers niet uit of het voor vrije convectie benodigde dichtheidsverschil afkomstig is van uitzetting ten gevolge van een temperatuurverandering of veroorzaakt wordt door het oplossen van bijvoorbeeld een zout waardoor lokaal de dichtheid stijgt. Een voorbeeld waarbij stoftransport door vrije convectie speelt, betreft een verticale wand die bestaat uit zout en in contact staat met zuiver water. Op grote afstand van de plaat is het water zuiver met dichtheid  $\rho_\infty$ . De waterlaag direct naast de zoutplaat heeft een hogere dichtheid daar er zout in is opgelost. Er zal nu dus vanzelf vrije convectie opkomen.

Het effect van vrije convectie op de stofoverdracht wordt weer, precies als bij warmteoverdracht, in rekening gebracht met een Grashof-getal. Het Grashof-getal  $Gr$  gebruikt bij het beschrijven van vrije convectie, is niet voor niets al eerder, in relatie vergelijking (3.157), geschreven in termen van het optredende dichtheidsverschil:

$$\text{Gr} = \frac{x^3 g \Delta\rho}{\nu^2 \langle \rho \rangle} \quad (4.99)$$

In relaties tussen het Sherwood-getal en het Grashof-getal moet uiteraard wel het Schmidt-getal verschijnen daar waar bij warmteoverdracht het Prandtl-getal figureerde in relaties tussen het Nusselt-getal en het Grashof-getal. De stofoverdrachtscoëfficiënt  $k$  bij vrije convectie is dus te vinden uit

$$\text{Sh} = f(\text{Gr} \cdot \text{Sc}) \quad (4.100)$$

Voor stofoverdracht als gevolg van vrije convectie gelden weer dezelfde relaties als voor warmteoverdracht ten gevolge van vrije convectie (bij gelijke geometrie) mits de volgende vertalingen worden gemaakt:  $\text{Pr} \rightarrow \text{Sc}$  en  $\text{Nu} \rightarrow \text{Sh}$ .

### **Samenvatting**

Stofoverdracht bij gedwongen en vrije convectie is geheel analoog aan warmte-transport bij gedwongen en vrije convectie. Er hoeft enkel vertaald te worden volgens

$$\text{Nu} \leftrightarrow \text{Sh}$$

$$\text{Pr} \leftrightarrow \text{Sc}$$

Chilton en Colburn hebben hiervan gebruik gemaakt om, voor voldoende grote waarden van het Reynolds-getal,  $k$  en  $h$  aan elkaar te koppelen via uitsluitend stofconstanten.

## **4.6 Stofoverdracht over een fasegrensvlak**

### **4.6.1 Inleiding over hoe om te gaan met twee fasen**

Bij processen zoals het verdampen of oplossen van *zuivere* stoffen behoeft slechts het transport in één fase beschouwd te worden. De andere fase (de verdampende druppel, het oplossende deeltje) levert dan slechts de randvoorwaarde voor het concentratieveld. In de voorbeelden 2.2 en 4.8 is hiervoor de temperatuurafhankelijke *evenwichtsdampspanning*  $p^*$  gebruikt en in de voorbeelden 4.2, 4.3 en 4.9 de (temperatuurafhankelijke) *oplosbaarheid*  $c^*$ .

Feitelijk is dit het tweede belangrijke verschil tussen warmtetransport en massa-transport dat al eerder, in § 4.1, werd aangestipt (naast éézijdige diffusie). Als twee stoffen met elkaar in (thermisch) evenwicht zijn, dan hebben ze dezelfde temperatuur. Als echter twee stoffen met daarin opgelost stof A met elkaar in evenwicht zijn, dan zijn in het algemeen de concentraties  $c_A$  in beide stoffen verschillend. In § 4.6.2 zal

nader worden uitgelegd dat niet de concentraties van stof A maar de chemische potentialen van A in de twee fasen aan elkaar gelijk zijn.

Iets dergelijks is al aan de orde geweest in voorbeeld 4.2 met de oplosbaarheid van helium in glas; daar werd voor het eerst het concept *oplosbaarheid* geïntroduceerd om daarmee instantaan de evenwichtsconcentratie  $c^*$  in het glas aan het grensvlak met het gas te realiseren en deze daar continu te handhaven. Deze  $c^*$  verschilt van de dichtheid (in het geval van een zuiver gas) of van de concentratie (in het geval van een gasmengsel) van het aangrenzende gas, maar hangt daar wel van af.

Bij veel relevante processen hebben we niet te maken met zuivere stoffen, maar met mengsels of oplossingen. In veel gas-vloeistof gevallen, maar uitsluitend voor evenwichtssituaties kan gebruik gemaakt worden van de *wet van Henry*

$$p_A = H_A \cdot y_A \quad (4.101)$$

waarin de *Henry-coëfficiënt*  $H_A$  staat voor de evenredigheidscoëfficiënt tussen de molfractie  $y_A$  van opgelost gas A in een vloeistof en de partiëlespanning  $p_A$  van het gas boven de vloeistof<sup>18</sup>. De wet van Henry is goed te gebruiken bij verdunde oplossingen.

**Voorbeeld 4.10.** *Stofoverdracht naar een regendruppel*

Een starre, bolvormige regendruppel met een diameter  $D$  van 5 mm valt met een eenparige snelheid  $v$  verticaal omlaag door een laag lucht (met een dikte  $z_0$  van 250 m) waarin een hoge concentratie ammoniak heerst die uitgedrukt wordt in de (constante) dampspanning  $p_0$ . De ammoniakconcentratie in de regendruppel vlak voordat deze de lucht/ammoniakdeken bereikt, is nihil. De diffusiecoëfficiënt  $D$  van ammoniak in water bedraagt  $1,49 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$  (bij de heersende temperatuur van  $20^\circ\text{C}$ ) en de waarde van de Henry-coëfficiënt van ammoniak is  $2,8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . De regendruppel blijft al die tijd bolvormig en star (geen interne stromingen), de lucht met de ammoniak gedraagt zich als een ideaal gas, en de verdamping van water vanuit de druppel en het bijbehorende warmte effect mogen verwaarloosd worden.

De uiteindelijke vraag betreft de verhouding van de gemiddelde ammoniakconcentratie in de druppel op het moment dat deze door de lucht/ammoniak-deken is gevallen, tot de ammoniakconcentratie  $c_0$  in de lucht.

De stofoverdracht van de ammoniak vanuit de lucht de regendruppel in is een tijdsafhankelijk proces: de hoeveelheid ammoniak in de regendruppel zal wel blijven toenemen zo lang deze in contact is met het lucht/ammoniak-mengsel (en

<sup>18</sup>Zie ook Janssen, L.P.B.M. en M.M.C.G. Warmoeskerken, Transport Phenomena Data Companion, VSSD, Delft, 2006, p. 137

verzadigingscondities niet zijn bereikt). Verder dient bedacht te worden dat het massatransport in twee etappes verloopt: het externe transport van ammoniak vanuit de lucht naar het fasegrensvlak toe en het interne transport vanaf het fasegrensvlak verder de druppel in. Het externe stoftransport is convectief van aard, vanwege de valsnelheid van de druppel door het lucht/ammoniakmengsel, terwijl het interne stoftransport in het water (waar de moleculen veel dichter op elkaar zitten dan in de gasfase) diffusief is, waarbij individuele ammoniak-moleculen hun weg vinden tussen de watermoleculen door. Het lijkt dus geen gewaagde veronderstelling dat het interne, diffusieve stoftransport snelheids-limiterend is – de interne weerstand tegen stoftransport zal wel het grootst zijn – maar dit dient feitelijk wel kwantitatief geverifieerd te worden.

Aan het grensvlak stelt zich instantaan een evenwicht in, precies zoals in voorbeeld 3.5, maar dit betekent niet dat aan weerszijden van het fasegrensvlak de concentraties gelijk zijn: hier geldt juist de wet van Henry. Deze wet geldt dus in een dergelijk tweefase-stofoverdrachtsproces niet voor de gemiddelde concentraties in de bulk van de twee fasen zolang evenwicht nog niet is bereikt.

Klaarblijkelijk is de interne stofoverdrachtsweerstand daarmee dus zowel moleculair en tijdafhankelijk. Dan dient nagegaan te worden of er hier sprake is van penetratietheorie (korte tijden - § 4.2.5) of van instationaire lange-termijn diffusie (§ 4.2.6). Daarvoor is de contacttijd nodig: het tijdsinterval  $\tau$  die de regendruppel in contact is met het lucht/ammoniakmengsel. Deze contacttijd kan berekend worden uit de valsnelheid van de druppel die weer volgt uit een krachtenbalans over de regendruppel: zie § 2.3.3. Diezelfde valsnelheid is ook nodig om de externe stofoverdrachtscoëfficiënt te berekenen met behulp van de relevante Sh-relatie uit § 4.5.2.

Met een krachtenbalans wordt voor de valsnelheid gevonden:  $v = 11,7$  m/s; voor de contacttijd volgt dan  $\tau = z_0/v = 21,4$  s. Met deze valsnelheid wordt het Reynolds-getal  $Re = 3900$ ; daarmee volgt dankzij relatie (4.80) en met  $Sc = 0,64$  dat  $Sh = 37,5$  en  $k_e = 0,21$  m/s.

Na 21,4 s is de penetratiediepte – zie bijvoorbeeld vergelijking (4.40) – nog steeds slechts 0,32 mm: behoorlijk veel kleiner dan de druppeldiameter. Daarmee is hier dus sprake van korte tijden-diffusie; verder illustreert deze waarde van 0,32 mm hoe traag diffusie in een vloeistof verloopt of – met andere woorden – hoe groot de interne weerstand tegen stoftransport is. Weliswaar is op  $t = 0$  de interne stofoverdrachtscoëfficiënt  $k_i$  dankzij vergelijking (4.36) oneindig groot, maar neemt deze  $k_i$  volgens diezelfde vergelijking snel af tot de waarde  $4 \cdot 10^{-6}$  m/s en wordt dus al snel heel veel kleiner dan  $k_e$ . Verderop in deze § 4.6 zal overigens blijken dat in het geval van stofoverdracht over een fasegrensvlak voor het antwoord op de vraag in welke fase de weerstand voor stofoverdracht het grootst

is, niet alleen maar de verhouding  $k_e/k_i$  bepalend is. In dit geval ligt de weerstand voor het stoftransport echter echt in de vloeistoffase en is deze snelheidsbepalend.

De externe weerstand voor de stofoverdracht wordt dus verwaarloosd; daarmee wordt de ammoniakconcentratie aan de luchtkant van het fasegrensvlak gelijk aan de bulkconcentratie in de lucht en volgt voor de ammoniakconcentratie  $c_g$  aan de waterzijde van het fasegrensvlak dankzij de wet van Henry:  $c_g = 0,0034 \cdot p_0$ . De gemiddelde ammoniakconcentratie  $\langle c_i \rangle$  in de druppel wordt tenslotte gevonden met behulp van soortgelijke uitdrukkingen als de vergelijkingen (4.37) en (4.42):  $\langle c_i \rangle = 119 c_0$ . Dit laatste resultaat – een veel hogere gemiddelde concentratie in de druppel dan daarbuiten – illustreert dat in het geval van stofoverdracht van de ene naar de andere fase niet het concentratieverschil de drijvende kracht voor het stoftransport is.

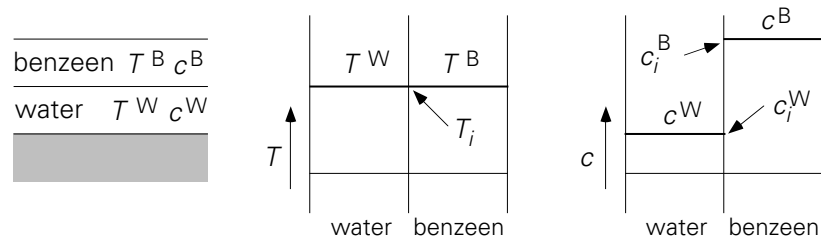
□

Met name bij multi-componentprocessen als destillatie, extractie, absorptie en stripping variëren de concentraties in beide fasen zowel in de tijd als in de plaats. In veel van dergelijke gevallen dienen transportlimitaties in beide fasen, aan weers-zijden van het fasegrensvlak, expliciet beschouwd te worden.

#### 4.6.2 De verdelingscoëfficiënt

In figuur 4.7a is bij wijze van voorbeeld een laag benzeen op een laag water aangebracht. Als dit systeem in evenwicht is, geldt dat de temperatuur in het water en in het benzeen hetzelfde is:  $T^W = T^B$ . Uiteraard is ook de temperatuur  $T_i$  van het grensvlak tussen beide stoffen hieraan gelijk (zie figuur 4.7b). De drijvende kracht voor warmtetransport is dus nul:  $\Delta T = T^W - T^B = 0$ .

Figuur 4.7c geeft de evenwichtssituatie weer voor een laagje benzeen op een laagje water als in beide azijnzuur is opgelost. In de geschetste evenwichtssituatie is de concentratie in elke laag uniform (anders zou er transport optreden, en dan spreken we niet van evenwicht!). In het algemeen geldt nu niet dat  $c^B$  en  $c^W$  aan elkaar gelijk zijn. Dat is het gevolg van verschillen in de relatie tussen de *chemische potentiaal* (die de interacties tussen moleculen van de opgeloste stof en het oplosmiddel in rekening brengt) en de concentratie: er is slechts sprake van *evenwicht* als een opgeloste stof in beide oplosmiddelen dezelfde chemische potentiaal ervaart en dat is in het algemeen bij verschillende concentraties.



Figuur 4.7.

Toch moet in de evenwichtssituatie gelden dat de drijvende kracht voor stoftransport gelijk aan nul is. Kennelijk is de drijvende kracht niet:  $\Delta c = c^B - c^W$ , want die is ook bij evenwicht ongelijk aan nul. Dit blijkt op te lossen met één coëfficiënt: de *verdelingscoëfficiënt* (Eng. ‘partition coefficient’)  $m$ , die zo gedefinieerd is dat in *evenwicht* de drijvende kracht nul is:

$$0 = c^B - m \cdot c^W \Leftrightarrow m = \left[ \frac{c^B}{c^W} \right]_{\text{evenwicht}} \quad (4.102)$$

De verdelingscoëfficiënt  $m$  is een eigenschap van de drie stoffen die in het spel zijn (in dit geval: benzeen, water en azijnzuur). In het systeem azijnzuur – benzeen – water heeft  $m$  een waarde groter dan één (zie figuur 4.7c).

#### Voorbeeld 4.11. Water beluchten

Een kleine hoeveelheid water van 20°C wordt verzadigd met zuurstof. Hiertoe brengt men het water in contact met een grote hoeveelheid lucht van 20°C en een druk van 1 bar. De massafractie zuurstof in de lucht is ongeveer 20%. Na geruime tijd beluchten is het water verzadigd en is de O<sub>2</sub>-concentratie  $c_w$  in het water gelijk aan 8 mg/l. Nu wordt het water in contact gebracht met lucht van dezelfde samenstelling en temperatuur, maar met een druk van 0,5 bar. Wat wordt in de evenwichtssituatie de O<sub>2</sub>-concentratie in het water?

Om de vraag te kunnen beantwoorden moet eerst de verdelingscoëfficiënt  $m$  uitgerekend worden. Hiervoor moet de O<sub>2</sub>-concentratie in de lucht van 1 bar bekend zijn. De dichtheid van lucht is te berekenen met de ideale gaswet, uit de samenstelling van lucht en met de molaire massa’s van N<sub>2</sub> en O<sub>2</sub>:  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ . De zuurstofconcentratie in lucht is dus  $c_{\text{air}} = 0,2 \cdot 1,2 = 0,24 \text{ kg/m}^3$  en is daarmee veel hoger dan de verzadigingsconcentratie in water:  $c_w = 0,008 \text{ kg/m}^3$ . Met de verdelingscoëfficiënt bij evenwicht gedefinieerd als  $m = c_{\text{air}}/c_w$  wordt voor de waarde voor  $m$  gevonden  $0,24/0,008 = 30$ .

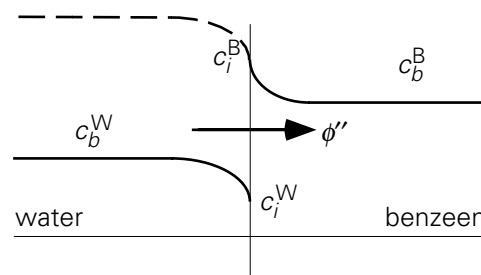
De concentratie van zuurstof in de lucht van 0,5 bar is  $c_{\text{air}} = 0,12 \text{ kg/m}^3$  en dus is de nieuwe concentratie in het water bij evenwicht (na lange tijd):  $c_w = 4 \text{ mg/l}$ . Uitgaande van water met 8 mg/l zuurstof opgelost, wordt zuurstof overgedragen

vanuit het water naar de lucht bij de lagere druk – ook al is de zuurstof-concentratie in de lucht hoger dan die in het water – totdat de zuurstofconcentratie in het water gedaald is tot 4 mg/l. ⑤

### 4.6.3 Stofoverdracht over een fasegrensvlak

Als er geen evenwicht (qua chemische potentiaal) is tussen beide lagen, vindt er stofoverdracht plaats over het fasegrensvlak. In figuur 4.8 is zo'n niet-evenwichtsituatie getekend: in dit voorbeeld van het azijnzuur-in-water/benzeen systeem geldt weliswaar  $c_b^W < c_b^B$  maar ook  $mc_b^W > c_b^B$ . De drijvende kracht voor het azijnzuurtransport van de bulk (aangeduid met subscript  $b$ ) van het water naar de bulk van de benzeen is daarmee  $\Delta c = mc_b^W - c_b^B$ , omdat voor de bulk van beide fasen niet voldaan wordt aan relatie (4.102). Aan het grensvlak stelt zich *wel* momentaan het evenwicht in:

$$c_i^B = mc_i^W \quad (4.103)$$



Figuur 4.8.

Daarmee heerst in de bulk van elk van beide vloeistoffen geen evenwicht meer en komt er in de bulk van beide fasen een transport op gang naar het grensvlak toe respectievelijk van het grensvlak af. Zoals te zien in figuur 4.8 beweegt de azijnzuur vanuit de bulk van het water naar het benzeen-watergrensvlak, over het grensvlak heen, en dan van het benzeen-watergrensvlak de bulk van de benzeen in. In essentie is dit transport analoog aan het warmte-transport in figuur 3.10.

De azijnzuurflux zal (mede) bepaald worden door de stofoverdrachtscoëfficiënten in de beide fasen:  $k_B$  en  $k_W$ . Analoog aan voorbeeld 3.5 geldt voor de fluxen in beide lagen afzonderlijk:

$$\phi_B'' = k_B (c_i^B - c_b^B) \quad (4.104)$$

$$\phi_W'' = k_W (c_b^W - c_i^W) \quad (4.105)$$

Aangezien een grensvlak kan geen massa herbergen, zijn beide fluxen aan elkaar gelijk en daarom zal hieronder verder het subscript bij de flux weggelaten worden.



Met behulp van vergelijking (4.103) kan vervolgens een uitdrukking gevonden worden voor  $c_i^W$ :

$$c_i^W = \frac{k_W c_b^W + k_B c_b^B}{k_W + m k_B} \quad (4.106)$$

Afgezien van  $m$  in de noemer lijkt vergelijking (4.106) sterk op vergelijking (3.85). Combineren van vergelijkingen (4.105) en (4.106) resulteert in

$$\phi'' = \left[ \frac{1}{k_B} + \frac{m}{k_W} \right]^{-1} (m c_b^W - c_b^B) \quad (4.107)$$

geheel analoog aan vergelijking (3.62) voor warmteoverdracht over een grensvlak heen. Te zien is dat de verdelingscoëfficiënt  $m$  niet alleen in de drijvende kracht opduikt, maar ook in de *totale stofoverdrachtscoëfficiënt*  $K$ :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{k_B} + \frac{m}{k_W} \quad (4.108)$$

waar - geheel analoog aan vergelijking (3.59) en aan de Wet van Ohm - staat dat de totale weerstand tegen stoftransport gelijk is aan de som van twee deelweerstand.

Het stelsel (4.107) - (4.108) kan - geheel gelijkwaardig - ook geschreven worden als:

$$\phi'' = \left[ \frac{1}{m k_B} + \frac{1}{k_W} \right]^{-1} (c_b^W - \frac{1}{m} c_b^B) \quad (4.109)$$

$$\frac{1}{K^*} = \frac{1}{m k_B} + \frac{1}{k_W} \quad (4.110)$$

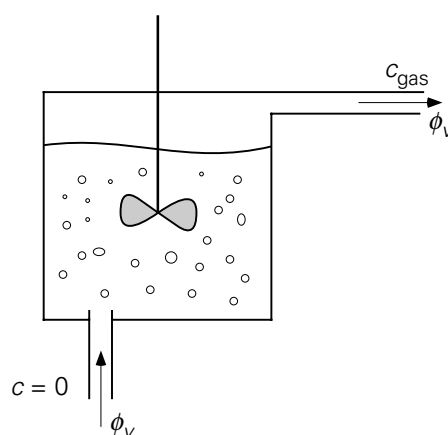
Precies als bij warmtetransport is het geoorloofd de kleinste van de twee deelweerstand tegen stoftransport te verwaarlozen als de verhouding van deze twee boven (of onder) een bepaalde waarde komt. Uit het bovenstaande volgt dat bij het bepalen in welke van de twee fasen zich de weerstand tegen het stoftransport bevindt, niet alleen  $k_W$  en  $k_B$  beschouwd dienen te worden, maar ook de verdelingscoëfficiënt  $m$  betrokken dient te worden:

$$\frac{\text{weerstand in benzeen}}{\text{weerstand in water}} = \frac{1/(m k_B)}{1/k_W} \quad (4.111)$$

Ook deze verhouding van partiële stoftransportweerstand wordt wel weer aangeduid als een *Biot*-getal.

**Voorbeeld 4.12. Een H<sub>2</sub>S-stripper**

In een reactor (zie figuur 4.9) wordt H<sub>2</sub>S geproduceerd in olie. Teneinde deze opgeloste H<sub>2</sub>S uit de olie te verwijderen (te 'strippen') wordt er continu waterstofgas door de olie geleid (debiet  $\phi_v$ ). De H<sub>2</sub>S wordt naar het gas overgedragen en stroomt daarmee de reactor uit. De toename van het gasdebiet dat hiervan een gevolg is, mag verwaarloosd worden. De reactor wordt intens geroerd, zodat gasfase en vloeistoffase beide als ideaal gemengd mogen worden beschouwd. Het volume van de gasfase in de reactor is  $V_g$ , dat van de vloeistoffase (olie) is  $V_l$ .



Figuur 4.9.

Vanaf een zeker tijdstip ( $t = 0$ ) wordt er evenwel geen H<sub>2</sub>S meer in de reactor geproduceerd. De concentratie H<sub>2</sub>S in de olie op  $t = 0$  wordt aangeduid als  $c_{10}$ . Door het intense roeren wordt de gasstroom in kleine belletjes opgebroken, met als resultaat een zeer groot fasegrensvlak  $A$  beschikbaar voor stofoverdracht; daardoor mag verondersteld worden dat de vloeistoffase en de gasfase praktisch in evenwicht zijn en dat geldt:  $c_1 = m c_g$ . Neem verder aan dat gedurende dit proces  $A$  constant is. Gevraagd wordt de H<sub>2</sub>S-concentratie in de olie te bepalen als functie van de tijd.

Als eerste stap zullen twee massabalansen voor het H<sub>2</sub>S opgesteld worden: één over de oliefase en één over de gasfase. Voor de drijvende kracht voor de stofoverdracht naar de gasfase wordt gekozen:  $\Delta c = c_1 - m c_g$ . Dit betekent dat de totale stofoverdrachtscoëfficiënt  $K$  gebaseerd is op de vloeistoffase. De beide balansen luiden:

$$V_l \frac{dc_1}{dt} = -K A (c_1 - m c_g) \quad (4.112)$$

$$V_g \frac{dc_g}{dt} = -\phi_v c_g + K A (c_1 - m c_g) \quad (4.113)$$

Bij het opstellen van vergelijking (4.113) is gebruikt dat het inkomende gas geen H<sub>2</sub>S bevat.

In een proces als dit zit de weerstand voor het stoftransport vaak in de vloeistoffase: dan geldt  $K \approx k_1$ . In dit soort gevallen spreekt men dan vaak van de grootte  $k_1 a$  met het specifiek uitwisselend fasegrensvlak  $a = A/V_1$ .

Nu is er een probleem met de vergelijkingen (4.112) en (4.113): er is immers gegeven dat de vloeistoffase en de gasfase praktisch in evenwicht zijn. Dat zou betekenen dat de drijvende kracht  $\Delta c = c_1 - mc_g$  nul is en er dus *geen* H<sub>2</sub>S-overdracht van de olie naar het gas is. Dat is echter geen juiste voorstelling van zaken. Wat er in werkelijkheid gebeurt, is dat de drijvende kracht vrijwel nul is geworden juist omdat het product  $KA$  zeer groot is (door het intense roeren). De overdracht van olie naar gas is dus het product van '∞' en '0'. Dit probleem wordt elegant omzeild door beide vergelijkingen op te tellen: dan verdwijnt de term voor de overdracht van olie naar gas:

$$V_1 \frac{dc_1}{dt} + V_g \frac{dc_g}{dt} = -\phi_v c_g \quad (4.114)$$

Hieruit kan  $c_g$  geëlimineerd worden met het gegeven dat in de reactor praktisch evenwicht tussen de beide fasen heerst:  $c_g = c_1/m$ . Dit levert

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{\phi_v}{m V_1 + V_g} c_1 \quad (4.115)$$

en met de randvoorwaarde op  $t = 0 \rightarrow c_1 = c_{10}$  volgt dan

$$c_1(t) = c_{10} \exp\left(-\frac{\phi_v}{m V_1 + V_g} t\right) \quad (4.116)$$

⑤

#### 4.6.4 **Penetratietheorie bij een fasegrensvlak**

De afleiding in § 4.6.3 is overigens ook toepasbaar in niet-stationaire situaties. Ook dan worden de fluxen die naar en van het grensvlak gaan als uitgangspunt genomen. Deze twee zijn uiteraard te allen tijde gelijk aangezien een grensvlak geen massa kan opnemen.

In de eerste fase van een proces waarbij twee (niet-mengbare) vloeistoffen met elkaar in contact worden gebracht zodat een (derde) component van de ene in de andere laag kan gaan diffunderen, kan penetratietheorie toegepast worden – precies

als bij tijdsafhankelijke warmtegeleiding (§ 3.3). In ieder van de twee fasen wordt de stofoverdrachtscoëfficiënt dan gegeven door

$$k = \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \quad (4.117)$$

geheel analoog aan de modelbeschrijving gepresenteerd in § 3.3.2 en § 3.3.3.

Relatie (4.117) kan gesubstitueerd worden in de uitdrukking voor de massaflux  $\phi_m''$  om vergelijkingen zoals (4.104) en (4.105) te verkrijgen. Natuurlijk zijn penetratietheorie en de betrokken uitdrukkingen alleen geldig zolang de penetratiediepte  $\sqrt{\pi D t}$  voldoende kleiner is dan de dikte van de laag waarin de diffusie plaatsvindt – d.w.z. zolang de drijvende kracht voor diffusie constant blijft en gelijk aan de waarde  $|c_{b0} - c_i|$  op het moment  $t = 0$  wanneer de twee fasen met elkaar in contact worden gebracht. [Voor langere tijden is men aangewezen op de relaties voor lange tijden analoog aan die welke in § 3.3.5 zijn behandeld.]

⑤

#### Voorbeeld 4.13. Azijnzuur-benzeen-water

Men brengt een laagje benzeen (laagdikte 1 cm) voorzichtig (zonder dat er stroming ontstaat) aan op een laagje zuiver water (eveneens 1 cm dik). In het benzeen is azijnzuur opgelost met een concentratie van  $10^{-2}$  mol/l. De verdelingscoëfficiënt  $m$ , gedefinieerd als de verhouding tussen de azijnzuurconcentraties in benzeen en water bij evenwicht, is 10. De diffusiecoëfficiënten van azijnzuur in benzeen en in water zijn respectievelijk  $0,5 \cdot 10^{-9}$  m<sup>2</sup>/s en  $1,5 \cdot 10^{-9}$  m<sup>2</sup>/s.

Er is een aantal vragen te beantwoorden over de situatie in deze twee lagen 10 minuten nadat de lagen met elkaar in contact zijn gebracht:

- Bepaal de indringdiepten in beide lagen.
- Bereken de grensvlakconcentraties.
- Hoe groot zijn de concentratiegradiënten aan beide zijden van het grensvlak?

De indices B en W duiden weer benzeen resp. water aan, terwijl  $b$  en  $g$  dienen om een waarde in de bulk resp. aan het grensvlak aan te duiden.

Indringdiepte van azijnzuur in water na 10 minuten:  $\sqrt{\pi D_W t} = 1,7$  mm

Indringdiepte van azijnzuur in benzeen na 10 minuten:  $\sqrt{\pi D_B t} = 0,97$  mm

Beide indringdiepten zijn duidelijk kleiner dan de laagdikte en dus is toepassing van de penetratietheorie toegestaan. De fluxen aan beide zijden van het grensvlak zijn daarmee ook bekend; bovendien zijn deze gelijk aan elkaar, want alle azijnzuur die uit het benzeen komt, gaat het water in. In formulevorm:

$$\phi_m'' = \sqrt{\frac{ID_B}{\pi t}} (c_b^B - c_i^B) = \sqrt{\frac{ID_W}{\pi t}} (c_i^W - c_b^W) \quad (4.118)$$

Omdat op elk willekeurig tijdstip moet gelden dat de beide fluxen aan elkaar gelijk zijn, volgt uit vergelijking (4.118) een verband tussen de vier betrokken concentraties. Bovendien verhouden de grensvlakconcentraties zich als  $m$ ; ofwel  $c_i^B = 10 c_i^W$ . Met de gegevens  $c_b^B = 10^{-2}$  mol/l en  $c_b^W = 0$  volgt nu:

$$c_i^B = 0,85, \quad c_b^B = 8,5 \text{ mmol/l}, \quad c_i^W = 0,085 \quad \text{en} \quad c_b^W = 0,85 \text{ mmol/l}$$

De gradiënten aan het grensvlak volgen nu uit de concentraties en de indringdiepten:

$$\left. \frac{dc^W}{dx} \right|_i = - \frac{c_i^W - c_b^W}{\sqrt{\pi ID_W t}} = - 0,5 \text{ mol l}^{-1}\text{m}^{-1} \quad (4.119)$$

$$\left. \frac{dc^B}{dx} \right|_i = - \frac{c_b^B - c_i^B}{\sqrt{\pi ID_B t}} = - 1,55 \text{ mol l}^{-1}\text{m}^{-1} \quad (4.120)$$

⑤

Vergelijking van dit voorbeeld met voorbeeld 3.5 (bitumen op eikenhout) laat zien dat deze opgaven in essentie identiek zijn. Het enige verschil betreft de rol van de verdelingscoëfficiënt  $m$ . Als deze nu kunstmatig ingevoerd zou worden bij warmtetransport (met  $m = 1$  bij evenwicht), dan zijn de beide uitdrukkingen geheel identiek.

### Samenvatting

Bij stofoverdracht over een fasegrensvlak is er een belangrijk verschil met warmtetransport: in evenwicht zijn de concentraties van component X in twee fasen A en B die met elkaar in contact zijn, in het algemeen *niet* aan elkaar gelijk. Ze verhouden zich volgens de zogenaamde verdelingscoëfficiënt  $m$ , die een eigenschap is van de drie betrokken stoffen A, B en X.

Dit heeft consequenties voor de drijvende kracht: deze is  $\Delta c = c^A - m \cdot c^B$ , waarbij  $m$  gedefinieerd is door voor de evenwichtssituatie in deze uitdrukking  $\Delta c = 0$  te stellen. Dit betekent tevens dat de uitdrukking voor de totale stofoverdrachts-coëfficiënt naast  $k_A$  en  $k_B$  ook  $m$  bevat. Voor de flux  $\phi_m''$  van X geldt

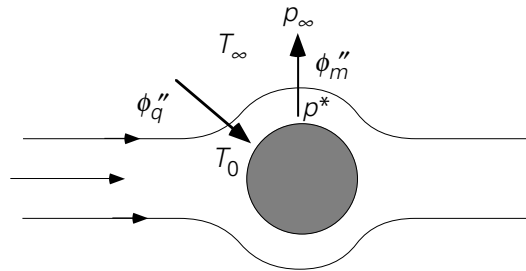
$$\phi_m'' = \left[ \frac{1}{k_A} + \frac{m}{k_B} \right]^{-1} (c^A - m c^B)$$

waar  $\left[ \frac{1}{k_A} + \frac{m}{k_B} \right]^{-1}$  de uitdrukking is voor de overall stofoverdrachtscoëfficiënt  $K$ .

## 4.7 Gelijktijdig transport van warmte en massa: de natte-boltemperatuur

In deze paragraaf zal tenslotte geanalyseerd worden wat er gebeurt als er gedwongen stroming is langs een vochtig oppervlak. Het valt te verwachten dat in zo'n situatie de vloeistof verdampt: een kwestie van stoftransport. Gezien de warmte die voor verdamping vereist is, heeft deze verdamping echter tevens tot gevolg dat het oppervlak afkoelt en dus zal er een warmtestroom op gang komen vanuit de omgeving naar het vochtige lichaam. We zullen dit proces bekijken aan de hand van het volgende voorbeeld.

Beschouw een bolvormige vloeistofdruppel in een gasstroom, die niet met de damp van de vloeistof is verzadigd. Aanvankelijk heeft de vloeistof dezelfde temperatuur als het gas. Door de verdamping van de vloeistof koelt de druppel af en uiteindelijk wordt een stationaire toestand bereikt (zie figuur 4.10). Veronderstel bij de analyse dat de totale hoeveelheid vloeistof die verdampt, zo gering is dat de diameter van de bol constant blijft.



Figuur 4.10.

In deze quasi-stationaire situatie moet er vanuit de lucht zoveel warmte aangevoerd worden dat deze juist de verdampingswarmte, die samenhangt met de massastroom, compenseert:

$$\phi_q = \phi_m \cdot \Delta h_v \quad (4.121)$$

waarin  $\Delta h_v$  de *verdampingsenthalpie* van de vloeistof voorstelt.

De massastroom hangt af van de drijvende kracht  $\Delta c$  binnen de gasfase en de stofoverdrachtscoëfficiënt  $k$  in de gasfase. Voor de warmtestroom geldt, geheel analoog, dat deze afhangt van  $\Delta T$  en  $h$ :

$$\phi_m = \pi D^2 k \frac{M}{RT} (p^* - p_\infty) \quad (4.122)$$

$$\phi_q = \pi D^2 h (T_\infty - T_0) \quad (4.123)$$

In deze twee vergelijkingen staat  $M$  voor de molaire massa van de vloeistof,  $p^*$  voor de dampspanning van de stof bij temperatuur  $T_0$ ,  $T_\infty$  voor de temperatuur van het inkomende gas,  $p_\infty$  voor de dampspanning van het inkomende gas (die uiteraard kleiner moet zijn dan  $p^*$ , want anders kan er geen verdamping plaats vinden), en  $T_0$  voor de *natte-boltemperatuur* (Eng. ‘wet bulb temperature’) – dat wil zeggen de temperatuur die de druppel in de evenwichtssituatie aanneemt; voor  $T$  in vergelijking (4.122) kiest men meestal het gemiddelde van  $T_\infty$  en  $T_0$ .

Substitueren van de vergelijkingen (4.122) en (4.123) in (4.121) geeft

$$\frac{p_\infty - p^*}{T_\infty - T_0} = - \frac{RT}{M \Delta h_v} \frac{h}{k} \quad (4.124)$$

Voor de twee onbekenden  $T_0$  en  $p^*$  zijn twee vergelijkingen nodig: (4.124) en een uitdrukking voor de evenwichtsdampspanning  $p^*(T)$ . Voor een grafische oplos-techniek wordt veelal het *vochtigheidsdiagram* (Eng. ‘humidity chart’) van figuur 4.11 (voor water-lucht bij 1 bar) gebruikt. Vanwege het minteken in het rechterlid van vergelijking (4.124) hebben in figuur 4.11 de rechte lijnen – aangeduid met de term ‘*adiabatische verzadigingslijn*’ (Eng. ‘adiabatic saturation line’) – alle een negatieve hellingshoek.

Indien  $Re$  niet te klein is, geldt dankzij Chilton en Colburn voor  $h/k$

$$\frac{h}{k} = \rho c_p Le^{2/3} \quad (4.125)$$

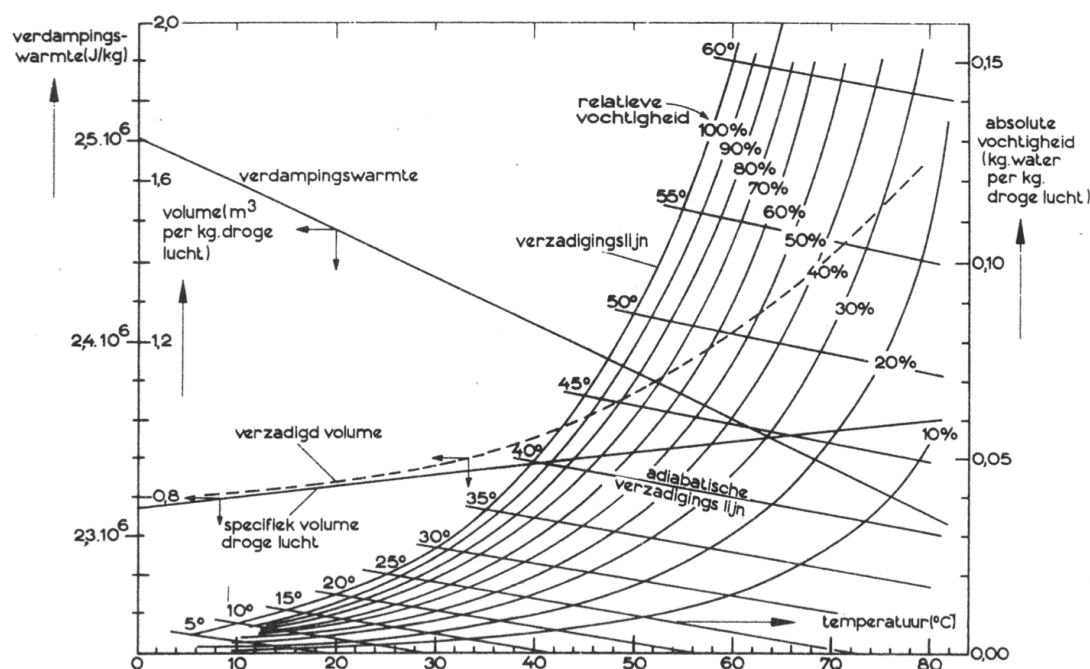
waarin  $Le$  staat voor het *Lewis-getal*: zie ook vergelijking (2.38). Dit betekent dat voor niet te kleine  $Re$  geldt:

$$\frac{p_\infty - p^*}{T_\infty - T_0} = - \frac{RT \rho c_p}{M \Delta h_v} Le^{2/3} \quad (4.126)$$

Vergelijking (4.126) is eigenlijk een vergelijking voor  $T_0$ , want de *evenwichtsdampspanning*  $p^*$  is een functie van de temperatuur van de vloeistof en dus moet voor  $p^*$  de waarde op de *dampspanningslijn* bij  $T_0$  genomen worden. Merk op dat in vergelijking (4.126) noch het Reynolds-getal noch de boldiameter voorkomt! Ook voor condities van uitsluitend moleculair transport rond de bol (getypeerd door  $Nu = 2$  en  $Sh = 2$ ) geldt relatie (4.126).

Het principe van de natte-boltemperatuur wordt o.a. gebruikt om de vochtigheid van een gasstroom mee te bepalen. Bij veel droog- en bevochtigingsvraagstukken wordt – in plaats van met dampspanningen – vaak gewerkt met de *absolute vochtigheid*  $\mathcal{H}$  (Eng. ‘absolute humidity’) die is gedefinieerd als de massa (in kg) waterdamp in een gas per kg droog gas: zie ook onderstaand vochtigheidsdiagram. Ook begrippen als

*relatieve vochtigheid* – de waterdampdruk in een gasmengsel gedeeld door de verzadigingsdruk van waterdamp bij dezelfde temperatuur – en *dauwpunt* (Eng. ‘dew point’) – de temperatuur waarbij condensatie van waterdamp begint als vochtig gas wordt afgekoeld: m.a.w. de temperatuur waarbij vochtig gas verzadigd is met waterdamp – duiken dan op.



Figuur 4.11.

Hieronder volgen enkele voorbeelden voor het gebruik van het vochtigheidsdiagram.

#### Voorbeeld 4.14. Dauwpunt bepalen

Wat zijn de absolute vochtigheid en de relatieve vochtigheid van lucht van 70 °C, dat een natte-boltemperatuur heeft van 55 °C? Wat is het dauwpunt?

Het snijpunt van de adiabatische verzadigingslijn van deze lucht met de verzadigingslijn ligt bij 55 °C. We gaan nu langs deze adiabatische verzadigingslijn naar rechts tot 70 °C en lezen dan af dat de absolute vochtigheid 0,105 kg water/kg droge lucht is. Tevens lezen we af dat de relatieve vochtigheid 39% is.

Afkoelen van de lucht verhoogt de relatieve vochtigheid; de absolute vochtigheid verandert daarbij niet. In het vochtigheidsdiagram lezen we af dat lucht met een absolute vochtigheid van 0,105 kg water/kg droge lucht verzadigd is bij 53,7 °C. Dit is het gezochte dauwpunt.

⑤

#### Voorbeeld 4.15. Condenseren door afkoelen

Dezelfde lucht wordt afgekoeld tot 30 °C.

Hoeveel waterdamp zal er per m<sup>3</sup> verzadigde lucht van 30 °C condenseren?



In het vochtigheidsdiagram lezen we af dat verzadigde lucht van 30 °C 0,027 kg water/kg droge lucht bevat. Er is dus  $0,105 - 0,027 = 0,078$  kg water/kg droge lucht gecondenseerd. In het vochtigheidsdiagram lezen we tevens af dat het verzadigd volume voor lucht van 30 °C 0,88 m<sup>3</sup>/kg droge lucht is. De hoeveelheid gecondenseerde damp is dus

$$\frac{0,078}{0,88} = 0,089 \text{ kg water/m}^3 \text{ verzadigde lucht van } 30 \text{ °C.}$$

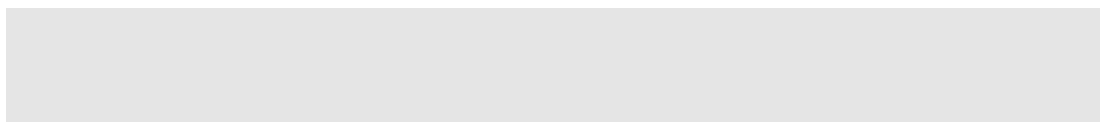
⑤

Overigens is dit principe van gelijktijdig transport van massa en warmte niet beperkt tot vloeistof-gas systemen. Ook bij het *oplossen* van bijvoorbeeld kristallen in een vloeistof treedt dit gecombineerde effect van stof- en warmteoverdracht op.

### **Samenvatting**

Een van de fraaiste illustraties van de analogie tussen warmte- en stofoverdracht wordt gevonden bij de natte bol: waar warmtetransport de verdampingswarmte aanvoert die nodig is voor het verdampingsproces (het stoftransport). De natte-boltemperatuur is onder een aantal condities onafhankelijk van aanstroomcondities en bolafmeting.

Overigens illustreert de natte bol verder dat stoftransport in een aantal gevallen gelimiteerd wordt door warmteoverdracht. In ieder geval speelt warmtetransport een rol bij processen waarbij een faseovergang in het geding is.



# 5 Stromingsleer

## 5.1 Inleiding

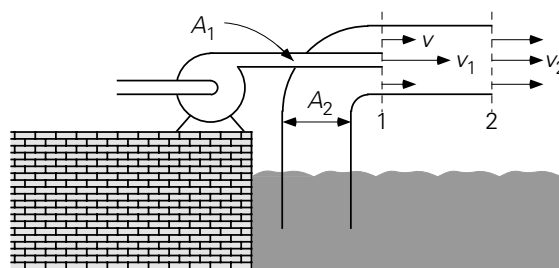
In hoofdstuk 1 zijn balansen geïntroduceerd; deze bleken daar, en ook later in de daaropvolgende hoofdstukken, uitermate handig bij het oplossen van allerlei transportproblemen. De vorm van deze balansen is steeds hetzelfde en luidt:

$$\frac{d}{dt} = \text{in} - \text{uit} + \text{productie} \quad (5.1)$$

Aan het begin van dit hoofdstuk over stromingsleer lijkt het geschikt aan de hand van balansen nog eens te demonstreren hoe stroming verkregen wordt door het toevoeren van impuls (eenheid: Ns) en hoe een stroming gehoorzaamt aan en beschreven wordt door de massa-, impuls- en energiebalansen.

### Voorbeeld 5.1. Een vuilwaterpomp

In een bassin bevindt zich water met daarin opgelost een zeer corrosieve stof. Dit water moet via een transportleiding overgepompt worden in tanks. De beschikbare pomp mag echter niet in aanraking komen met de corrosieve stof. Daarom is een opstelling gebouwd zoals geschetst in figuur 5.1.



Figuur 5.1.

Aan de perszijde van de pomp wordt een dunnere pijp (doorsnede  $A_1 = 20 \text{ cm}^2$ ) aangesloten die vervolgens aan de buitenzijde van een bocht de transportleiding met doorsnede  $A_2 = 180 \text{ cm}^2$  in wordt gestoken. De pomp perst schoon water met een uniforme snelheid  $v_1 = 10 \text{ m/s}$  de transportleiding in. Een deel van de impuls van dit water wordt overgedragen naar het vuile water in de transportleiding. Op deze manier wordt water uit het bassin opgezogen en naar de tanks gepompt. Op enige afstand (bij punt 2 in de figuur) van het mengpunt (punt 1) is de snelheid weer uniform over  $A_2$  en gelijk aan  $v_2 = 2 \text{ m/s}$ . Deze situatie mag als stationair in de tijd

worden beschouwd. Voorts mag (voor de eenvoud) wrijving aan de wanden van de leidingen wel verwaarloosd worden en tenslotte mag aangenomen worden dat de dichtheid van het schone en het vuile water gelijk is.

Allereerst volgt de snelheid  $v$  van het vuile water op punt 1 dankzij een *massabalans* over het gehele volume tussen 1 en 2 uit de gegeven snelheden  $v_1$  en  $v_2$  :

$$0 = \rho A_1 v_1 + \rho (A_2 - A_1) v - \rho A_2 v_2 \quad (5.2)$$

Invullen van de gegeven waarden geeft dat de snelheid  $v$  gelijk is aan 1 m/s en dat het debiet van het vuile water 16 l/s bedraagt.

In een balans voor de *impuls* in de stromingsrichting moeten alle krachten die in die richting werken meegenomen worden. Aangezien wrijving aan de wanden verwaarloosd mag worden, zijn wandwrijvingskrachten langs de pijpwanden niet aan de orde. En omdat ook de zwaartekracht niet in de stromingsrichting werkt, blijven alleen drukkrachten op de in- en uitteevlakken bij de punten 1 en 2 over. In het gehele vlak 1 heerst wel een uniforme druk  $p_1$ : er is immers daar geen stroming in de radiale richting. De impulsbalans over hetzelfde controlevolume tussen de vlakken 1 en 2 luidt daarmee dan:

$$0 = \rho A_1 v_1 \cdot v_1 + \rho (A_2 - A_1) v \cdot v - \rho A_2 v_2 \cdot v_2 + A_2 p_1 - A_2 p_2 \quad (5.3)$$

Eliminatie van  $v$  uit vergelijking (5.3) met behulp van vergelijking (5.2) levert voor de drukval van 1 naar 2:

$$p_1 - p_2 = -\rho \frac{A_1}{A_2 - A_1} (v_1 - v_2)^2 < 0 \quad (5.4)$$

Er is dus geen drukval, maar een druktoename:  $p_2 = p_1 + 8 \cdot 10^3$  Pa! Dat bij punt 1 een *onderdruk* heerst ten opzichte van bij punt 2, komt door de overdracht van impuls vanuit de persleiding van de pomp. Deze impulstoevoer is nu de drijvende kracht achter de stroming: deze zuigt als het ware het vuile water uit het bassin. Waar de snelheden tussen schoon en vuil water vereffend zijn en de zuigende werking voorbij, is de druk  $p_2$  hoger, juist vanwege de toevoer van impuls door vlak 1 die daar nog niet tot uiting komt in de (statische) druk  $p_1$ . Vanuit de Bernoulli-vergelijking is bekend dat kinetische energie omgezet kan worden in 'druk'-energie en dat afremming drukverhoging kan opleveren.

De impulsoverdracht naar het vuile water gaat overigens gepaard met dissipatie van mechanische energie. Dit volgt weer uit de *mechanische-energiebalans*:

$$0 = \rho A_1 v_1 \left( \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} \right) + \rho (A_2 - A_1) v \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_1}{\rho} \right) +$$

$$- \rho A_2 v_2 \left( \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} \right) - \phi_m e_{fr} \quad (5.5)$$

Elimineren van  $v$  m.b.v. de massabalans (5.3), elimineren van  $p_1 - p_2$  m.b.v. van de impulsbalans (5.4), en delen door de massastroom levert voor de dissipatie:

$$\begin{aligned} e_{fr} &= \frac{A_1 v_1}{A_2 v_2} \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{A_2 v_2 - A_1 v_1}{A_2 v_2} \frac{1}{2} \left( \frac{A_2 v_2 - A_1 v_1}{A_2 - A_1} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{A_1}{A_2 - A_1} (v_1 - v_2)^2 \\ &= 18 \text{ J/kg} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dit verlies aan mechanische energie gaat uiteraard in opwarming van het water zitten. De temperatuurstijging kan weer bepaald worden met de *thermische-energiebalans*. Neem daartoe aan dat het water bij punt 1 op uniforme temperatuur  $T_1$  is. De inwendige energieconcentratie  $u$  van het vuile water is nu bij punt 1 dus gelijk aan die van het schone water (dezelfde  $T$  en  $c_p$ ). De thermische-energiebalans over het controlevolume luidt:

$$0 = \rho A_1 v_1 \cdot u_1 + \rho (A_2 - A_1) v \cdot u_1 - \rho A_2 v_2 \cdot u_2 + \phi_m e_{fr} \quad (5.7)$$

en is met behulp van de massabalans (5.2) gemakkelijk te vereenvoudigen tot

$$u_2 - u_1 = e_{fr} \rightarrow T_2 - T_1 = \frac{e_{fr}}{c_p} = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ K} \quad (5.8)$$

•

Over de stroming in dit voorbeeld konden uitspraken gedaan worden, omdat informatie gegeven was over de snelheden  $v_1$  en  $v_2$  (en daarmee over drijvende kracht en resulterend totaaldebiet). Uit deze informatie vloeiden, dankzij de verschillende balansen, waarden voor vuil-waterdebiet, drukverschil en temperatuurstijging voort. Eigenlijk is dit een soortgelijke situatie als in voorbeeld 1.20 waar het debiet en het drukverschil tussen twee posities in een stroming waren gegeven. In de praktijk is zoveel informatie zeker in een ontwerpsituatie niet beschikbaar.

Meestal is slechts één gegeven bekend en wordt de rest gevraagd: hoe groot wordt voor een gegeven drukverschil (of, in het algemeen, een drijvende kracht) het debiet, of hoe groot drukverschil moet aangelegd worden om een bepaald debiet te verwezenlijken. Dan dient wel meer bekend te zijn over de energiedissipatie die daarmee gepaard gaat. Dan gaat het dus over de  $e_{fr}$ -term in de mechanische-energiebalans als geïntroduceerd in hoofdstuk 1.

In het eerste deel van dit hoofdstuk ligt de nadruk op *technische stromingsleer*: hoe energiedissipatie in rekening kan worden gebracht met behulp van empirische wrijvings- of drukvalcoëfficiënten. Eerst passeren een aantal verschillende stroommeters de revue (in § 5.2) en vervolgens wordt het verband tussen debiet door en drukval over transportleidingen (§ 5.3 en § 5.4) en gepakte bedden (§ 5.5) behandeld. Hierbij spelen balansen weer een belangrijke rol.

In het tweede deel van dit hoofdstuk komen laminaire stromingen aan de orde. De techniek die bij het beschrijven van deze stromingen gebruikt wordt, behelst het opstellen van krachtenbalansen over typische volume-elementjes ergens in het stromingsveld (microbalansen). Bij laminaire stromingen wordt het transport van impuls loodrecht op de stromingsrichting (meestal in rekening gebracht met behulp van schuifspanningen: zie § 2.1.4) onderhouden door de moleculen; daarom moet onderscheid gemaakt worden tussen fluïda die de *wet van Newton* betreffende het verband tussen schuifspanning en snelheidsgradiënt (ofwel betreffende *moleculair impulstransport*) gehoorzamen (de zogenaamde *Newtonse vloeistoffen*) en fluïda die dat niet doen (de zogenaamde *niet-Newtonse vloeistoffen*). Deze worden separaat behandeld in respectievelijk § 5.6 en § 5.7. Aan het eind van dit hoofdstuk (in § 5.8) worden de Navier-Stokes-vergelijkingen geïntroduceerd die elke stroming in een meerdimensionaal domein, ook tijdsafhankelijk, en compressibel of incompressibel, beschrijven.

## 5.2 Stroommeters

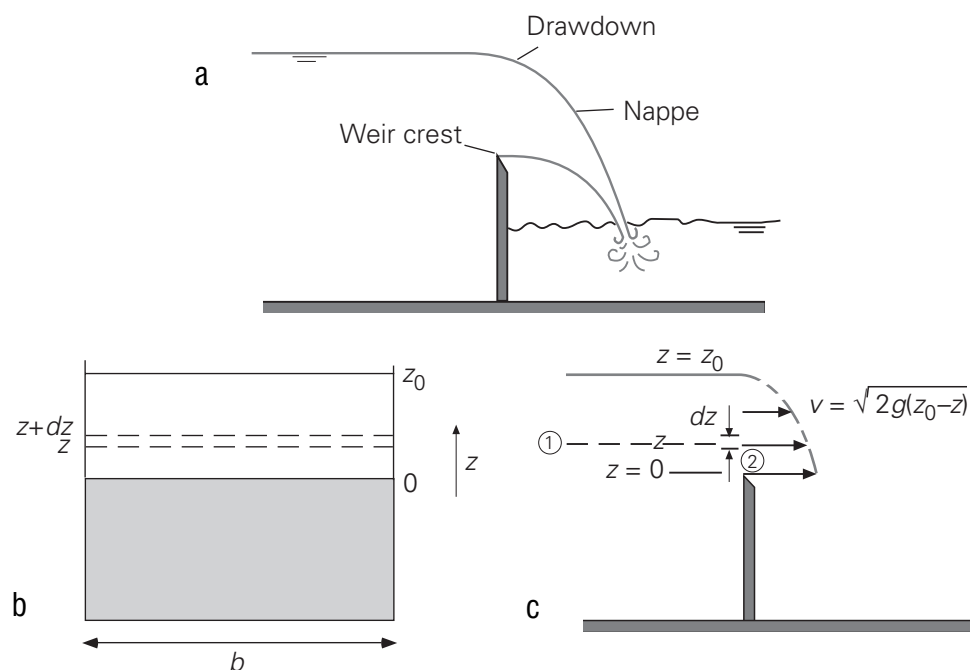
---

In § 1.3.3 zijn al enige instrumenten besproken waarmee stroomsnelheden van vloeistoffen of gassen bepaald kunnen worden, namelijk de pitotbuis en de venturibuis. In deze paragraaf zullen nog drie *debietsmeters* geïntroduceerd worden: de overloop, de meetschijf en de rotameter. De overloop vergt een wat gedetailleerdere beschouwing op grond van de Bernoulli-vergelijking dan de pitot- en de venturibuis, terwijl bij meetschijf en rotameter energiedissipatie beslist niet verwaarloosd mag worden.

### 5.2.1 Overloop

Figuur 5.2 laat een *overloop* (of *overstort*; Eng. ‘weir’) in een waterloop (een sloot, een kanaal, of een beekje) zien. De overloop, feitelijk een schot in de waterloop en daarmee een obstructie voor de stroming, strekt zich uit over de volle breedte van de waterloop. Vooralsnog veronderstellen we de bovenrand (Eng. ‘crest’) scherp en horizontaal. Het waterniveau bovenstrooms van de overloop staat hoger dan de bovenrand, het waterniveau benedenstrooms juist lager. Als het waterniveau stroomopwaarts voldoende hoog boven de bovenrand van de overloop staat en mits de watertoevoer voldoende groot is, zal er een laag water over de scherpe rand heen

schieten (door de traagheid van het water) en in het water benedenstrooms plonsen. Deze schietende waterstraal (Eng. 'nappe'), die zich over de volle breedte van de overloop uitstrekt, passeert de bovenrand hoegenaamd zonder wrijving (dus  $e_{fr} = 0$ ) en beweegt zich vrij door de lucht zodat de druk overal in de waterstraal voorbij de overloop atmosferisch is. Figuur 5.2a is een zijaanzicht en laat zien dat de waterspiegel al in de aanloop naar de overloop lager wordt (omdat het water gaat versnellen richting overloop). Omdat de aanvoer van water over de gehele diepte van de waterloop geschiedt, zal ook water van niveaus lager dan de bovenrand over de rand stromen. Al met al zijn de watersnelheden boven de scherpe rand van de overloop dus zeker niet puur horizontaal.



Figuur 5.2.

Het debiet over de overloop hangt in een stationaire situatie af van de bovenstroomse waterhoogte  $z_0$  (gemeten t.o.v. de bovenrand van de overloop). Het debiet kan derhalve geregeld worden door het schot verticaal omhoog of omlaag te bewegen.

Hier is de vraag aan de orde hoe het debiet kwantitatief van  $z_0$  afhangt.

Voor de beantwoording van deze vraag moeten we ons realiseren dat het debiet in de waterloop zowel in het verticale vlak 1 als in het verticale vlak 2 (zie figuur 5.2c) gelijk is aan het product van snelheid maal doorsnede. In vlak 1 is evenwel niets bekend over het snelheidsprofiel of de gemiddelde snelheid, terwijl in vlak 2 het debiet zal afhangen van  $z_0$ . In figuur 5.2b is te zien hoe het debiet in vlak 2 opgebouwd wordt uit bijdragen van smalle, horizontale strippen met hoogte  $dz$  waarbij de gemiddelde snelheid in elke strip een functie is van  $z$  (of zou kunnen zijn). Hoe het water precies over de bovenrand van de overloop stroomt, hangt af van de energiehuishouding ter

plekke zoals die beschreven wordt door een mechanische energiebalans tussen de vlakken 1 en 2, met punt 1 voldoende ver bovenstrooms van de overloop en met punt 2 exact boven de overloop.

Daartoe is het handig en gebruikelijk de situatie enigszins te vereenvoudigen: de daling van de waterspiegel (*Eng.* ‘drawdown’) stroomopwaarts van de overloop wordt verwaarloosd, de watersnelheid overal boven de rand van de overloop wordt horizontaal aangenomen, en de druk wordt al boven de scherpe bovenrand (en niet pas in de schietende waterstraal) atmosferisch verondersteld ( $p = p_0$ ). Verder geldt dat  $\rho$  constant is,  $\phi_w = 0$ ,  $\phi_q = 0$  en  $e_{fr} = 0$ . Dat betekent dan dat hier de *Bernoulli-vergelijking* – vergelijking (1.126) – gebruikt kan worden:

$$\frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \quad (5.9)$$

Voor de punten 1 en 2 op dezelfde hoogte  $z$  (boven de rand van de overloop) geldt:

$$\text{punt 1: } z_1 = z; v_1 = v(z); p_1 = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

$$\text{punt 2: } z_2 = z; v_2 \gg v_1; p_2 = p_0$$

Deze laatste aanname is overigens alleen gerechtvaardigd indien  $z_0$  beduidend kleiner is dan de diepte van de beek stroomopwaarts van de overloop (bij punt 1). Het is duidelijk dat de onbekende variabele hier  $v_2(z)$  is. Bovenstaande gegevens invullen in vergelijking (5.9) geeft

$$v_2 = \sqrt{2g(z_0 - z)} \quad (5.10)$$

Inderdaad hangt  $v_2$  van  $z$  af. Vergelijking (5.10) drukt uit dat de snelheid op hoogte  $z$  afhangt af van de dikte  $z_0 - z$  van de laag vloeistof boven hoogte  $z$  die de vloeistof op hoogte  $z$  als het ware over de overloop heen ‘drukt’. Vergelijking (5.10) impliceert dat op hoogte  $z_0$  (dus aan de vrije waterspiegel) de watersnelheid nul is. Dit resultaat hangt samen met de gebruikte vereenvoudiging dat  $v_2 \gg v_1$  als gevolg waarvan feitelijk ook  $v_1(z) = 0$  genomen wordt. Deze vereenvoudiging is dichtbij de water-spiegel ( $z = z_0$ ) duidelijk dubieus.

Met behulp van vergelijking (5.10) kan de bijdrage berekend worden die een strip tussen  $z$  en  $z + dz$  (zie figuur 5.2b) levert aan het debiet over de overloop:

$$d\phi_v = v_2(z) \cdot b \, dz = b \sqrt{2g(z_0 - z)} \, dz \quad (5.11)$$

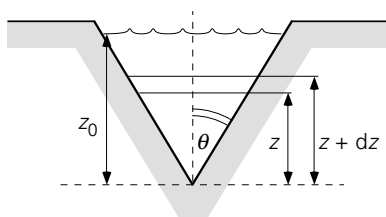
Het totale debiet volgt uit integratie van vergelijking (5.11):

$$\phi_v = b \sqrt{2g} \int_0^{z_0} \sqrt{z_0 - z} \, dz =$$

$$b \sqrt{2g} z_0^{3/2} \int_0^1 \sqrt{1-t} dt = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} z_0^3 \quad (5.12)$$

Nieuw en belangrijk in bovenstaande analyse is het gebruik van de Bernoulli-vergelijking om de snelheid lokaal, namelijk op hoogte  $z$ , uit te rekenen – passend bij de fysica van de situatie.

In feite verschilt de situatie bij een overloop niet wezenlijk van die van voorbeeld 1.21; feitelijk mocht in voorbeeld 1.21 de variatie van de snelheid over de hoogte van het gaatje verwaarloosd worden, omdat de grootte van het gaatje heel klein werd verondersteld ten opzichte van de vloeistofhoogte  $H$  in het vat.



Figuur 5.3.

Er zijn allerlei andere vormen van een overloop in gebruik, bijvoorbeeld een overloop in de vorm van een driehoek (zie figuur 5.3). De analyse loopt geheel parallel aan die van de rechthoekige overloop en wijkt pas af bij de bepaling van het debiet door een stripje. Immers, nu is ook de lengte  $b$  van de strip een functie van  $z$ :  $b = 2z \tan \theta$ . Het debiet volgt nu uit

$$\phi_V = 2 \tan \theta \sqrt{2g} \int_0^{z_0} z \sqrt{z_0 - z} dz = \frac{8}{15} \tan \theta \sqrt{2g} z_0^{5/2} \quad (5.13)$$

De uitdrukkingen (5.12) en (5.13) overschatten de werkelijk optredende debieten. De oorzaak daarvan ligt voornamelijk in de vereenvoudigingen die leiden tot figuur 5.2b. In feite is door de daling van de waterspiegel in de aanloop naar de overloop het oppervlak beschikbaar voor de stroming kleiner. Ook is de snelheid niet overal boven de overlooprand horizontaal. Voor deze effecten wordt gecorrigeerd door een contractie- of uitstroomcoëfficiënt  $C_d$  (Eng. 'discharge coefficient'), met  $C_d < 1$ , in te voeren in de uitdrukking voor het debiet; daarmee gaat bijvoorbeeld vergelijking (5.12) over in

$$\phi_V = \frac{2}{3} C_d b \sqrt{2g} z_0^3 \quad (5.14)$$

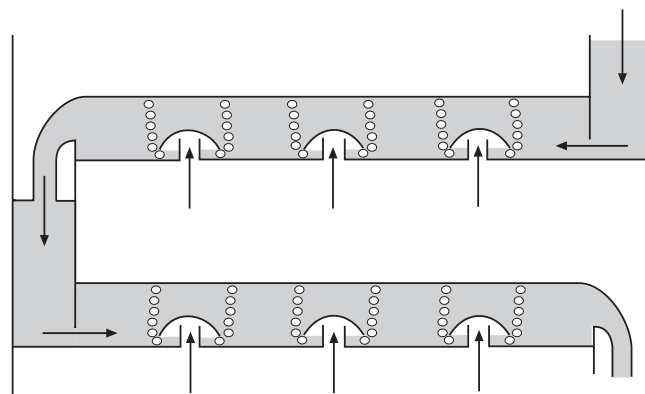
Deze praktijk is geheel vergelijkbaar met die in voorbeeld 1.21 bij de uitstroming door een klein gaatje: zie vergelijking (1.169). Ook daar is ten gevolge van contractie het



doorstroomde oppervlak kleiner dan het geometrisch gezien beschikbare en dientengevolge is ook het debiet kleiner. In feite staat  $C_d$  voor de verhouding van het feitelijk doorstroomde oppervlak tot het voor doorstroming beschikbare maar niet-benutte oppervlak.

Wanneer het water niet over de overlooprand heen schiet, maar er langzaam overheen valt, en/of wanneer de overloop geen scherpe bovenrand heeft, gaat energiedissipatie wel een rol spelen en dienen de debieten zoals gegeven in de vergelijkingen (5.12) – (5.14) ook daarvoor gecorrigeerd te worden. Ook wanneer het waterniveau benedenstrooms van de overlaat niet zo laag staat dat er van een vrije waterstraal sprake is, is bovenstaande afleiding niet geheel correct.

Overigens worden overstorten ook gebruikt bij schotels in destillatiekolommen die (bijvoorbeeld in aardolieraffinaderijen) dienen om meercomponentenmengsels te scheiden (fractioneren) naar kookpunt. Een destillatiekolom bevat een groot aantal schotels waarvan er twee geschetst zijn in figuur 5.4. Op elke schotel heerst een bepaalde temperatuur, waarbij de schoteltemperatuur onder in de kolom het hoogst is en boven in de kolom het laagst. Op elke schotel wordt bij de daar heersende temperatuur evenwicht nagestreefd qua samenstelling van damp en vloeistof. Daartoe dienen opgaande dampstromen en neergaande vloeistofstromen heel goed met elkaar in contact gebracht te worden. Dat wordt bereikt door op elke schotel de damp door een laag vloeistof te laten borrelen. De vloeistofhoogte op elke schotel, en daarmee de contacttijd tussen damp en vloeistof, hangt in sterke mate af van de hoogte van de overloop.



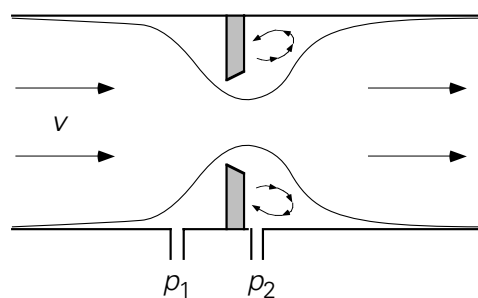
Figuur 5.4.

### 5.2.2 Meetschijf

In § 1.3.4 is de *venturibuis* besproken, waarmee het debiet door een leiding gemeten kan worden. In de venturibuis is zowel een geleidelijke vernauwing van de diameter van de leiding als een zeer geleidelijke verwijdering aangebracht, waardoor energiedissipatie voorkomen wordt. Deze vernauwing kan echter ook heel ‘plotseling’

worden aangebracht: dan mag *energiedissipatie* niet meer verwaarloosd worden! Dit is het geval bij de *meetschijf* (of ook wel *meetflens*).

Hierbij wordt in de leiding een schijf geplaatst met een (klein) gat erin (zie figuur 5.5). Zoals in de figuur is te zien ontstaan vooral aan de achterzijde van de schijf wervels, die zorgen voor een aanzienlijke dissipatie van mechanische energie. Bovendien treedt er ook hier nog contractie van de stroming op bij passage van de doorstroomopening. Een analyse met behulp van Bernoulli moet dus nu weer ‘gecorrigeerd’ worden voor dissipatie en contractie met behulp van een doorstroomcoëfficiënt  $C$  die afhangt van de plaats waar de drukken  $p_1$  en  $p_2$  gemeten worden. Tevens is de doorstroomcoëfficiënt een functie van  $Re$  en van de verhouding leiding-diameter tot gatdiameter. Zo geldt bijvoorbeeld voor een meetschijf met een klein gat met scherpe rand:  $C = 0,62$  mits  $Re > 10^4$ .



Figuur 5.5.

Een belangrijk nadeel van het gebruik van meetschijven is de dissipatie: na de meetschijf komt de druk niet meer terug op de waarde die voor de schijf heerste, omdat er mechanische energie vernietigd is. Dit betekent dat er een aanzienlijke drukval over de meetschijf kan optreden. Samenvattend ziet het debiet (voor vloeistoffen) als functie van de gemeten drukval er uit als

$$\phi_m = C \left( Re, \frac{D_2}{D_1} \right) \cdot \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left( \frac{A_2^2}{A_1^2} \right)}} \cdot \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \quad (5.15)$$

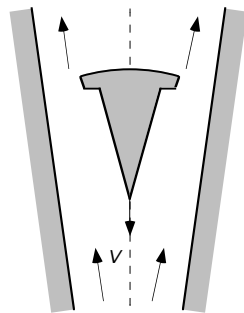
met  $D_1$ ,  $A_1$  en  $D_2$ ,  $A_2$  respectievelijk de diameter en het oppervlak van de dwarsdoorsnede van de leiding respectievelijk van de flensopening.

### 5.2.3 Rotameter

De *rotameter* is een slimme variant op de meetschijf. Het principe is ook nu weer gebaseerd op een diameterverandering in de leiding en het meten van een drukverschil ten gevolge daarvan. In plaats van een vaste schijf in de leiding is nu echter een vlotter (een kogeltje) in de buis aangebracht (zie figuur 5.6). De rotameter dient verder altijd perfect verticaal opgesteld te worden. De reden hiervoor is eenvoudig: de opwaartse

stroming oefent een meesleepkracht uit op de vlotter, die in een stationaire situatie evenwicht maakt met de zwaartekracht en de opwaartse kracht (Eng. ‘buoyancy’) op de vlotter, waardoor de vlotter kan gaan zweven.

Indien nu de buis van de rotameter een constante diameter zou hebben, zou er slechts één debiet zijn waarbij de vlotter in evenwicht hangt. Dit is onhandig voor een debietmeter. Daarom heeft de rotameter een variabele diameter: de buis wordt naar boven toe steeds wijder. Dit betekent, dat bij een bepaald debiet de vlotter op een bepaalde hoogte blijft zweven. Juist deze eigenschap maakt de rotameter tot een zeer handig meetinstrument: de stand van de vlotter is een maat voor de kracht van de opwaartse stroming op de vlotter en daarmee voor het debiet, en door de buis doorzichtig te maken kan direct de stand van de vlotter worden afgelezen en daarmee het debiet bepaald.



*Figuur 5.6.*

In principe is de kracht van de stroming op de vlotter (vlotter volume  $V_o$ ,  $A_o$  het oppervlak van de grootste dwarsdoorsnede van de vlotter, en  $\rho_o$  de dichtheid van het vlotter materiaal) te modelleren volgens het recept uit § 2.3. In § 2.3 is er evenwel van uit gegaan dat het omstroomde object zich in een ‘oneindig’ uitgestrekt medium bevindt zodat er geen wandinvloeden zijn. Bij de rotameter is de buiswand wel heel dichtbij. Daarom wordt de rotameter anders gemodelleerd: analoog aan de uitdrukking voor de meetschijf. De drukval over de vlotter ten gevolge van de stroming wordt daarbij dankzij een krachtenbalans over de vlotter wel vervangen door de netto-zwaartekracht die op de vlotter werkt. Dit geeft voor het debiet:

$$\phi_m = C \cdot (A_{tube}(z) - A_o) \cdot \sqrt{2\rho_f(\rho_v - \rho_f)g \frac{V_o}{A_o}} \quad (5.16)$$

waarin  $\rho_f$  de dichtheid van de vloeistof is, en  $A_{tube}(z)$  het oppervlak van de dwarsdoorsnede van de buis op hoogte  $z$ . Indien  $Re$  (betrokken op de ringvormige spleet tussen vlotter en buiswand) voldoende groot is, is de *doorstroomcoëfficiënt*  $C$  constant.

Vergelijking (5.16) drukt uit hoe het debiet afhangt van de verticale positie  $z$  in de buis die de vlotter inneemt in respons op de krachten die hij ondervindt. In plaats van

vergelijking (5.16) wordt meestal een ijkgrafiek gebruikt voor het verband tussen de stand  $z$  van de vlotter en het debiet. Let wel dat elk type vlotter (vorm, materiaal) een andere ijkgrafiek vergt. Een rotameter wordt in de regel zo gemaakt dat  $A_b$  lineair toeneemt met de hoogte  $z$  zodat de ijkgrafiek van de rotameter praktisch lineair is.

### Samenvatting

In deze paragraaf zijn een drietal stroommeters geanalyseerd: de overloop, de meetschijf en de rotameter. Alle drie de analyses hebben als uitgangspunt de Bernoulli-vergelijking. Op de uitkomst van de analyses moet een correctie worden aangebracht ten gevolge van contractie van de vloeistofstraal en ten gevolge van energiedissipatie. In principe hangt deze zogenaamde doorstroomcoëfficiënt nog af van de geometrie en het Reynolds-getal.

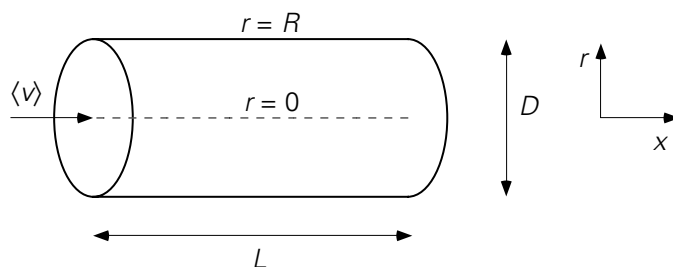
Bij de overloop speelt dissipatie een ondergeschikte rol. Bij de meetschijf en de rotameter is er sprake van een aanzienlijke dissipatie en dus van een aanmerkelijke drukval over schijf respectievelijk vlotter.

## 5.3 Drukval over een rechte leiding

In § 1.3 is een horizontale rechte ronde buis behandeld, waardoor water stroomt ten gevolge van een met een pomp aangelegd drukverschil over de buis. Met behulp van een energiebalans is afgeleid, dat de drukenergie (= mechanische energie) in de leiding wordt omgezet in inwendige energie (= thermische energie). Dit proces staat bekend als dissipatie van mechanische energie. Het onderliggende mechanisme is wrijving. In dit voorbeeld waren drukval en debiet beide gegeven. Hieronder zal het verband tussen drukval en debiet nader besproken worden opdat de een berekend kan worden als de ander gegeven is.

### 5.3.1 Het concept van de frictiefactor

Beschouw daartoe weer een rechte horizontale leiding (lengte  $L$ , diameter  $D$ ) waardoor water stroomt met een gegeven gemiddelde snelheid  $\langle v \rangle$  (zie figuur 5.7).



Figuur 5.7.

Hoe groot is nu de drukval die nodig is om het water met die snelheid  $\langle v \rangle$  door de leiding te laten stromen?

Deze drukval is nodig om de *wrijving* aan en ten gevolge van de pijpwand te overwinnen. Wrijving is het gevolg van schuifspanning tussen vloeistoflagen onderling of tussen een vloeistoflaag en een wand. In § 2.1.4 is het begrip schuifspanning geïntroduceerd als alternatieve beschrijving voor moleculair impulstransport. De *schuifspanning* is een kracht per oppervlakte-eenheid die de ene laag vloeistof op de (aangrenzende) andere laag of wand uitoefent. Deze kracht staat parallel aan de stroomrichting.

Om de drukval over de leiding te kunnen bepalen dient derhalve de schuifspanning aan de wand bekend te zijn. De schuifspanning die de wand op de vloeistof uitoefent, is in principe te berekenen uit:

$$\tau_{w \rightarrow f} = -\tau_{f \rightarrow w} = - \left\{ -\mu \left[ \frac{dv_x}{dr} \Big|_{r=R} \right] \right\} = \mu \left[ \frac{dv_x}{dr} \Big|_{r=R} \right] \quad (5.17)$$

Voor de berekening van de schuifspanning aan de wand zou dus het snelheidsprofiel in de leiding bekend moeten zijn om daaruit de afgeleide van de snelheid aan de wand te kunnen bepalen. Dit is in het algemeen een moeilijk zo niet onmogelijk karwei. Daarom zal weer de techniek van de dimensie-analyse gehanteerd worden om te achterhalen waar de schuifspanning van afhangt.

De schuifspanning is een functie van de gemiddelde vloeistofsnelheid  $\langle v \rangle$  in de leiding, van de diameter  $D$  van de leiding, van de viscositeit  $\mu$  en van de dichtheid  $\rho$  van de vloeistof:

$$\tau_{w \rightarrow f} = f(\langle v \rangle, D, \mu, \rho) \quad (5.18)$$

Uitvoeren van de dimensie-analyse levert:

$$\frac{\tau_{w \rightarrow f}}{\rho \langle v \rangle^2} = k \left( \frac{\mu}{\rho \langle v \rangle D} \right)^a = k \cdot \text{Re}^{-a} \quad (5.19)$$

De schuifspanning die een wand op een vloeistofstroming uitoefent, kan dan weer op eenzelfde manier gemodelleerd worden als de kracht die een object in een stroming ondervindt (zie § 2.3):

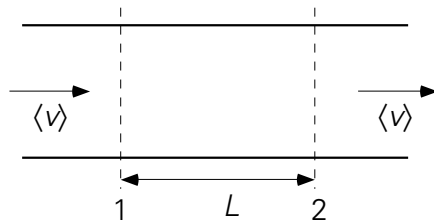
$$\tau_{w \rightarrow f} = -f \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \quad \text{met } f = f(\text{Re}) \quad (5.20)$$

De factor  $f$  staat bekend onder de naam *friktiefactor*. Het minteken in vergelijking (5.20) drukt het tegenwerkende karakter uit van de kracht die de vloeistof van de wand ondervindt.

Met het oog op de bepaling van de drukval over een pijplengte  $L$  voor een stationaire stroming door een rechte leiding uit figuur 5.8 kan een impulsbalans opgesteld worden. Het controlevolume wordt gevormd door de leidingwand en de twee vlak-ken 1 en 2 een afstand  $L$  uit elkaar.

Zolang de oppervlakken  $A_1$  en  $A_2$  van de buisdoorsneden bij 1 en 2 gelijk zijn, geldt dat de  $x$ -impulsstroom ‘in’ en de  $x$ -impulsstroom ‘uit’ elkaar opheffen. De  $x$ -impulsbalans reduceert daarmee tot een krachtenbalans:

$$0 = p_1 A - p_2 A + \tau_{w \rightarrow f} \cdot SL \quad (5.21)$$



Figuur 5.8.

In bovenstaande vergelijking is  $A$  het oppervlak van de dwarsdoorsnede van de leiding, voor een cilindrische buis is dit  $\pi D^2/4$ . Verder staat  $S$  voor de door de ‘vloeistof bevochtigde omtrek’ van de buis; voor een geheel gevulde cilindervormige buis is dit  $\pi D$ . Vergelijking (5.21) is zo algemeen mogelijk opgeschreven en geldt daarmee bijvoorbeeld ook voor een open goot, waardoor water stroomt. Het werken met het begrip ‘bevochtigde omtrek’ doet ook volledig recht aan de oorzaak van de drukval: wrijving aan de wand.

Uit vergelijking (5.21) is eenvoudig de drukval te bepalen:

$$p_1 - p_2 = - \tau_{w \rightarrow f} \cdot \frac{SL}{A} \quad (5.22)$$

Combineren van de vergelijkingen (5.20) en (5.22) levert voor de drukval ten gevolge van energiedissipatie door wandwrijving (schuifspanning aan de wand):

$$p_1 - p_2 = f \cdot \frac{SL}{A} \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \quad (5.23)$$

Voor een cilindervormige buis (met diameter  $D$ ) die geheel met vloeistof gevuld is, geldt uiteraard:

$$\frac{SL}{A} = \frac{\pi DL}{\frac{\pi}{4}D^2} = 4 \frac{L}{D} \quad (5.24)$$

Dit invullen in vergelijking (5.23) levert de zogeheten *Fanning drukvalvergelijking* op die voor stroming door cilindrische buizen de wandwrijving in rekening brengt:

$$p_1 - p_2 = 4f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \quad (5.25)$$

waarin de coëfficiënt  $4f$  de *Fanning frictiefactor*<sup>19</sup> heet die een functie is van het Reynolds-getal:  $4f = 4f(\text{Re})$ .

Voor niet-cilindervormige buizen werkt men met een vergelijking die geheel analoog aan vergelijking (5.25) is. De diameter  $D$  wordt daartoe vervangen, ook in  $\text{Re}$ , door de zogenaamde *hydraulische diameter*  $D_h$  die is gedefinieerd als

$$D_h \equiv \frac{4A}{S} \quad (5.26)$$

Bedenk dat  $A$  het oppervlak is waar de stroming doorheen gaat. Dit is niet noodzakelijk hetzelfde als het oppervlak van een dwarsdoorsnede van de leiding. Bovendien is  $S$  de omtrek waar de schuifspanning op werkt (de zogenaamde bevochtigde omtrek) en die is weer niet noodzakelijkerwijs gelijk aan de omtrek van de leiding.

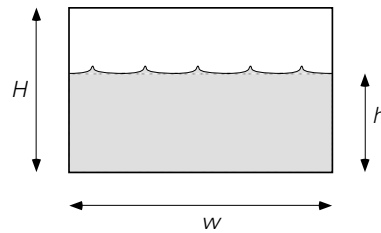
### Voorbeeld 5.2. Stroming in een open kanaal

Door een rechthoekig kanaal (wandhoogte  $H$ , breedte  $w$ ) stroomt water. De hoogte van het waterpeil in het kanaal is  $h < H$ .

Wat is de hydraulische diameter van dit systeem (zie figuur 5.9)?

De doorstroomde dwarsdoorsnede  $A$  is  $w \cdot h$  en dus niet  $w \cdot H$ . Evenzo geldt voor de bevochtigde omtrek:  $S = 2h + w$  en niet  $2H + 2w$ : aan het oppervlak van het water is immers geen wand die een schuifspanning uitoefent (het effect van de lucht is verwaarloosbaar ten opzichte van het effect van de wand van het kanaal!). Ook het gebruik van  $H$  voor de bevochtigde omtrek in plaats van  $h$  is onjuist: de hoogte van de wand van het kanaal doet hier niet ter zake.

<sup>19</sup> In de ingenieurswereld wordt ook de *Moody friction factor*  $f$  veel gebruikt, die gedefinieerd wordt door vergelijking (5.25) zonder de '4' – hetgeen impliceert dat de numerieke waarden van de Moody  $f$  gelijk zijn aan Fanning's  $4f$  – waarden. Dit boek gebruikt alleen de Fanning frictiefactor juist vanwege het gemak van de hydraulische diameter.



Figuur 5.9.

Dit levert voor de hydraulische diameter:

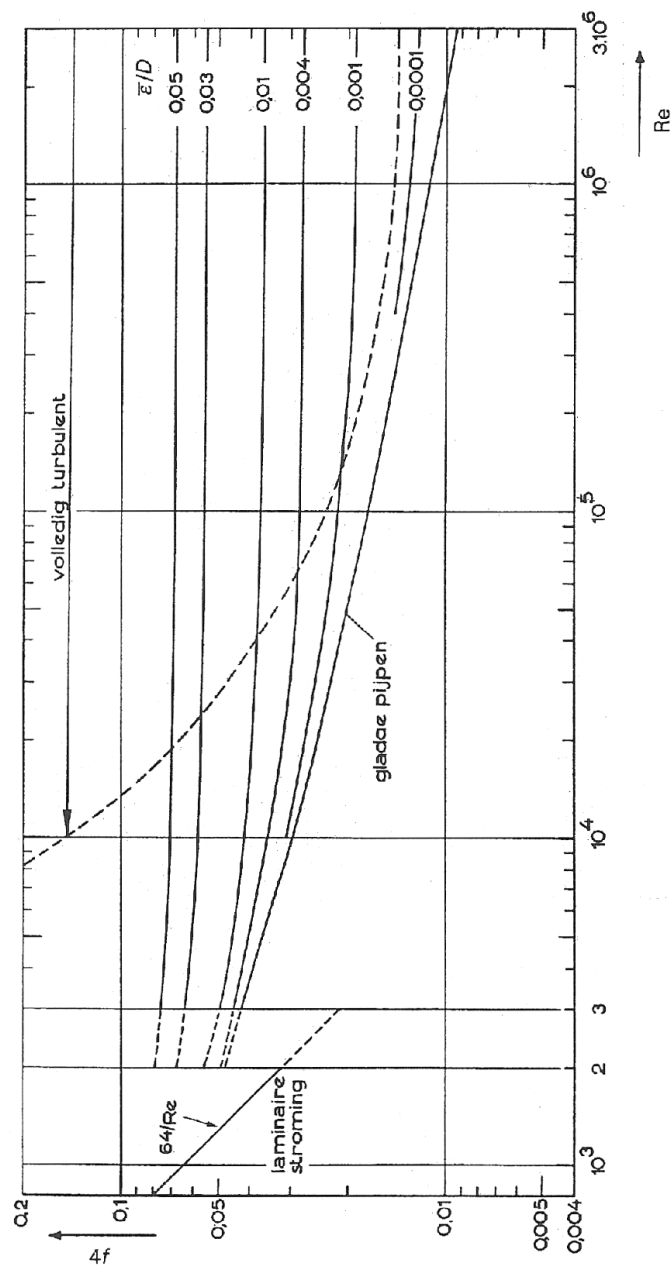
$$D_h = \frac{4A}{S} = \frac{4wh}{2h + w} \quad (5.27)$$

⑤

### 5.3.2 Het gebruik van de frictiefactor

De Fanning frictiefactor is – zoals gezegd – een functie van het Reynolds-getal (betrokken op de buisdiameter). In figuur 5.10 is  $4f$  uitgezet als functie van  $Re$  voor leidingen met een cirkelvormige dwarsdoorsnede.





Figuur 5.10.

Min of meer analoog aan hoe de weerstandscoefficiënt  $C_D$  van een omstroemd voorwerp afhangt van het Reynolds-getal betrokken op het deeltje (zie figuur 2.16) zijn er ook hier twee regimes te onderscheiden, namelijk die van *laminaire* en *turbulente pijpstroming*:

voor het *laminaire* regime kan afgeleid worden (zie § 5.6.4) dat

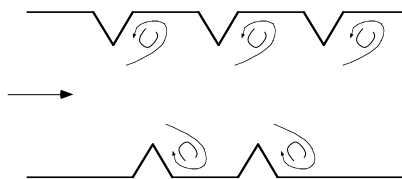
$$4f = 64/Re \quad \text{mits} \quad Re < 2000 \quad (5.28)$$

in het turbulente regime geldt de empirische formule van Blasius:

$$4f = 0,316 \operatorname{Re}^{-1/4} \quad \text{mits } 4000 < \operatorname{Re} < 10^5 \quad (5.29)$$

Bedenk wel dat bij  $C_D$  het gebied van  $C_D \propto 1/\operatorname{Re}$  beperkt is tot  $\operatorname{Re} < 1$ , terwijl het laminaire regime bij buisstroming zich uitstrekt tot  $\operatorname{Re} \approx 2000$ ! Dit illustreert nog eens dat de kritische waarde van het Reynolds-getal voor de overgang laminair – turbulent van de geometrie afhangt.

In figuur 5.10 zijn meer lijnen voor  $4f$  getekend. Deze geven aan dat de weerstand die een fluïdum in een buis ondervindt, ook nog afhangt van de *wandruwheid*. Dit is logisch (zie figuur 5.11) aangezien achter een uitsteeksel in de wand een extra werveling op zal treden. Deze geeft uiteraard aanleiding tot meer dissipatie van bruikbare mechanische energie en leidt dus tot meer weerstand. Of in termen van schuifspanning: door de extra werveling wordt er effectiever impuls vanuit de vloeistof naar de wand overgedragen. En schuifspanning is een alternatieve interpretatie van moleculair impulstransport.



Figuur 5.11.

De ruwheid van de wand wordt meestal gekarakteriseerd met de (dimensieloze) *relatieve ruwheid*  $\bar{\epsilon}/D$ . Hierin is  $\bar{\epsilon}$  de absolute ruwheid: de gemiddelde hoogte van de ‘uitsteeksels’ aan de wand. Zoals in de figuur van  $4f$  versus  $\operatorname{Re}$  te zien is, wordt  $4f$  constant als  $\bar{\epsilon}/D$  voldoende groot of  $\operatorname{Re}$  voldoende groot is. Hoe groter de relatieve ruwheid, bij des te kleinere waarden van  $\operatorname{Re}$  zal  $4f$  constant worden. Dit is te begrijpen door het beeld te gebruiken van de wervels die impuls transporteren. Bij grote relatieve wandruwheid steken de uitsteeksels relatief ver uit en brengen de wervelingen impuls vanuit de bulk van de stroming effectief naar de wand.

Nu volgen enkele voorbeelden van het berekenen van drukvallen in rechte leidingen.

**Voorbeeld 5.3.** *Drukval over een horizontale olietransportleiding*

Door een rechte, horizontale, cilindervormige buis (lengte 10 m, diameter 10 cm, gladde wand) stroomt stationair een viskeuze olie ( $\mu = 70 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$ ,  $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ ) met een debiet van  $7,85 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ .

Hoe groot is de drukval over deze leiding?

Voor deze berekening is vergelijking (5.25) direct te gebruiken. Uit het debiet volgt:  $\langle v \rangle = 0,1 \text{ m/s}$ . Hieruit volgt:  $\operatorname{Re} = 129$ . De stroming is dus laminair en dankzij vergelijking (5.28) volgt dan  $4f = 0,5$ . Invullen in vergelijking (5.25) levert

nu  $\Delta p = 225 \text{ Pa}$ .

5

**Voorbeeld 5.4.** Een horizontale waterleiding

Door een lange, horizontale, rechte pijp (lengte 1 km, diameter 10 cm, relatieve ruwheid 0,001) stroomt water. De situatie is weer stationair. De drukval over de pijp is 2 bar.

Wat is de watersnelheid in de pijp?

Nu moet uit vergelijking (5.25) de gemiddelde snelheid opgelost worden:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{D}{L} \frac{2\Delta p}{\rho} \frac{1}{4f}} \quad (5.30)$$

Dit levert hetzelfde probleem op als bij de bepaling van de eenparige snelheid van een lichaam dat door een fluïdum valt of opstijgt. De snelheid  $\langle v \rangle$  kan slechts uitgerekend worden als  $4f$  bekend is, terwijl  $4f$  zelf een functie is van  $\langle v \rangle$ . Ook hier biedt een iteratieve oplossingsprocedure weer uitkomst: kies een snelheid, bv.  $\langle v \rangle = 2 \text{ m/s}$ ; dit geeft  $\text{Re} = 2 \cdot 10^5$ ; opzoeken in de grafiek van  $4f$  tegen  $\text{Re}$  levert (aflezen op lijn relatieve ruwheid = 0,001!):  $4f = 0,02$ ; deze waarde invullen in vergelijking (5.30) levert een nieuwe  $\langle v \rangle$ : namelijk 1,4 m/s; daarmee wordt dan  $\text{Re} = 1,4 \cdot 10^5 \rightarrow 4f = 0,02$ : klaar! In het algemeen zal deze rekenprocedure een aantal malen herhaald moeten worden voordat  $\langle v \rangle$  constant wordt.

5

Overigens kan een probleem als geïllustreerd in voorbeeld 5.4 ook op een andere manier opgelost worden. Daartoe wordt vergelijking (5.25) herschreven tot

$$\frac{\rho D^3}{4\mu^2} \frac{\Delta p}{L} = \frac{1}{2} f \cdot \left( \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu} \right)^2 = \frac{1}{2} f \cdot \text{Re}^2 \quad (5.31)$$

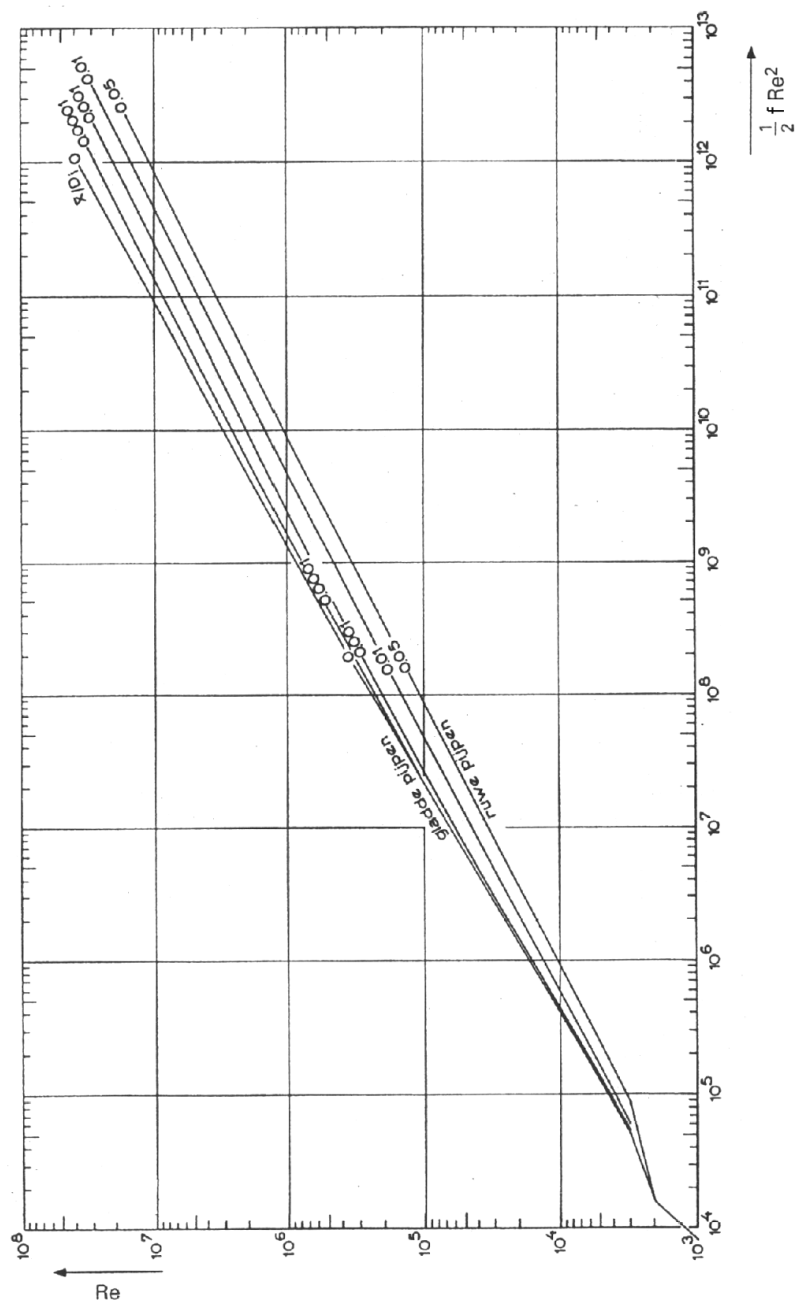
Het linkerlid van deze vergelijking bevat doorgaans en ook in voorbeeld 5.4 uitsluitend variabelen die gegeven zijn. Daarmee is de waarde van  $\frac{1}{2} f \cdot \text{Re}^2$  bekend. Uit een grafiek van  $\text{Re}$  tegen  $\frac{1}{2} f \cdot \text{Re}^2$  (zie figuur 5.12) die geconstrueerd is uit figuur 5.10, kan dan direct  $\text{Re}$  afgelezen worden, waaruit dan  $\langle v \rangle$  volgt.

In bovenstaande voorbeeld 5.4 levert deze methode

$$\frac{1}{2} f \cdot \text{Re}^2 = \frac{\rho D^3}{4\mu^2} \frac{\Delta p}{L} = 5 \cdot 10^7 \quad (5.32)$$

Opzoeken van  $Re$  in figuur 5.12 levert  $Re = 1,2 \cdot 10^5$  en dus  $\langle v \rangle = 1,2$  m/s. Deze waarde wijkt enigszins af van de eerste uitkomst. Beide oplossingen zijn beter met elkaar in overeenstemming te brengen door nauwkeurigere grafieken te gebruiken en nauwkeuriger af te lezen.

5



Figuur 5.12.

**Voorbeeld 5.5.** *Een melkleiding (met Blasius)*

Door een lange, horizontale, rechte leiding (diameter 4 cm, lengte 20 m, gladde wand) stroomt melk ( $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$ ) onder stationaire condities ten gevolge van een drukval van 2 kPa.

Wat is de gemiddelde snelheid in de leiding?

Deze opgave kan op een van de twee hierboven beschreven manieren worden opgelost. Er is echter nog een derde manier: gebruik de vergelijking van Blasius als gegeven in vergelijking (5.29) mits voldaan aan de eis dat het Reynolds-getal in het opgegeven Re-traject valt. Dit kan uiteraard pas achteraf geverifieerd worden. Invullen van deze vergelijking in vergelijking (5.25) levert voor de drukval ten gevolge van wrijving:

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0,316 \text{ Re}^{-1/4} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 = \\ &= 0,158 L D^{-5/4} \mu^{1/4} \rho^{3/4} \langle v \rangle^{7/4} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Invullen van de gegevens geeft:  $\langle v \rangle = 0,5 \text{ m/s}$ . Dit levert voor het Reynolds-getal op:  $\text{Re} = 9500$ , en dus mag Blasius inderdaad gebruikt worden. Bedenk wel dat de Blasius-vergelijking alleen geldig is voor leidingen met gladde wanden.

⑤

De bovenstaande voorbeelden hebben alle drie betrekking op cilindervormige leidingen. In het algemeen is de relatie tussen de drukval en de snelheid in de leiding gemodelleerd met de hydraulische diameter. Voor leidingen of stroomkanalen met een willekeurige doorsnede (maar wel constant langs de gehele buislengte) is nu precies dezelfde  $4f(\text{Re})$  te gebruiken *mits* de stroming turbulent is. Het Reynolds-getal moet dan uiteraard ook met behulp van de hydraulische diameter bepaald worden. In het laminaire stromingsgebied geldt deze overeenstemming niet.

**Voorbeeld 5.6.** *Watertransport door een rechthoekige leiding*

Water stroomt stationair door een horizontale, rechthoekige leiding (hoogte 3 cm, breedte 5 cm, lengte 100 m, gladde wanden). De watersnelheid is 1 m/s.

Wat is de drukval over het kanaal?

Eerst moet de hydraulische diameter uitgerekend worden:

$$D_h = \frac{4A}{S} = \frac{4bh}{2h+2b} = 3,75 \text{ cm} \quad (5.34)$$

Daarmee volgt voor het Reynolds-getal

$$\text{Re}_h = \frac{\rho \langle v \rangle D_h}{\mu} = 3,75 \cdot 10^4 \quad (5.35)$$

Met behulp van figuur 5.10 volgt weer  $4f = 0,02$  en deze waarde invullen in vergelijking (5.25) levert:

$$\Delta p = 4f \cdot \frac{L}{D_h} \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 = 2,7 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 0,27 \text{ bar} \quad (5.36)$$

⑤

### 5.3.3 De analogie met warmte- en stofoverdracht

Voor het geval van turbulente stroming is in § 3.5.2 de *filmtheorie* besproken voor warmteoverdracht; bij stofoverdracht is in § 4.5.2 ook naar de filmtheorie verwezen. Daarbij is de *hydraulische filmdikte*  $\delta_h$  ter sprake gekomen. In de film is er sprake van laminair impulstransport, waarvoor de viscositeitswet van Newton, vergelijking (2.4), geldt. Buiten de film is de stroming turbulent en is dus het snelheidsprofiel behoorlijk vlak dankzij het impulstransport door de wervels van het turbulente stromingsveld. Voor het impulstransport (*wrijving!*) vanuit de bulk naar de wand geldt in de filmtheorie:

$$\tau_{f \rightarrow w} = f \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 = \mu \frac{\langle v \rangle}{\delta_h} \quad (5.37)$$

geheel analoog aan de warmteflux (3.144) volgens de filmtheoriebenadering van turbulente stroming. Vergelijking (5.37) drukt uit dat de *wrijvingsweerstand* geheel in de film ligt.

Al eerder is in § 3.5.2 betoogd dat de filmdiktes  $\delta_q$  en  $\delta_h$  afhangen van de mate van turbulentie in de stroming:  $\delta_q$  en  $\delta_h$  nemen af met toenemend Reynolds-getal. Warmteoverdracht onder turbulente condities en dus ook het bijbehorende Nusselt-getal hangen daarmee af van de mate van turbulentie en dus ook van  $\delta_h$ . De volgende herschikking is in overeenstemming met deze redenering:

$$\text{Nu} = \frac{hD}{\lambda} = \frac{D}{\delta_q} = \frac{D}{\delta_h} \cdot \frac{\delta_h}{\delta_q} = \frac{f}{2} \cdot \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu} \cdot \frac{\delta_h}{\delta_q} \quad (5.38)$$

waarbij gebruik is gemaakt van vergelijking (5.37).

Door verder gebruik te maken van de relatie  $\delta_h/\delta_q \propto \text{Pr}^{1/3}$  (eerder besproken rond figuur 3.24 in § 3.5.2) volgt

$$\text{Nu} \propto \frac{1}{2} f \cdot \text{Re} \text{Pr}^{1/3} \quad (5.39)$$

oftewel

$$\frac{1}{2} f \propto \frac{\text{Nu}}{\text{Re} \text{Pr}^{1/3}} \quad (5.40)$$

Daarmee is een resultaat verkregen dat erg lijkt op de relaties (4.91) en (4.92). De relaties (4.93) en (5.29) mede in aanmerking genomen, kan de *Chilton-Colburn-analogie* uitgebreid worden tot

$$j_H = j_D = \frac{1}{2}f = C \cdot \text{Re}^{m-1} \quad (5.41)$$

Overigens geldt de uitgebreide analogie volgens (5.41) alleen wanneer, conform de afleiding, de *frictiefactor* uitsluitend afkomstig is van *wandwrijving*. *Vormweerstand*, die een belangrijk deel kan zijn van de stromingsweerstand van omstroomde lichamen (§ 2.3), gaat *niet* gepaard met analoge effecten in warmte- of stofoverdracht.

### **Samenvatting**

In deze paragraaf is het verband tussen debiet door en wrijvingsdrukval over een leiding behandeld. Drukval, energiedissipatie, wandwrijving en schuifspanning zijn in hun onderlinge samenhang besproken. De Fanning-drukvalvergelijking is afgeleid

$$p_1 - p_2 = 4f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2$$

met daarbij een grafiek voor  $4f$  als functie van het Reynolds-getal en met twee relaties voor de frictiefactor  $4f$  voor een cilindrische buis: één voor het laminaire regime ( $4f = 64/\text{Re}$ ) en de Blasius-vergelijking voor het turbulente regime.

Ook zijn de begrippen hydraulische diameter en relatieve wandruwheid geïntroduceerd voor gebruik bij turbulente pijpstromingen. Verschillende oplosstrategieën zijn besproken om bij gegeven drukval het debiet door een pijp te berekenen; een daarvan is een iteratieve, precies als bij het berekenen van een eenparige deeltjessnelheid uit een krachtenbalans.

Verder is de Chilton-Colburn-analogie uitgebreid naar de frictiefactor, mits de stromingsweerstand uitsluitend bepaald wordt door de wandwrijving.

## **5.4 Drukval in pijpleidingsystemen**

In § 5.3 is besproken hoe dissipatie en de daarmee gepaard gaande wrijvingsdrukval voor een rechte leiding gemodelleerd worden met behulp van de Fanning-drukvalvergelijking. Omdat dissipatie staat voor vernietiging van mechanische energie, ligt het voor de hand de Fanning-drukvalvergelijking in verband te brengen met de mechanische-energiebalans zoals geïntroduceerd in hoofdstuk 1 voor stationaire condities. Deze volgt voor een fluïdum met constante dichtheid stromend door een rechte pijpleiding uit vergelijking (1.125):

$$0 = \phi_m \left( \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 - \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{p_2}{\rho} - g z_2 \right) + \phi_w - \phi_m e_{diss} \quad (5.42)$$

Voor een horizontale, rechte leiding van constante doorsnede en bij afwezigheid van een pomp geeft combineren van de vergelijkingen (5.25) en (5.42) een uitdrukking voor de hoeveelheid energie die per massa-eenheid gedissipeerd wordt:

$$e_{diss} = 4f \cdot \frac{L}{D_h} \cdot \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \quad (5.43)$$

waarbij het gebruik van de hydraulische diameter  $D_h$  – zie vergelijking (5.26) – de vergelijking ook geldig maakt voor niet-cilindrische leidingen. Ten opzichte van de Fanning-vergelijking heeft de combinatie van de vergelijkingen (5.42) en (5.43) het voordeel dat er ruimte is voor drukveranderingen anders dan ten gevolge van wrijving aan de wand van een leiding. Vergelijking (5.43) drukt expliciet uit wat het effect van dissipatie is op de mechanische-energiehuishouding in een leiding.

Beschouw twee identieke buizen met dezelfde diameter, waarvan de een horizontaal en de ander verticaal is opgesteld. Door beide stroomt een even groot debiet. De drukval over beide leidingen is een direct gevolg van wrijving aan de wand. Deze wrijving hangt slechts af van de schuifspanning aan de wand en die op zijn beurt wordt bepaald door het snelheidsprofiel vlak bij de wand. In de horizontale leiding is er een drukval die juist de wrijvingskracht compenseert. In de verticale leiding (vloeistof stroomt van onder naar boven) moet de drukval behalve de wandwrijving ook de zwaartekracht compenseren. Maar de wandwrijving hangt uitsluitend af van de snelheidsgradiënt aan de wand en niet van de oriëntatie van de leiding. Daarom kan voor beide buizen dezelfde uitdrukking voor de dissipatie gehanteerd worden. Merk op dat in de mechanische-energiebalans nu precies staat dat in de verticale leiding de drukenergie de potentiële energie (is ‘zwaartekracht’) en de dissipatie (is ‘wrijvingskracht’) moet compenseren.

Nu zijn lang niet alle leidingen recht met een constante doorsnede. Een leidingstelsel bevat in de regel allerlei bochten, afsluiters of kleppen, en vernauwingen of verwijdingen (in het algemeen noemt men dit *appendages*). Al dit soort ‘obstakels’ of hindernissen voor de stroming geven aanleiding tot extra dissipatie. Veelal ontstaan extra wervels waarin mechanische energie gedissipeerd wordt. Voor *turbulente* stroming zijn al deze appendages eenvoudig te modelleren door een uitdrukking voor de energiedissipatie per massa-eenheid die geheel analoog is aan vergelijking (5.42):

$$e_L = K_L \cdot \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \quad (5.44)$$

Hierbij is de conventie dat voor  $\langle v \rangle$  de gemiddelde snelheid van de stroming stroomafwaarts van de betreffende appendage gebruikt wordt.  $K_L$  heet het



*weerstandsgetal* (Eng. ‘loss coefficient’) van de appendage en is constant, d.w.z. niet afhankelijk van  $Re$ , mits de stroming voldoende turbulent is. De weerstandsgetallen zijn in tabellen te vinden (zie bijvoorbeeld Janssen & Warmoeskerken<sup>20</sup>). Hieronder zijn een klein aantal weerstandsgetallen weergegeven:

<i>appendage</i>	$K_L$
schuifafsluiter, open	0,2
schuifafsluiter, 1/2 dicht	$\approx 6$
schuifafsluiter, 3/4 dicht	$\approx 24$
90° bocht, scherpe hoek	1,3
90° bocht, lang	0,5
intreeverlies pijp, scherp	0,5
intreeverlies pijp, afgerond	0,05
uittreeverlies pijp	1

Samenvattend kan met het oog op het gebruik van de mechanische-energiebalans voor drukvalberekeningen voor pijpleidingsystemen met appendages gesteld worden dat, mits de stroming turbulent is, de *specifieke energiedissipatie*  $e_{\text{diss}}$  (in J/kg) in het algemeen gemodelleerd wordt als de som van  $e_{fr}$  en  $e_L$ :

$$e_{\text{diss}} = \sum_i \left( 4f \frac{L}{D_h} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \right)_i + \sum_j \left( K_L \cdot \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \right)_j \quad (5.45)$$

Het eerste deel van de rechterterm van deze vergelijking staat daarbij voor de wrijvingsverliezen in alle rechte stukken leiding, terwijl het tweede deel de dissipatie in rekening brengt die veroorzaakt wordt door alle appendages. Let er wel op dat diameterveranderingen in het systeem correct in rekening worden gebracht: voor elke appendage dient de benedenstroomse snelheid  $\langle v \rangle$  gebruikt te worden.

#### **Voorbeeld 5.7.** *Omhoog pompen*

Vanuit een zeer groot vat A moet een waterige vloeistof verpompt worden naar een hoger gelegen eveneens zeer groot vat B. Hiertoe wordt een pomp in het in figuur 5.13 geschetste leidingsysteem opgenomen. Beide vaten zijn aan de bovenkant open. De leiding is 50 m lang en heeft een diameter van 5 cm. De wanden van de leiding zijn glad. In de leiding bevinden zich twee scherpe haakse bochten en een open schuifafsluiter. De intree van de leiding (bij vat A) is scherp. De hoogte van

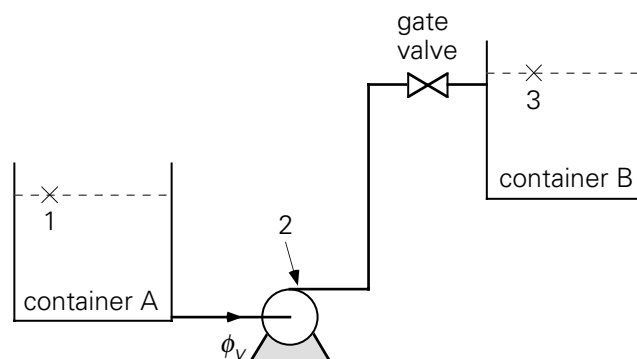
<sup>20</sup> Janssen, L.P.B.M. en M.M.C.G. Warmoeskerken, Transport Phenomena Data Companion, VSSD, Delft, 2006, p. 82–83

het vloeistofniveau in vat A bedraagt 3 m, in vat B is dat 13 m (gemeten t.o.v. grondniveau).

Gevraagd wordt te berekenen:

- het vermogen dat de pomp moet leveren om 2 l/s water te verpompen;
- de waarde van de hoogste druk die in dit systeem aanwezig is.

De beide vragen zijn op te lossen met behulp van de mechanische-energiebalans. Allereerst wordt deze balans toegepast op het systeem tussen de punten 1 en 3 (zie figuur 5.13): punt 1 bevindt zich op het oppervlak van het water in vat A waar geldt:  $p_1 = p_0$ , met  $p_0$  de omgevingsdruk;  $v_1 \approx 0$ ;  $z_1 =$  gegeven.



Figuur 5.13.

Punt 3 kiezen we ook op het oppervlak van het water in vat B, dus:

$p_3 = p_0$ ;  $v_3 \approx 0$ ;  $z_3 =$  gegeven.

Met het oog op de dissipatie in het systeem moeten de weerstandsgedaten  $K_L$  van de diverse appendages opgezocht worden:

twee scherpe haakse bochten	→ 2 × 1,3
open afsluiter	→ 0,2
scherpe intree	→ 0,5
uittrede	→ 1

De (gemiddelde) snelheid in de leiding volgt eenvoudig uit het debiet:  $v = 1,0$  m/s. Hieruit volgt dat het Reynolds-getal voor de stroming in de leiding  $5 \cdot 10^4$  is. De diameter van de leiding is constant en we kunnen dus de dissipatie ten gevolge van wandwrijving en appendages in één keer in rekening brengen – door gebruik te maken van vergelijking (5.45). Opzoeken van  $4f$  bij  $Re = 5 \cdot 10^4$  levert:  $4f = 0,02$ . Daarmee volgt:

$$\begin{aligned}
 e_{\text{diss}} &= 4f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} v^2 + (2 \cdot 1,3 + 0,2 + 0,5 + 1) \cdot \frac{1}{2} v^2 \\
 &= 12,15 \text{ J/kg}
 \end{aligned}
 \tag{5.46}$$

Verder vervangen we in vergelijking (5.42) de specifieke energiedissipatie  $e_{fr}$  door  $e_{diss}$ . Daarmee volgt voor het pompvermogen:

$$\phi_w = \phi_m \{ g(z_3 - z_1) + e_{diss} \} = 220 \text{ W} \quad (5.47)$$

De hoogste druk komt uiteraard (!) juist achter de pomp voor. Deze druk is te berekenen door een mechanische-energiebalans tussen de punten 1 en 2 (zie figuur 5.13) op te stellen. Voor punt 2 geldt:

$$p_2 = ? ; v = 1 \text{ m/s} ; z_2 \approx 0$$

De mechanische-energiebalans tussen de punten 1 en 2 wordt daarmee:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = g(z_1 - z_2) - \frac{1}{2}v^2 - e_{diss} + \frac{\phi_w}{\phi_m} \quad (5.48)$$

De dissipatie per massa-eenheid  $e_{diss}$  heeft nu enkel betrekking op de instroming de leiding in, d.w.z.  $e_{diss} = e_L = 0,5 \cdot \frac{1}{2}v^2$ , mits de lengte van het stukje leiding van vat A naar de pomp verwaarloosbaar klein is. Daarmee wordt berekend dat  $p_2 = 2,4$  bar.

⑤

### Voorbeeld 5.8. Een leeglopend bassin

Vanuit een hoger gelegen, groot, open bassin stroomt proceswater door een cilindervormige leiding (lengte 20 m, diameter 10 cm, wandruwheid 1 mm) naar een open kanaal. Het waterniveau in het bassin ligt 4 m boven dat van het kanaal. De leiding bevat 2 scherpe bochten van  $60^\circ$  (met  $K_L = 1,86$ ) en een schuifafsluiter om het waterdebiet mee te kunnen regelen. De weerstandsgedaten voor pijp-ingang en -uitgang zijn 0,2 en 1,0.

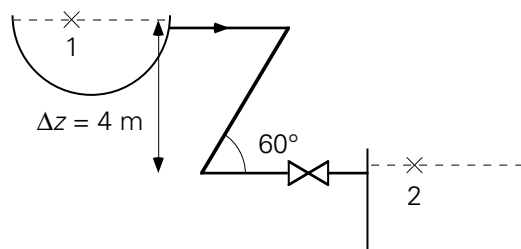
Gevraagd wordt het waterdebiet uit te rekenen als de schuifafsluiter voor de helft gesloten is.

De oplossing van dit probleem gaat ook weer met behulp van een mechanische-energiebalans tussen punt 1 aan het wateroppervlak in het bassin en punt 2 aan het wateroppervlak in het kanaal (zie figuur 5.14) - wederom dus tussen twee punten aan een wateroppervlak, omdat daar over veel variabelen uitspraken kunnen worden gedaan:

Voor punt 1 geldt:  $p_1 = p_0$ ,  $v_1 \approx 0$ ,  $z_1 = z_2 + \Delta z$ . Evenzo geldt voor punt 2:  $p_2 = p_0$ ,  $v_2 \approx 0$ . Daarmee wordt de mechanische-energiebalans:

$$0 = -g \Delta z - e_{diss} \quad (5.49)$$

De totale energiedissipatie in het leidingsysteem bij een (gemiddelde) snelheid  $v$  wordt gegeven door:



Figuur 5.14.

$$e_{\text{diss}} = \left( 4f \frac{L}{D} + K_{L,\text{tot}} \right) \cdot \frac{1}{2} v^2 \quad (5.50)$$

waar  $K_{L,\text{tot}} = 2 \times 1,86 + 0,2 + 1,0 + 6 = 10,9$  de effecten van alle appendages in rekening brengt.

Vergelijking (5.50) substitueren in vergelijking (5.49) levert

$$v = \sqrt{\frac{2g\Delta z}{4f \frac{L}{D} + K_{L,\text{tot}}}} \quad (5.51)$$

Hieruit kan  $v$  berekend worden met een iteratieve procedure, want  $4f$  is een functie van  $v$  (af te lezen in figuur 5.10 bij relatieve ruwheid 0,01). Als begin-schatting kan bijvoorbeeld  $v = 1$  m/s genomen worden. Dit geeft  $Re = 10^5$  en  $4f = 0,035$ . Deze waarde voor  $4f$  gebruiken in vergelijking (5.51) om een betere waarde voor  $v$  te berekenen levert  $v = 2,1$  m/s en hieruit volgt dan weer  $Re = 2,1 \cdot 10^5$  en  $4f = 0,035$ . Het itereren is daarmee dus al weer klaar. Het debiet is nu eenvoudig uit te rekenen:  $\phi_m = 16,5$  kg/s.

⑤

Merk op dat in beide voorbeelden de stroming in de leiding turbulent is, zodat inderdaad de weerstandsgetallen constant zijn.

### Samenvatting

De drukval in een leidingsysteem wordt niet uitsluitend bepaald door wrijving. Daarom is het goed werken met de mechanische-energiebalans mits uitdrukkingen beschikbaar zijn voor de energiedissipatie.

Voor de dissipatie als gevolg van wandwrijving in een rechte leiding geldt:

$$e_{fr} = 4f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \langle v \rangle^2$$

Indien het Reynolds-getal van de stroming voldoende groot is, is de dissipatie ten gevolge van een appendage te modelleren met een constant weerstandsgetal:

$$e_L = K_L \cdot \frac{1}{2} \langle v \rangle^2$$

waarin voor  $\langle v \rangle$  de benedenstroomse snelheid gekozen dient te worden. In het algemeen is de totale dissipatie  $e_{\text{diss}}$  de som van de wandwrijving  $e_{fr}$  in alle rechte stukken pijpleiding en van de energiedissipatie  $e_L$  in alle appendages.

## 5.5 Drukval over een gepakt bed

Leidingsystemen zijn niet de enige systemen waarbij drukval en dissipatie van belang zijn. Eigenlijk zijn in alle stromende systemen drukval en dissipatie belangrijke grootheden. Daarom komt in deze paragraaf nog een stromend systeem aan de orde, dat veel in de procesindustrie voorkomt: *het gepakte bed*. Dit bestaat uit een container volgestort met deeltjes die boven op elkaar rusten. Door de open ruimte die zich tussen de deeltjes bevindt, stroomt vloeistof. De vraag is nu hoe de dissipatie in en drukval over dit systeem afhangen van de doorstroomsnelheid.

Alvorens dit probleem aan te pakken is het dienstig eerst eens te bekijken hoe de dissipatie gemodelleerd wordt als de stroming niet door het ‘inwendige’ van een leiding, maar juist langs de ‘buitenzijde’ van een lichaam gaat. Beschouw daartoe het eenvoudigste geval van een bolvormig deeltje, dat stilstaat in een stromend medium met uniforme aanstroomsnelheid  $v$ . De kracht die de stroming op het deeltje uitoefent, is (zie § 2.3)

$$F_D = C_D \cdot A_{\perp} \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (5.52)$$

De dissipatie rond dit deeltje is nu analoog aan de redenering in § 5.4 te berekenen: daar is de dissipatie bepaald door de mechanische-energiebalans te gebruiken. Voor een horizontale rechte leiding met constante doorsnede geldt op basis van vergelijking (5.41):

$$0 = \phi_m \frac{p_1 - p_2}{\rho} - \phi_m e_{\text{diss}} \quad (5.53)$$

Deze vergelijking is echter ook anders te schrijven door het drukverschil  $p_1 - p_2$  via een krachtenbalans – zie vergelijking (5.21) – te relateren aan de schuifspanning aan de wand. Indien dan de totale *wrijvingskracht* die de wand via de schuifspanning op de vloeistof uitoefent,  $F_{fr}$  wordt genoemd, kan dit drukverschil herschreven worden tot:

$$\phi_m \frac{p_1 - p_2}{\rho} = \rho A v \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho} = A (p_1 - p_2) v = F_{\text{diss}} \cdot v \quad (5.54)$$

Naar analogie geldt dan voor de dissipatie rond een enkel vrij omstroomd deeltje dus

$$\phi_m e_{\text{diss}} = F_D \cdot v \quad (5.55)$$

en daaruit volgt dan weer

$$\phi_m e_{\text{diss}} = C_D A_{\perp} \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot v = C_D A_{\perp} \cdot \frac{1}{2} \rho v^3 \quad (5.56)$$

In een uniform gepakt bed van (min of meer) bolvormige, niet-poreuze deeltjes is uiteraard de omstroming van de deeltjes niet meer hetzelfde als bij een vrij deeltje. Wel mag verwacht worden dat de wrijvingskracht op een individueel deeltje in het bed nog volgens dezelfde lijnen als bij het vrije deeltje gemodelleerd kan worden. De totale energiedissipatie in een bed van  $N$  deeltjes volgt dan door de dissipatie ten gevolge van de wrijving langs één deeltje van het bed te vermenigvuldigen met het aantal deeltjes in de kolom  $N$ .

Voor de omstroming van een deeltje in het bed moet dan wel de lokale stroomsnelheid genomen worden: dat wil zeggen, de snelheid  $\langle v \rangle$  zoals die in de kanaaltjes tussen de op en tegen elkaar gestapelde deeltjes heerst. Dit is echter geen handige snelheid om mee te rekenen, want wel is het totale volumedebiet bekend dat door het gepakte bed gaat, maar niet direct  $\langle v \rangle$ . Dit is evenwel eenvoudig te verhelpen.

De deeltjes tezamen nemen een volume,  $V_d$ , in van het totale volume,  $V_0$ , van het bed. Hiermee is de volumefractie vrije ruimte in het bed – de zogenaamde *bed-porositeit* (Eng. ‘bed porosity’) – te definiëren als  $\varepsilon = (1 - V_d/V)$ . Het oppervlak van een dwarsdoorsnede door de lege container is  $A_0$  en dus is  $\varepsilon A_0$  het oppervlak dat in het gepakte bed beschikbaar is voor de stroming. Verder is  $v_0$  de snelheid die de vloeistof zou hebben als deze met hetzelfde debiet door de lege container zou stromen – de zogenaamde *superficiële snelheid* (Eng. ‘superficial velocity’).

Het verband tussen het volumedebiet en de stroomsnelheid  $\langle v \rangle$  wordt daarmee:

$$\phi_v = A_0 v_0 = \varepsilon A_0 \langle v \rangle \rightarrow \langle v \rangle = \frac{v_0}{\varepsilon} \quad (5.57)$$

Het volume dat de deeltjes innemen is  $(1 - \varepsilon) A_0 L$  (waarin  $L$  de bedhoogte is); het aantal deeltjes (met diameter  $d$ ) in het bed is daarmee:

$$N = \frac{(1 - \varepsilon) A_0 L}{\frac{\pi}{6} d^3} \quad (5.58)$$

Uiteindelijk volgt dan voor de energiedissipatie in het gepakte bed:

$$\phi_m e_{\text{diss}} = \frac{(1 - \varepsilon) A_0 L}{\frac{\pi}{6} d^3} \cdot C_D \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \frac{1}{2} \rho \left( \frac{v_0}{\varepsilon} \right)^3 \quad (5.59)$$

Elimineren van  $\phi_m = \rho A_0 v_0$  levert tenslotte

$$e_{\text{diss}} = \frac{3}{2} C_D \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{1}{2} v_0^2 \quad (5.60)$$

Nu rest dus nog de kwestie om  $C_D$  te bepalen voor de omstroming van deeltjes in een gepakt bed. Verwacht mag weer worden, dat  $C_D$  een functie van het Reynolds-getal zal zijn. De vraag is echter niet alleen: hoe ziet deze functie er uit? Maar ook: welk Reynolds-getal typeert de stroming door het bed? De karakteristieke snelheid is wel  $\langle v \rangle$ , maar de karakteristieke lengte is niet zonder meer de diameter van de deeltjes.

Een betere maat lijkt de hydraulische diameter van de holten tussen de deeltjes. Deze kan geschat worden op basis van de bedporositeit  $\varepsilon$  en de deeltjesgrootte  $d$ . Dan gaat het om  $4A/S$ , waarbij  $A$  de doorsnede van de holte voorstelt dat beschikbaar is voor de stroming en  $S$  de bevochtigde omtrek. Nu zijn de holten geen mooie rechte kanalen; daarom wordt bij voorkeur gewerkt met een *hydraulische diameter* gedefinieerd op basis van het volume van een holte en het totale oppervlak van de holte:

$$D_h = \frac{4 \times \text{volume holte}}{\text{wandoppervlak holte}} \quad (5.61)$$

Zowel de teller als de noemer in deze uitdrukking wordt vervolgens betrokken op het bedvolume. Voor de teller levert dat juist  $\varepsilon$  op, terwijl dan in de noemer het wandoppervlak van alle holten per volume-eenheid komt te staan dat wel het specifieke oppervlak  $a$  (in  $\text{m}^2/\text{m}^3$ ) genoemd wordt. Dit is te bepalen door het oppervlak  $\pi d^2$  van één deeltje te vermenigvuldigen met het aantal deeltjes in het bed  $N$  en tenslotte te delen door het totale bedvolume.

Met behulp van relatie (5.58) voor  $N$  volgt dan voor het specifieke oppervlak:

$$a = \frac{6(1-\varepsilon)A_0L}{\pi d^3} \cdot \pi d^2 \cdot \frac{1}{A_0L} = \frac{6(1-\varepsilon)}{d} \quad (5.62)$$

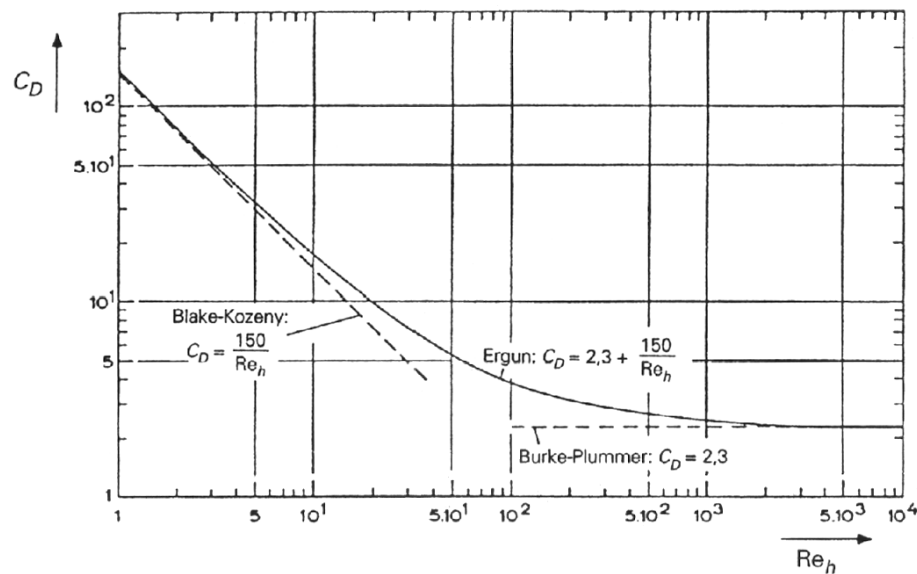
Het Reynolds-getal volgt nu als:

$$\text{Re}_h = \frac{\rho \langle v \rangle D_h}{\mu} = \frac{\rho \frac{v_0}{\varepsilon} \frac{4\varepsilon}{6(1-\varepsilon)/d}}{\mu} = \frac{2}{3} \frac{\rho v_0 d}{(1-\varepsilon)\mu} \quad (5.63)$$

Dit resultaat impliceert dat het Reynolds-getal voor een gepakt bed als karakteristieke snelheid de superficiële snelheid en als karakteristieke lengteschaal toch de deeltjesdiameter bevat, en dat de porositeit erin voorkomt.

Indien  $\text{Re}_h$  voldoende groot is, blijkt  $C_D$  constant te worden, analoog aan de omstroming van een enkele bol; de waarde is echter anders, nl. 2,3 (in plaats van 0,43). Dit resultaat gaat op voor  $\text{Re}_h > 2000$ . Voor  $\text{Re}_h < 1$  blijkt  $C_D$  omgekeerd evenredig

met  $Re_h$  te zijn, geheel in overeenstemming met een enkele omstroomde bol; echter ook nu is de evenredigheidsconstante verschillend:  $C_D = 150/Re_h$  (voor een enkele bol is de constante 24). In figuur 5.15 is het verloop van de  $C_D$  voor een gepakt bed als functie van  $Re_h$  weergegeven.



Figuur 5.15.

Ergun heeft een empirische vergelijking voor  $C_D$  opgesteld, die een goede beschrijving geeft voor het gehele  $Re_h$ -gebied uit figuur 5.15. Hij telde eenvoudig de laminaire en turbulente uitdrukkingen bij elkaar op:

$$C_D = 2,3 + \frac{150}{Re_h} \quad (5.64)$$

Deze *Ergun-relatie* invullen in vergelijking (5.59) levert voor de specifieke energiedissipatie:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = e_{\text{diss}} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \left\{ 170 \frac{\mu}{\rho v_0 d} (1-\varepsilon) + 1,75 \right\} \frac{L}{d} v_0^2 \quad (5.65)$$

#### Voorbeeld 5.9. Drukval over een gepakt bed

Een waterstroom met een debiet van 0,3 l/s moet ontdaan worden van  $Ca^{2+}$  ionen. Dit gebeurt in een cilindervormig gepakt bed gevormd door bolvormige ionwisselende deeltjes (diameter  $d = 2$  mm). De porositeit van het gepakte bed  $\varepsilon$  is 0,4. De lengte van de kolom is 2 m, de diameter  $D$  van de kolom bedraagt 0,25 m. Het water doorstroomt de kolom van onder naar boven.

Hoe groot is de drukval over de kolom?



Het antwoord volgt uit de mechanische-energiebalans over het gehele gepakte bed. Dan is duidelijk dat de drukval bestaat uit twee bijdragen: de drukval ten gevolge van de zwaartekracht (de hydrostatische drukval) en de drukval als gevolg van wrijving. Deze tweede bijdrage volgt uit het bepalen van  $e_{fr}$  volgens vergelijking (5.65). Hiervoor moet eerst  $v_0$  bepaald worden uit het debiet:

$$v_0 = \frac{\phi_v}{\frac{\pi}{4} D^2} = 6,1 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \quad (5.66)$$

Hiermee volgt voor de specifieke dissipatie:

$$e_{\text{diss}} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \left( 170 \frac{\mu}{\rho v_0 d} (1-\varepsilon) + 1,75 \right) \frac{L}{d} v_0^2 = 3,52 \text{ J/kg}$$

en voor de drukval:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \rho g L + \rho e_{\text{diss}} \\ &= 1,96 \cdot 10^4 + 3,52 \cdot 10^3 = 2,31 \cdot 10^4 \text{ Pa} \approx 0,23 \text{ bar} \end{aligned} \quad (5.67)$$

5

### Samenvatting

Er is afgeleid hoe drukval over en energiedissipatie in een gepakt bed afhangen van de superficiële snelheid door het bed. Daartoe is het bed opgevat als een verzameling deeltjes die krachten ondervinden van het omstromende fluïdum. Begrippen als porositeit, specifiek oppervlak en hydraulische diameter van de holten tussen de deeltjes zijn ingevoerd. De meesleepcoëfficiënt  $C_D$  van een deeltje in zo'n bed hangt af van een Reynolds-getal gedefinieerd met de superficiële snelheid, de deeltjesdiameter en de porositeit. Dit heeft allemaal geleid tot de relatie van Ergun

$$\Delta p = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \left( 170 \frac{\mu}{\rho v_0 d} (1-\varepsilon) + 1,75 \right) \frac{L}{d} \rho v_0^2$$

voor de wrijvingsdrukval over een gepakt bed.

## 5.6 Laminaire stroming van Newtonse vloeistoffen

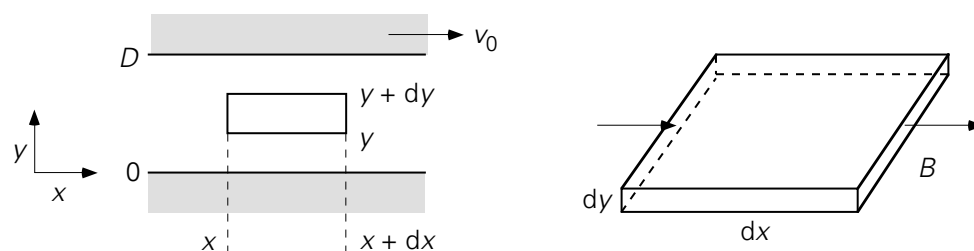
In de hoofdstukken 3 en 4 is uitgebreid besproken hoe voor moleculair transport in enkele eenvoudige geometrieën temperatuur- en concentratieprofielen bepaald konden worden. Uitgangspunt was steeds een energie- of massabalans over een dun plakje uit het materiaal (bv. tussen  $x$  en  $x + dx$ ). De stromen 'in' en 'uit' werden steeds gemodelleerd met behulp van de wet van Fourier of Fick (of Stefan). Zo'n zelfde

analyse is ook mogelijk om het snelheidsprofiel in een laminair stromend fluïdum te bepalen.

Als restrictie zal hier wel gehanteerd worden dat de laminaire stroming een-dimensionaal en tijdsafhankelijk is; bovendien zullen alleen geometrisch simpele situaties bekeken worden. Tenslotte zullen in deze paragraaf enkel fluïda aan de orde komen die gehoorzamen aan de *wet van Newton* (zie vergelijking (2.4)).

### 5.6.1 Laminaire stroming in cartesische coördinaten – onder invloed van een bewegende wand

De eerste situatie betreft een vlakke geometrie: een vloeistof (bijvoorbeeld een smeerolie) tussen twee horizontaal opgestelde, evenwijdige, zeer grote platen. De onderlinge afstand tussen de platen is  $D$ . De onderste plaat staat stil; de bovenste plaat beweegt met een constante snelheid  $v_0$  in de horizontale  $x$ -richting. De snelheid is voldoende laag – eigenlijk: het Reynolds-getal is voldoende laag – zodat de vloeistof inderdaad in ‘lagen’ evenwijdig aan de beide platen stroomt. Dit betekent dat de stroming *laminair* is en dat het transport van  $x$ -impuls in de  $y$ -richting inderdaad alleen voor rekening van individuele moleculen komt. Deze stationaire situatie is geïllustreerd in figuur 5.16.



Figuur 5.16.

Om het snelheidsprofiel te bepalen moet begonnen worden met het opstellen van een  $x$ -impulsbalans over een dun plakje met dikte  $dy$  (tussen  $y$  en  $y + dy$ ), met lengte  $dx$  (tussen  $x$  en  $x + dx$ ) en breedte  $B$  (loodrecht op het vlak van tekening).

Er stroomt echter bij deze evenwijdige platen en onder de opgegeven stationaire condities convectief net zoveel impuls door het linkzijdvlak (op  $x = x$ ) het controlevolume (het dunne plakje) in als er door het rechterzijdvlak (op  $x = x + dx$ ) convectief weer uitgaat. Bovendien vindt er, omdat de stroming laminair en één-dimensionaal is, geen convectief impulstransport plaats door de andere vlakken van het controlevolume. Als verder, in het licht van het besprokene in § 2.1.4, het moleculaire (of diffusieve) impulstransport beschreven wordt in termen van schuifspanningen, dan reduceert de impulsbalans tot een *krachtenbalans*. Deze krachtenbalans bevat dan informatie over het schuifspanningsprofiel.

Voor de situatie van figuur 5.16 is alleen de krachtenbalans in de  $x$ -richting van belang. Er werken op het controlevolume slechts twee krachten in de  $x$ -richting, namelijk een schuifspanning op het ondervlak en een schuifspanning op het bovenvlak. De kracht op het ondervlak  $B dx \cdot \tau_{yx}|_y$ : deze uitdrukking staat voor de kracht die de laag net onder het controlevolume door stromend uitoefent op de laag die er net boven binnen het controlevolume ligt. Bedenk dat de schuifspanning juist zo gedefinieerd is, dat de laag met de kleinste coördinaat  $+ \tau_{yx}$  uitoefent op de laag met de grotere coördinaat (zie weer § 2.1.4). Dit betekent dat aan de bovenzijde van het controlevolume juist een kracht  $B dx \cdot \left[ - \tau_{yx}|_{y+dy} \right]$  op het controlevolume wordt uitgeoefend door het fluïdum dat over het controlevolume heen stroomt. De krachtenbalans luidt nu dus:

$$0 = B dx \cdot \tau_{yx}|_y + B dx \cdot \left[ - \tau_{yx}|_{y+dy} \right] \quad (5.68)$$

Deze balans is eenvoudig te herleiden tot de differentiaalvergelijking waaraan de schuifspanning moet voldoen:

$$\frac{d}{dy} \tau_{yx} = 0 \quad (5.69)$$

De oplossing van deze vergelijking is:

$$\tau_{yx} = \text{constant} \quad (5.70)$$

Het is goed om te bedenken, dat tot hier toe nog helemaal niet gebruikt is of de vloeistof voldoet aan de wet van Newton:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (5.71)$$

Het *schuifspanningsprofiel* zoals dat voor deze situatie is gevonden, is kennelijk onafhankelijk van de eigenschappen van de vloeistof. Deze bevinding is algemeen geldig: het schuifspanningsprofiel is slechts afhankelijk van de krachtenbalans (of beter de impulsbalans) en niet van de soort vloeistof.

Met het oog op het bepalen van het *snelheidsprofiel* dient wèl van een verband tussen schuifspanning en snelheidsgradiënt gebruik gemaakt te worden. Veronderstel dan *nu* dat de vloeistof tussen de beide platen Newtons is. Substitutie van uitdrukking (5.71) in vergelijking (5.70) geeft

$$-\mu \frac{d}{dy} v_x = \text{const} \rightarrow \frac{d}{dy} v_x = C_1 \quad (5.72)$$

Oplossen van vergelijking (5.72) geeft:

$$v_x(y) = C_1 y + C_2 \quad (5.73)$$

De beide integratieconstanten zijn te vinden met behulp van de twee gegeven randvoorwaarden:  $y = 0 \rightarrow v_x = 0$  en  $y = D \rightarrow v_x = v_0$ . Dit levert het snelheidsprofiel op:

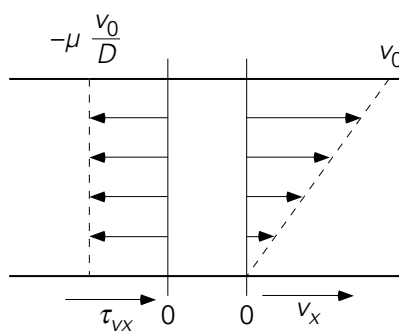
$$v_x(y) = v_0 \cdot \frac{y}{D} \quad (5.74)$$

Deze relatie is equivalent met vergelijking (3.5) voor warmtegeleiding door een vlakke plaat en met vergelijking (4.11) voor diffusie door een vlakke plaat. Substitutie van relatie (5.74) in de viscositeitswet van Newton geeft een constante waarde voor de schuifspanning

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{v_0}{D} \quad (5.75)$$

zoals ook de fluxen  $\phi_q''$  en  $\phi_m''$  volgens respectievelijk de vergelijkingen (3.6) en (4.12) constanten zijn.

In figuur 5.17 is zowel het schuifspanningsprofiel als het snelheidsprofiel getekend. Hierin is duidelijk te zien dat de schuifspanning negatief is: elke 'onder'liggende laag oefent een kracht in de negatieve  $x$ -richting uit op de er 'boven' liggende laag en verzet zich aldus tegen de stroming ten gevolge van de bewegende topplaat.



Figuur 5.17.

Tenslotte laat bovenstaande afleiding duidelijk zien dat in een stationaire laminaire stroming de dichtheid van de vloeistof geen rol speelt: de stroming wordt helemaal bepaald door de viscositeit. Dit geldt voor alle stromingen in § 5.6 en onderstreept opmerkingen gemaakt in Hoofdstuk 2 met betrekking tot het al dan niet meenemen van dichtheid en viscositeit in dimensie-analyses van stromingen en convectief warmte- en stoftransport.

### 5.6.2 Laminaire stroming in cartesische coördinaten – onder invloed van een drukgradiënt

De tweede situatie betreft ook een vlakke geometrie en daarom is figuur 5.16 weer een goede schets; alleen is de drijvende kracht voor de stroming in de  $x$ -richting nu niet een bewegende plaat of wand – want beide platen bewegen nu niet – maar een opgelegde drukgradiënt  $\left[-\frac{dp}{dx}\right]$ . Het minteken is hier geïntroduceerd om een positieve drijvende ‘kracht’ te krijgen in de positieve  $x$ -richting, omdat nu eenmaal  $dp/dx$  negatief is voor een stroming in de positieve  $x$ -richting waar hier sprake van is. In plaats van  $[-dp/dx]$  zou ook  $\Delta p/L$  geschreven kunnen worden, waarbij  $\Delta p$  staat voor het positieve drukverschil over de afstand  $L$  tussen twee posities stroomopwaarts en stroomafwaarts dat de stroming aandrijft. De eenheid van een drukgradiënt is Pa/m, wat beter opgevat kan worden als  $\text{Ns/m}^3\text{s}$  om uit te drukken dat een drukgradiënt een middel is om per tijdseenheid een hoeveelheid impuls (in Ns) toe te voeren aan een volume-eenheid. Waar het een eendimensionale stroming tussen parallelle platen betreft, is in de  $x$ -richting de drukgradiënt constant en zou deze dus gemakshalve genoteerd mogen worden als een constante, gegeven  $\Gamma$ .

Ook in deze situatie reduceert de impulsbalans tot een krachtenbalans, maar nu werken er vier krachten in de  $x$ -richting op het plakje met volume  $Bdxdy$ . Twee van deze krachten zijn dezelfde als in het vorige geval:  $Bdx \cdot \tau_{yx}|_y$  en  $Bdx \cdot \left[-\tau_{yx}|_{y+dy}\right]$  die langs resp. het onder- en bovenvlak werken; de andere twee krachten zijn het gevolg van het drukveld en werken loodrecht op de kopse kanten van het plakje:  $Bdy \cdot p|_x$  en  $Bdy \cdot \left[-p|_{x+dx}\right]$  waarbij het minteken in de laatste kracht in rekening brengt dat de kracht van buitenaf op het plakje op positie  $x + dx$  in de negatieve  $x$ -richting staat. De krachtenbalans voor een stationaire toestand luidt dat de som van de krachten nul is:

$$0 = Bdx \cdot \tau_{yx}|_y + Bdx \cdot \left[-\tau_{yx}|_{y+dy}\right] + Bdy \cdot p|_x + Bdy \cdot \left[-p|_{x+dx}\right] \quad (5.76)$$

Alle termen delen door  $Bdxdy$  en gelijksoortige termen combineren leidt tot de differentiaalvergelijking

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = -\frac{dp}{dx} = \Gamma \quad (5.77)$$

met de oplossing

$$\tau_{yx} = \Gamma y + C_1 \quad (5.78)$$

Wederom is tot hier toe niet aan de orde geweest of het fluïdum een Newtonse of een niet-Newtonse vloeistof is. Dus is voor een stroming tussen twee vlakke, stilstaande platen onder invloed van een drukgradiënt het schuifspanningsprofiel een lineaire functie van de dwarscoördinaat  $y$  – onafhankelijk van de eigenschappen van het fluïdum. Geheel in overeenstemming met de definitie van de schuifspanning (‘onderliggend’ op ‘bovenliggend’: zie weer § 2.1.4) remt de stilstaande onderste plaat op  $y = 0$  het fluïdum af door een kracht uit te oefenen in de negatieve  $x$ -richting, en oefent de stroming op  $y = D$  een kracht in de positieve  $x$ -richting uit op de bovenste plaat.

De integratieconstante  $C_1$  kan gevonden worden met behulp van het gegeven dat in het geval van twee stilstaande platen de snelheid halverwege de platen (in het vlak van symmetrie) maximaal zal zijn. Dat betekent dat de afgeleide van de  $x$ -snelheid naar  $y$  daar nul is – en dat betekent weer op zijn minst voor een Newtonse vloeistof dat  $y = \frac{1}{2}D \rightarrow \tau_{yx} = 0$ . Daarmee gaat vergelijking (5.78) over in:

$$\tau_{yx} = \Gamma \cdot \left( y - \frac{1}{2}D \right) = \Gamma \cdot D \cdot \left( \frac{y}{D} - \frac{1}{2} \right) \quad (5.79)$$

Voor een Newtonse vloeistof leidt uitdrukking (5.79) tot

$$v_x = -\frac{\Gamma}{\mu} \cdot \left( \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}Dy \right) + C_2 \quad (5.80)$$

Deze tweede integratieconstante,  $C_2$ , kan bepaald worden met behulp van een randvoorwaarde voor de snelheid op  $y = 0$  dan wel  $y = D$  (vanwege de symmetrie) aangezien  $v_x = 0$  op beide posities. Dus wordt gevonden dat  $C_2 = 0$ . Het uiteindelijke snelheidsprofiel luidt dan:

$$v_x = \frac{\Gamma}{2\mu} \cdot y \cdot (D - y) \quad (5.81)$$

Bovenstaande vergelijking laat zien dat voor een viskeuze of laminaire stroming het snelheidsprofiel niet afhangt van de dichtheid van het fluïdum, en bevestigt de opmerking in hoofdstuk 2 dat de dichtheid buiten beschouwing kan en moet blijven bij een dimensieanalyse voor een (horizontale) viskeuze stroming.

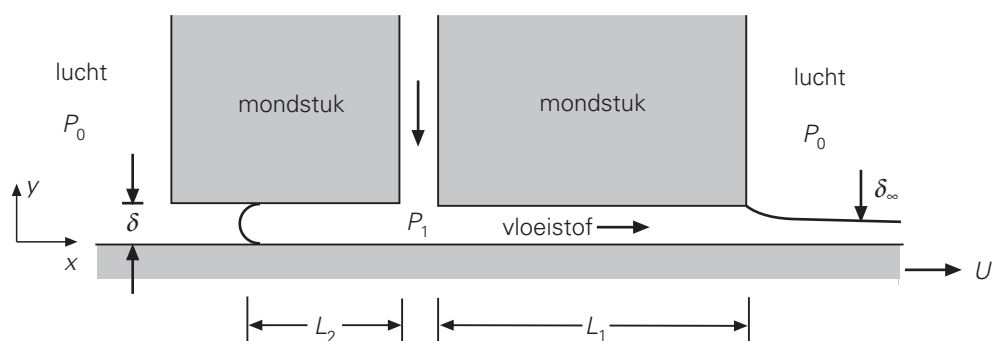
Hetzelfde resultaat zou zijn verkregen door niet  $C_1$  te bepalen met  $\tau_{yx} = 0$  op  $y = \frac{1}{2}D$  maar door – nog steeds voor een Newtonse vloeistof – een uitdrukking voor het snelheidsprofiel af te leiden door uitdrukking (5.71) te substitueren in vergelijking (5.78); het resultaat bevat dan zowel  $C_1$  als  $C_2$  die worden bepaald met de twee

bovengenoemde randvoorwaarden voor de snelheid. Door beide randvoorwaarden te gebruiken wordt impliciet erkend dat het vlak  $y = \frac{1}{2}D$  voor het snelheidsprofiel een symmetrievlak is waar de snelheid maximaal en de schuifspanning nul is.

Merk op dat voor het schuifspanningsprofiel het vlak  $y = \frac{1}{2}D$  niet een symmetrievlak is! Op basis van de moleculaire interpretatie van de schuifspanning  $\tau_{yx}$  als een flux van  $x$ -impuls in de  $y$ -richting (zie § 2.1.4) kunnen we echter toch concluderen dat in dit geval  $\tau_{yx} = 0$  op  $y = \frac{1}{2}D$ . We gebruiken hier weer een symmetrie-argument: vanaf  $y = \frac{1}{2}D$  ziet de stroming er hetzelfde uit of we nu opwaarts kijken in de richting van  $y = D$  of neerwaarts naar  $y = 0$ . Dientengevolge moet het transport van  $x$ -impuls in de  $y$ -richting op  $y = \frac{1}{2}D$  wel nul zijn.

**Voorbeeld 5.10. Slot coating II**<sup>21</sup>

In dit voorbeeld wordt teruggekeken op de geometrie eerder besproken in voorbeeld 2.7. Onderstaande figuur is weer de dwarsdoorsnede door het mondstuk (*Eng.* ‘die’) van een coatingmachine. De zeer viskeuze Newtonse vloeistof wordt door het verticale kanaal aangevoerd en dan meegenomen door de plaat of band (*Eng.* ‘web’) die met snelheid  $U$  naar rechts beweegt. Het resultaat is dat deze plaat of band een coating krijgt met een dikte  $\delta_\infty$  die kleiner is dan de kanaalhoogte  $\delta$ . Beschouw een stationaire eendimensionale stroming in de  $x$ -richting, met het gegeven assenstelsel.



*Figuur 5.18*

Een beschouwing beperkt tot het  $x$ - $y$  vlak volstaat. Beschouw een stationaire situatie waarbij de druk  $P_1$  uiteraard hoger is dan de buitendruk  $P_0$ , waardoor de vloeistof zich over een vaste (tijdsonafhankelijke) lengte  $L_2$  ook in de ‘verkeerde’ richting uitstrekt. Snelheden in de  $y$ -richting (o.a. in het gebiedje waar de verticale stroming omgebogen wordt in stromingen in de  $x$ -richting) mogen buiten beschouwing gelaten worden.

<sup>21</sup> Dit vraagstuk is ontleend aan W.H. Deen, *Analysis of Transport Phenomena*, Oxford University Press, 2011.

De situatie kan daarmee opgevat worden als een laminaire stroming van een zeer viskeuze Newtonse vloeistof tussen twee vlakke platen, waarvan de onderste beweegt en de bovenste uit twee delen bestaat en stil staat.

De volgende sub-vragen zijn aan de orde:

- Leid uitdrukkingen af voor het schuifspanningsprofiel en het snelheidsprofiel in het deel  $L_1$  (ver genoeg verwijderd van het verticale toevoerkanaal om te mogen veronderstellen dat de stroming daar inderdaad uitsluitend in de  $x$ -richting is). Schets deze profielen.
- Leid ook uitdrukkingen af voor het schuifspanningsprofiel en het snelheidsprofiel in het deel  $L_2$  (ver genoeg verwijderd van het verticale toevoerkanaal en van het bolle uiteinde op  $x = L_2$  m weer te mogen veronderstellen dat de stroming inderdaad uitsluitend in de  $x$ -richting is). Schets ook deze profielen.
- Leid een uitdrukking af voor het debiet (per diepte-eenheid) naar rechts en (daarmee samenhangend) voor de coatingdikte  $\delta_\infty$  buiten het mondstuk (en voldoende ver van het mondstuk).
- Leid een uitdrukking af voor  $L_2$  met behulp van het gegeven dat het debiet naar links nul is. Vergelijk je antwoord met de uitkomst van voorbeeld 2.7.

Uitgangspunt voor de beantwoording van deze vragen is vergelijking (5.77). Substitutie van Newton's viscositeitswet, vergelijking (5.71), in vergelijking (5.77) resulteert in

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{dP}{dx} = -\Gamma \quad (5.82)$$

met als oplossing

$$v_x = -\frac{\Gamma}{2\mu} y^2 + \frac{C_1}{\mu} y + C_2 \quad (5.83)$$

De randvoorwaarden voor beide zones  $L_1$  en  $L_2$  luiden

$$\begin{aligned} y=0 : v_x &= U \\ y=\delta : v_x &= 0 \end{aligned} \quad (5.84)$$

en leiden met vergelijking (5.83) tot de volgende uitdrukkingen voor schuifspannings- en snelheidsprofielen:

$$\tau_{yx} = -\frac{\mu U}{\delta} + \Gamma \cdot \left( y - \frac{1}{2} \delta \right) \quad (5.85)$$



$$v_x = U \cdot \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) + \frac{\Gamma}{2\mu} y(\delta - y) \quad (5.86)$$

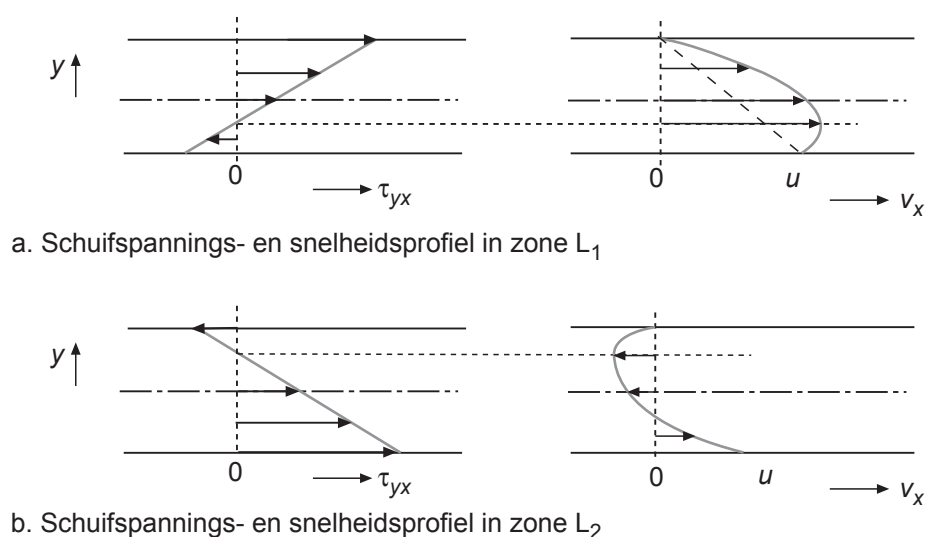
Het verschil tussen de twee zones  $L_1$  en  $L_2$  is dat in zone  $L_1$

$$\Gamma = -\frac{dp}{dx} = \frac{P_1 - P_0}{L_1} > 0 \quad (5.87)$$

terwijl in zone  $L_2$

$$\Gamma = -\frac{dp}{dx} = \frac{P_0 - P_1}{L_2} < 0 \quad (5.88)$$

Dit impliceert dat het snelheidsprofiel in zone  $L_1$  opgebouwd is uit twee bijdragen die beide in de positieve x-richting werken: een meesleepterm ten gevolge van de bewegende wand plus een tweede term vanwege het drukverschil  $P_1 - P_0$ , terwijl in zone  $L_2$  de drukbijdrage negatief is en tegen de meesleepterm in werkt. De respectievelijke snelheidsprofielen zijn in Figuur 5.19 geschetst.



Figuur 5.19.

Het debiet naar rechts (per diepte-eenheid) in zone  $L_1$ , zoals gevraagd in sub-vraag c, wordt gevonden door het snelheidsprofiel te integreren:

$$\begin{aligned} \phi'_v &= \int_0^{\delta} v_x(y) dy = \int_0^{\delta} \left[ U \cdot \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) + \frac{\Gamma}{2\mu} y(\delta - y) \right] dy = \\ &= \frac{1}{2} U \delta + \frac{P_1 - P_0}{12\mu L_1} \delta^3 \end{aligned} \quad (5.89)$$

Buiten het mondstuk beweegt alle vloeistof met snelheid  $U$  omdat de randvoorwaarde (snelheid nul) aan de bovenzijde van de vloeistoflaag dan niet meer geldt – resulterend in een nieuwe uitdrukking voor het debiet per breedte-eenheid:

$$\phi'_V = U \delta_\infty \quad (5.90)$$

Dankzij een overall massabalans zijn deze twee debieten gelijk aan elkaar; daarmee volgt een uitdrukking voor de uiteindelijke dikte  $\delta_\infty$  van de coating:

$$\frac{\delta_\infty}{\delta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \Gamma^* \quad (5.91)$$

waarin de dimensieloze drukgradiënt  $\Gamma^*$  staat voor de verhouding tussen drukkracht en meesleepkracht:

$$\Gamma^* = \frac{(P_1 - P_0) \delta^2}{\mu U L_1} \quad (5.92)$$

De lengte  $L_2$  – het onderwerp van sub-vraag d – volgt uit de waarneming dat in het beschouwde stationaire geval er geen netto debiet is in zone  $L_2$ , noch naar rechts, noch naar links: de onderste vloeistoflagen worden door de bewegende band naar rechts meegesleurd, terwijl de bovenste lagen onder invloed van het heersende drukverschil juist naar links gedrukt worden. Deze twee effecten heffen elkaar op en bepalen de stationaire lengte  $L_2$ . Door het opleggen van de conditie

$$\phi'_V = \int_0^\delta v_x(y) dy = 0 \quad (5.93)$$

en door de uitdrukkingen (5.86) en (5.88) in vergelijking (5.93) te substitueren wordt een uitdrukking voor  $L_2$  verkregen:

$$L_2 = \frac{(P_1 - P_0) \delta^2}{6 \mu U} \quad (5.94)$$

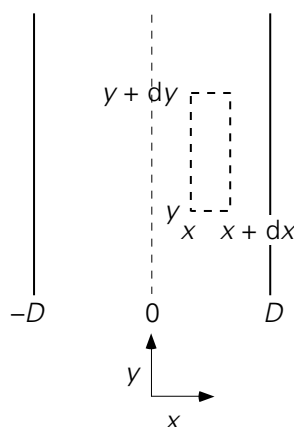
die bijvoorbeeld laat zien dat  $L_2$  kleiner wordt voor grotere  $U$ . Dit resultaat is geheel in overeenstemming met het resultaat van de dimensie-analyse van voorbeeld 2.7.

⑤

### 5.6.3 *Laminaire stroming in cartesische coördinaten – onder invloed van de zwaartekracht*

Nu gaat het om de laminaire stroming van een Newtonse vloeistof tussen twee verticaal opgestelde zeer grote platen. De afstand tussen beide platen wordt (om redenen die later zullen blijken) nu  $2D$  genoemd. De stroming vindt hier uitsluitend

plaats onder invloed van de zwaartekracht – er is nu geen drukverschil als drijvende kracht voor de stroming. Deze stationaire toestand is geschetst in figuur 5.20. Let op dat, anders dan eerdere situaties, de stroming nu in de (negatieve) y-richting is!



Figuur 5.20.

Ook hier wordt eerst weer het schuifspanningsprofiel bepaald. En ook hier reduceert de y-impulsbalans over het controlevolume  $Bdx dy$  tot de krachtenbalans  $\sum F_y = 0$ :

$$0 = B dy \cdot \tau_{xy}|_x + B dy \cdot \left[ -\tau_{xy}|_{x+dx} \right] - B dx dy \cdot \rho g \quad (5.95)$$

waar – in vergelijking met vergelijking (5.76) – de rol van de druktermen is overgenomen door de zwaartekracht. De zwaartekracht werkt op de massa van het plakje:  $F = M \cdot g$  (in  $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$  of in  $\text{kg} \cdot \text{N}/\text{kg}$ ) en voegt weer impuls (in Ns) toe per tijds- en massa-eenheid. Uit vergelijking (5.95) volgt de differentiaalvergelijking voor de schuifspanning:

$$\frac{d\tau_{xy}}{dx} = -\rho g \quad (5.96)$$

met als oplossing:

$$\tau_{xy}(x) = -\rho g x + C_1 \quad (5.97)$$

Het snelheidsprofiel volgt door gebruik te maken van het gegeven dat de vloeistof Newtons is:

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{d}{dx} v_y \rightarrow \frac{d}{dx} v_y = \frac{\rho g}{\mu} x - \frac{C_1}{\mu} \quad (5.98)$$

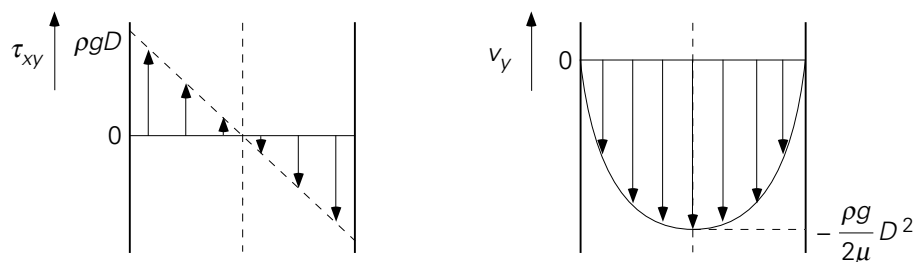
en door vergelijking (5.78) te integreren:

$$v_y = \frac{\rho g}{\mu} \frac{1}{2} x^2 - \frac{C_1}{\mu} x + C_2 \quad (5.99)$$

De twee integratieconstanten kunnen bepaald worden met behulp van de twee voor de hand liggende randvoorwaarden voor de snelheid, nl.  $x = \pm D \rightarrow v_y = 0$ . Dit geeft  $C_1 = 0$  en  $2C_2 = -\rho g D^2 / \mu$ , waarmee:

$$v_y(x) = -\frac{\rho g}{2\mu}(D^2 - x^2) \quad (5.100)$$

Het snelheidsprofiel heeft dus de vorm van een parabool. De vloeistof stroomt natuurlijk omlaag – let op het minteken! De maximale snelheid is te vinden op  $x = 0$ . In figuur 5.21 zijn weer de profielen van schuifspanning en snelheid weergegeven.



Figuur 5.21.

De integratieconstante  $C_1$  is ook in dit geval directer te bepalen door al eerder gebruik te maken van de symmetrie die in dit probleem aanwezig is. Deze symmetrie zit weer verborgen in de beide randvoorwaarden aan de snelheid: beide platen zijn stilstaande wanden met hetzelfde effect op de stroming (precies zoals in § 5.6.2). Vanwege deze symmetrie kan er ook geen  $y$ -impuls door het vlak  $x = 0$  getransporteerd worden, want dan zouden de twee ‘helften’ van de stroming verschillend zijn of worden. Dit betekent dat de beide ‘helften’ geen kracht (schuifspanning) op elkaar uitoefenen:  $x = 0 \rightarrow \tau_{xy} = 0$ . Ook dit is dus weer zo’n symmetrische situatie waarbij de as  $x = 0$  ook prima midden tussen de twee platen gekozen kan worden.

Voorts is juist vanwege het verband tussen schuifspanning en snelheidsgradiënt de snelheid op  $x = 0$  ook maximaal. De symmetrievoorwaarde laat hier dan ook toe bij vergelijking (5.97) direct te concluderen dat  $C_1 = 0$  zodat zonder de omweg via het snelheidsprofiel direct volgt:

$$\tau_{xy}(x) = -\rho g x \quad (5.101)$$

#### Voorbeeld 5.11. Filmcondensatie II

Met behulp van bovenstaande theorie kan vergelijking (3.193) uit voorbeeld 3.16 betreffende filmcondensatie verder uitgewerkt worden. Daarvoor is het nodig na te gaan hoe  $\phi_v$  verandert in de stromingsrichting  $x$  (nu neerwaarts gekozen). Dit debiet hangt af van zowel de laagdikte als het snelheidsprofiel in de laag. Deze

afhankelijkheid kan gevonden worden door voor een bepaalde dikte  $\delta$  het snelheidsprofiel en daaruit het vloeistofdebiet behorend bij die  $\delta$  te bepalen.

Beschouw dan in de situatie van figuur 3.32 een dun plakje met dikte  $dy$  op enige afstand van de wand (dit is feitelijk de helft van het hierboven behandelde geval van stroming tussen twee verticale vlakke platen). Uit een krachtenbalans over dit plakje volgt, analoog aan vergelijking (5.97) maar dankzij de andere coördinaatkeuze:

$$\tau_{yx} = -\rho g y + C_1 \quad (5.102)$$

Op  $y = \delta \rightarrow \tau_{yx} = 0$ , want er geldt dat de snelheid maximaal is aan het oppervlak van de film en dat er hoegenaamd geen impuls wordt overgedragen naar, of geen schuifspanning uitgeoefend op, de lucht (vergelijk ook eenzelfde aanname betreffende het contactvlak vloeistof-lucht in voorbeeld 3.10). Daarmee volgt dan

$$\tau_{yx} = \rho g (\delta - y) \quad (5.103)$$

Voor een Newtonse vloeistof leidt substitutie van de wet van Newton, integratie, en gebruik van de randvoorwaarde  $y = 0 \rightarrow v = 0$  tot

$$v = \frac{\rho g}{\mu} \left( \frac{1}{2} y^2 - y \delta \right) \quad (5.104)$$

Integratie van dit snelheidsprofiel over de dikte  $\delta$  resulteert in de volgende uitdrukking voor het debiet door de film over een breedte  $b$ :

$$\phi_v = \frac{\rho g \delta^3 b}{3\mu} \quad (5.105)$$

Differentiëren naar  $\delta$  en substitueren van het resultaat in vergelijking (3.193) geeft

$$\Delta h_v \rho^2 g \delta^3 d\delta = \mu \lambda (T - T_w) dx \quad (5.106)$$

Integratie tussen de grenzen  $x = 0 \rightarrow \delta = 0$  en  $x = L \rightarrow \delta = \delta_L$  leidt tot

$$\delta_L = \left( \frac{4\mu \lambda (T - T_w) L}{\rho^2 g \Delta h_v} \right)^{1/4} \quad (5.107)$$

Een uitdrukking voor de over de hoogte  $L$  gemiddelde warmteoverdrachtscoëfficiënt  $\langle h \rangle$  volgt uit een warmtebalans over de gehele film tussen  $x = 0$  en  $x = L$ :

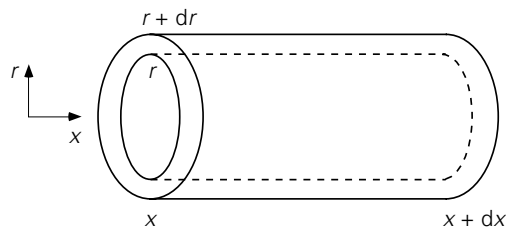
$$\langle h \rangle (T - T_w) bL = \phi_v \Big|_{x=L} \cdot \rho \Delta h_v \quad (5.108)$$

Combineren van de vergelijkingen (5.105), (5.107) en (5.108) resulteert in vergelijking (3.194).

⑤

#### 5.6.4 Laminaire stroming in cilindercoördinaten – onder invloed van een drukgradiënt

Tenslotte zal hier een voorbeeld van een stroming in een cilindrische geometrie besproken worden: tijdsafhankelijke laminaire stroming van een Newtonse vloeistof door een horizontaal opgestelde, zeer lange rechte cilindrische buis onder invloed van een drukgradiënt. Hier kan een *krachtenbalans* opgesteld worden voor een mini-kokertje binnen de vloeistof met dikte  $dr$  (tussen  $r$  en  $r + dr$ ) en met lengte  $dx$  (zie figuur 5.22).



Figuur 5.22.

Op het linkerzijvlak (de kopse kant op  $x = x$ ) van het kokertje werkt weer een kracht  $p|_x \cdot 2\pi r dr$  in de positieve  $x$ -richting. Evenzo werkt aan het rechterzijvlak (de kopse kant op  $x = x + dx$ ) van buitenaf een kracht op het kokertje in de negatieve  $x$ -richting, dus  $-p|_{x+dx} \cdot 2\pi r dr$ . Aan de binnenzijde van het kokertje werkt op het oppervlak  $2\pi r dx$  de schuifspanning  $\tau_{rx}|_r$ , terwijl op het buitenoppervlak  $2\pi (r + dr) dx$  de schuifspanning  $-\tau_{rx}|_{r+dr}$  werkt. Dit levert onderstaande krachtenbalans op:

$$0 = p|_x 2\pi r dr + (-p|_{x+dx} 2\pi r dr) + \tau_{rx}|_r \cdot 2\pi r dx + [-\tau_{rx}|_{r+dr} \cdot 2\pi (r + dr) dx] \quad (5.109)$$

Deze vergelijking kan ook geschreven worden als:

$$0 = p|_x 2\pi r dr - p|_{x+dx} 2\pi r dr + 2\pi (r\tau_{rx})|_r dx - 2\pi (r\tau_{rx})|_{r+dr} dx \quad (5.110)$$

waarbij in de derde en vierde term van het rechterlid tussen haken het product van straal en schuifspanning staat – omdat omtrek (of: oppervlak) en schuifspanning beide

van  $r$  afhangen, zie ook bijvoorbeeld vergelijking (3.35). Vergelijking (5.83) is eenvoudig (deel alle termen door  $2\pi r dr dx$ ) te herschrijven tot de differentiaalvergelijking voor de schuifspanning:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau_{rx}) = - \frac{dp}{dx} = \Gamma \quad (5.111)$$

Nu is weer de drukgradiënt gegeven en constant, zodat – met voor  $[-dp/dx]$  weer de notatie  $\Gamma$  (zie § 5.6.2) – deze vergelijking vrij simpel op te lossen is:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(r\tau_{rx}) &= \Gamma r \quad \rightarrow \quad r\tau_{rx} = \frac{1}{2}\Gamma r^2 + C_1 \\ \rightarrow \quad \tau_{rx} &= \frac{1}{2}\Gamma r + \frac{C_1}{r} \end{aligned} \quad (5.112)$$

Ook nu geldt weer op grond van symmetrie-overwegingen, dat de schuifspanning op de as van de cilinder gelijk aan nul moet zijn:  $r = 0 \rightarrow \tau_{rx} = 0$ . Dit betekent dat de integratieconstante  $C_1$  nul is. Het schuifspanningsprofiel is dan:

$$\tau_{rx}(r) = \frac{1}{2}\Gamma r \quad (5.113)$$

Bedenk dat  $\Gamma > 0$ : er is immers sprake van een drukval, want de wrijving aan de wand en intern van de laagjes vloeistof over elkaar moet overwonnen worden. Vergelijking (5.113) laat zien dat in overeenstemming met de definitie van schuifspanning inderdaad  $\tau_{rx} \geq 0$ .

Het snelheidsprofiel volgt nu door weer te gebruiken dat de vloeistof Newtons is; dan volgt:

$$\frac{d}{dr}v_x = - \frac{\Gamma}{2\mu} r \quad (5.114)$$

De oplossing hiervan is

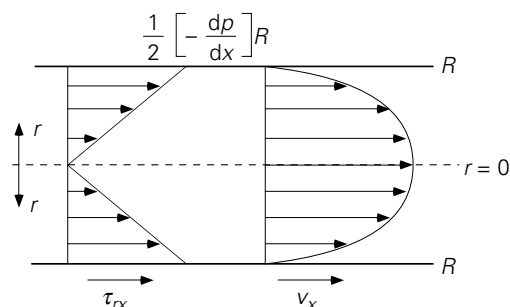
$$v_x = - \frac{\Gamma}{4\mu} r^2 + C_2 \quad (5.115)$$

De integratieconstante  $C_2$  is te bepalen met de randvoorwaarde:  $r = R \rightarrow v_x = 0$ . Dit geeft

$$v_x(r) = \frac{\Gamma}{4\mu} (R^2 - r^2) = \frac{R^2 \Gamma}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (5.116)$$

Dit is wederom een parabool met de maximale snelheid op de as van de cilinder (de symmetrieas op  $r = 0$ ). Het schuifspanningsprofiel – vergelijking (5.113) – en het

snelheidsprofiel – vergelijking (5.116) – zijn in figuur 5.23 geschetst. De middellijn  $r = 0$  is een symmetrie-as!



Figuur 5.23.

De gemiddelde vloeistofsnelheid is:

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^R v_x(r) 2\pi r dr}{\int_0^R 2\pi r dr} = \frac{R^2 \Gamma}{8\mu} = \frac{R^2}{8\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \quad (5.117)$$

Dit is juist de helft van de maximale snelheid in de cilindrische buis:  $v_{\max} = 2 \langle v \rangle$ .

Vergelijking (5.117) kan ook in een andere vorm geschreven worden, namelijk als een vergelijking tussen de drukval  $\Delta p$  over een buislengte  $L$  en de gemiddelde snelheid:

$$\Delta p = \frac{8\mu L}{R^2} \langle v \rangle = \frac{32\mu L}{D^2} \langle v \rangle = \frac{64\mu}{\rho \langle v \rangle D} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \quad (5.118)$$

De laatste term van deze vergelijking is bewust geschreven in een vorm die ook gebruikt werd bij de modellering van energiedissipatie ( $e_{fr}$ ). Dan valt gemakkelijk in te zien:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = e_{fr} = \frac{64\mu}{\rho \langle v \rangle D} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \quad (5.119)$$

Hiermee is dan bewezen, dat in het geval van laminaire stroming door een horizontale cilindervormige buis de Fanning-frictiefactor  $4f$  inderdaad gelijk is aan  $64/Re$ : zie relatie (5.28).

Tenslotte volgt uit vergelijking (5.116) door integratie het volumedebiet dat door een leiding met een cirkelvormige doorsnede en met lengte  $L$  stroomt onder invloed van een drukval  $\Delta p$ :



$$\phi_v = \int_0^R v_x(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad (5.120)$$

Deze vergelijking wordt de wet van Hagen-Poiseuille genoemd; de bijbehorende laminaire stroming heet wel Poiseuille-stroming.

De berekening van het snelheidsprofiel in buizen met niet-cirkelvormige doorsnede is een stuk gecompliceerder. Voor een buis met een vierkante doorsnede met ribbe  $a$  geldt een vergelijking die sterk lijkt op vergelijking (5.120) maar met daarin de factor  $a^4/28,6$  in plaats van  $\pi R^4/8$ . Merk op dat het debiet steeds evenredig is met de karakteristieke afmeting tot de vierde macht.

### Samenvatting

Voor stationaire, laminaire stroming is, min of meer analoog aan de gang van zaken bij moleculair transport van warmte of massa, het snelheidsprofiel (= de radiale impulsconcentratieverdeling) gemakkelijk te berekenen als de geometrie voldoende eenvoudig is. Hiertoe moet een impulsbalans opgesteld worden die voor eenvoudige geometrieën reduceert tot een krachtenbalans. Met behulp van deze krachtenbalans kan het schuifspanningsprofiel bepaald worden.

Dit profiel is *onafhankelijk* van het soort vloeistof. Pas bij het bepalen van het snelheidsprofiel is het verband tussen schuifspanning en snelheidsgradiënt van belang: gehoorzaamt het fluïdum aan de wet van Newton of niet. In veel gevallen kunnen de integratieconstanten die opduiken bij het integratieproces van krachtenbalans tot snelheidsprofiel, het veiligst bepaald worden uit randvoorwaarden aan de snelheid.

Voor stationaire, laminaire stroming van een Newtonse vloeistof door een cilindrische buis is afgeleid dat de schuifspanning nul is op de as en toeneemt in radiale richting (naar de wand toe, waar de schuifspanning maximaal is), dat het snelheidsprofiel parabolisch is, en dat voor het debiet de wet van Hagen-Poiseuille geldt:

$$\phi_v = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L}$$

maar ook voor andere geometrieën zijn schuifspannings- en snelheidsprofielen afgeleid.

## 5.7 Laminaire stroming van niet-Newtonse vloeistoffen

In de vorige paragraaf hebben we alleen gekeken naar fluïda die voldoen aan de viscositeitswet van Newton – zie vergelijking (2.4) in § 2.1.2. De standaard-

voorbeelden hiervan zijn lucht en water. Zeer veel vloeistoffen voldoen echter slechts in een beperkt gebied of zelfs helemaal niet aan die wet. Enkele voorbeelden van vloeistoffen die *niet-Newton's gedrag* vertonen zijn:

- polymeren
- rubbers
- verf
- nat cement
- tandpasta
- bloed
- pindakaas
- margarine

Niet-Newton's gedrag is meer regel dan uitzondering. Dat komt omdat de wet van Newton eigenlijk alleen geldt voor bolvormige moleculen die zich afgezien van botsingen betrekkelijk ongehinderd door elkaar kunnen bewegen. De moleculen van de meeste stoffen zijn niet bolvormig, maar bestaan uit langere al dan niet vertakte ketens van atomen of atoomgroepen; bovendien beïnvloeden de moleculen elkaar in hun bewegingen vaak door ladingsverdelingen binnen de moleculen (polaire groepen). Doen alsof de moleculen zich als knikkertjes gedragen is dan ver bezijden de waarheid.

Onder invloed van opgelegde afschuifkrachten zullen de moleculen zich herschikken en/of worden intermoleculaire bindingen tussen polaire groepen of vertakkingen in meer of mindere mate doorbroken. Pas daarna geldt misschien de viscositeitswet van Newton.

Niet-Newtonse vloeistoffen zijn onder te verdelen in verschillende categorieën die elk hun eigen regel hebben voor het verband tussen de schuifspanning en de optredende snelheidsgradiënt. De beschrijving van dit verband noemt men de *reologie* van de vloeistof. In deze paragraaf zullen we een aantal veel voorkomende categorieën bespreken.

### 5.7.1 Power law vloeistoffen

Een groot aantal vloeistoffen gehoorzaamt aan het *Ostwald - De Waele model* voor het verband tussen schuifspanning en snelheidsgradiënt:

$$\tau_{xy} = -K \left| \frac{dv_y}{dx} \right|^{n-1} \cdot \frac{dv_y}{dx} \quad (5.121)$$

Vergelijking (5.121) staat ook bekend onder de naam *machtswet* (Eng. 'Power Law'); een vloeistof die aan deze wet gehoorzaamt wordt dan ook wel een power law vloeistof genoemd. De constante  $K$  heet (ook in het Engels) de *consistency* en  $n$  noemt men de *flow index*. De index  $n$  is dimensieloos, terwijl  $K$  uiteraard wel een dimensie heeft, die overigens afhankelijk is van de waarde van  $n$ . De verticale strepen in deze machtswet geven aan dat hier de absolute waarde (of modulus) van de snelheidsgradiënt moet worden genomen.

Bedenk dat Newtonse vloeistoffen nu eigenlijk een bijzonder geval vormen van een power law vloeistof, namelijk het geval  $n = 1$ . Men maakt nog een verder onderscheid in deze categorie: power law vloeistoffen met een index  $n < 1$  noemt men *pseudoplastisch*. Een voorbeeld hiervan is 4 gewichts% papierpulp in water waarvoor gevonden is dat  $n = 0,575$  en  $K = 20,0 \text{ N s}^{0,575} \text{ m}^{-2}$ . Indien  $n > 1$ , spreekt men van een *dilatante* vloeistof. Een voorbeeld hiervan is nat cement.

Vaak wordt een *schijnbare* (Eng. 'apparent') of *effectieve viscositeitscoëfficiënt*  $\mu_e$  gebruikt die gedefinieerd is als

$$\mu_e = K \cdot \left| \frac{dv_y}{dx} \right|^{n-1} = K \cdot \dot{\gamma}^{n-1} \quad (5.122)$$

Deze *schijnbare viscositeitscoëfficiënt*  $\mu_e$  hangt dan niet alleen af van de stoffeigenschap  $K$ , maar ook van de (lokale) snelheidsgradiënt of *afschuifsnelheid*  $\dot{\gamma}$ , en brengt daarmee tot uiting dat  $\dot{\gamma}$  tot herschikking van supramoleculaire structuren en/of tot verbreking van bindingen tussen polaire groepen of vertakkingen van de (polymeer)moleculen leidt en daarmee de stromingseigenschappen van de vloeistof verandert. Merk op dat alleen de grootte (aangegeven door de modulusstrepen), niet het teken van de snelheidsgradiënt van invloed is op de intermoleculaire wisselwerking. Met deze definitie van een schijnbare viscositeit gaat uitdrukking (5.121) over in een vergelijking die weer lijkt op de viscositeitswet van Newton, maar nu dan met een stromingsafhankelijke viscositeitscoëfficiënt.

De oplossing van laminaire, stationaire stromingsproblemen gaat dan ook wel geheel analoog aan die bij Newtonse vloeistoffen, maar  $\mu_e$  kan overal in het stromingsdomein een andere waarde hebben, afhankelijk van de grootte van de lokale snelheidsgradiënt. Dit effect dient in rekening te worden gebracht. Dit zal aan de hand van een voorbeeld gedemonstreerd worden.

**Voorbeeld 5.12.** *Een power law vloeistof tussen twee verticale platen*

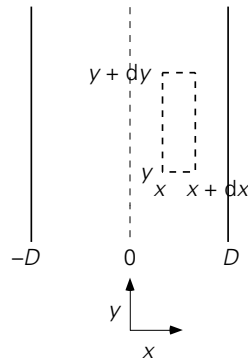
Beschouw de laminaire, stationaire stroming van een power law vloeistof tussen twee verticaal opgestelde, zeer grote platen (zie figuur 5.24). De stroming vindt uitsluitend plaats onder invloed van de zwaartekracht, er is geen drukverschil over de platen aangelegd. Gevraagd wordt een uitdrukking af te leiden voor het snelheidsprofiel.

Uit de krachtenbalans  $\sum F_y = 0$  volgt:

$$0 = B dx \cdot \tau_{xy} \Big|_x + B dx \cdot \left( -\tau_{xy} \Big|_{x+dx} \right) - B dx dy \cdot \rho g \quad (5.123)$$

Deze vergelijking levert uiteraard weer het schuifspanningsprofiel (5.101):

$$\tau_{xy}(x) = -\rho g x \quad (5.124)$$



Figuur 5.24.

omdat, als tevoren, weer gebruik kan worden gemaakt van het symmetrievlak op  $x = 0$  halverwege de twee platen. Bedenk dat de reologie van de vloeistof immers geen invloed op het schuifspanningsprofiel heeft. Om nu het snelheidsprofiel te bepalen dient wél gebruik gemaakt te worden van het gegeven dat het hier een power law vloeistof betreft:

$$\tau_{xy} = -K \left| \frac{dv_y}{dx} \right|^{n-1} \frac{dv_y}{dx} \quad (5.125)$$

Allereerst dienen nu de modulusstrepen in vergelijking (5.125) weggewerkt te worden; daarvoor hebben we het teken van de snelheidsgradiënt nodig. Beschouw het domein  $0 \leq x \leq D$  en bedenk dat vanwege de symmetrie in dit probleem het snelheidsprofiel in het domein  $-D \leq x \leq 0$  later door spiegeling ten opzichte van de ( $x = 0$ )-lijn verkregen kan worden. In het domein  $0 \leq x \leq D$  geldt dat bij toenemende  $x$  de snelheid  $v_y$  steeds minder negatief wordt, dat wil zeggen dat de afgeleide  $dv_y/dx > 0$ . Daarmee kunnen de modulusstrepen weggelaten worden.

[In het andere geval – dat wil zeggen: bij  $\frac{dv_y}{dx} < 0$  – moet  $\left| \frac{dv_y}{dx} \right|$  vervangen

worden door  $\left( -\frac{dv_y}{dx} \right)$  en wordt  $\left| \frac{dv_y}{dx} \right|^{\frac{1}{n}}$  dus  $\left( -\frac{dv_y}{dx} \right)^{\frac{1}{n}}$ .]

Combineren van de vergelijkingen (5.124) en (5.125) voor het geval  $dv_y/dx > 0$  levert dan voor het domein  $0 \leq x \leq D$ :

$$-K \left( \frac{dv_y}{dx} \right)^n = -\rho g x \quad \rightarrow \quad \frac{dv_y}{dx} = \left( \frac{\rho g}{K} \right)^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}} \quad (5.126)$$

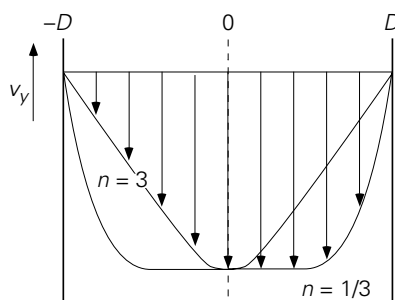
Integreren geeft

$$v_y(x) = \left( \frac{\rho g}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}} + C_2 \quad (5.127)$$

Met behulp van de randvoorwaarden:  $x = D \rightarrow v_y = 0$  kan de integratieconstante  $C_2$  bepaald worden. Daarmee wordt het snelheidsprofiel in het domein  $0 \leq x \leq D$  uiteindelijk:

$$v_y(x) = -\frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \left( D^{\frac{n+1}{n}} - x^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad (5.128)$$

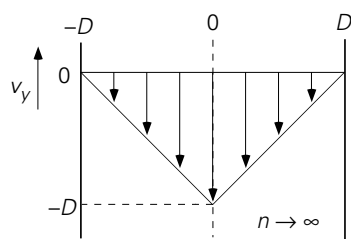
Merk op dat voor  $n = 1$  de oplossing voor Newtonse vloeistoffen, zoals die in § 5.6.3 bepaald is, weer teruggevonden wordt. In figuur 5.25 zijn de snelheidsprofielen weer gegeven voor twee gevallen:  $n = \frac{1}{3}$  en  $n = 3$ .



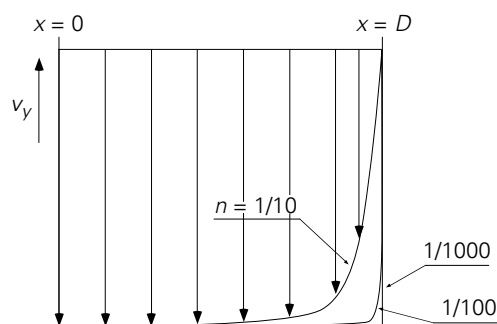
Figuur 5.25.

Er zijn voorts nog twee interessante limietgevallen:

- i)  $n \rightarrow \infty$ :  $v_y = -\left( \frac{\rho g}{K} \right)^{\frac{1}{n}} (D-x) \rightarrow -(D-x)$ : zie figuur 5.26.
- ii)  $n \rightarrow 0$ : het profiel van  $v_y$  nadert tot dat van ideale propstroom; deze laatste bewering is in figuur 5.27 zichtbaar gemaakt door de gevallen  $n = 1/10$ ,  $1/100$ ,  $1/1000$  te tekenen.



Figuur 5.26



Figuur 5.27.

5

## 5.7.2 Bingham-vloeistoffen

Er zijn ook materialen die pas gaan stromen als de schuifspanning op hen uitgeoefend een bepaalde waarde overschrijdt. Voorbeelden hiervan zijn klei en tandpasta. Vooral

het gedrag van tandpasta is bekend: als de tube (met geopende dop) op zijn kop wordt gehouden, gebeurt er niets; slechts door knijpen (eigenlijk het verhogen van de druk in de tube) stroomt de vloeistof eruit. Vloeistoffen die een dergelijk gedrag vertonen, heten *Bingham-vloeistoffen*. Het verband tussen de schuifspanning en de snelheidsgradiënt voor een Bingham-vloeistof luidt:

$$\begin{aligned} |\tau_{xy}| - \tau_0 &= \mu \left| \frac{dv_y}{dx} \right| & \text{als } |\tau_{xy}| \geq \tau_0 \\ \frac{dv_y}{dx} &= 0 & \text{als } |\tau_{xy}| < \tau_0 \end{aligned} \quad (5.129)$$

De grootte  $\tau_0$  heet de *zwichspanning* (Eng. ‘yield stress’) en is een stoffeigenschap van de betrokken stof: pas als de uitgeoefende spanning een kritische waarde - deze zwichspanning - overschrijdt, kan een vloeistof snelheidsgradiënten ontwikkelen en vertonen omdat dan het intermoleculaire netwerk bezwijkt. Het werken met zo’n zwichspanning zal met een voorbeeld geïllustreerd worden.

**Voorbeeld 5.13.** *Een Bingham-vloeistof tussen twee verticale platen*

Beschouw wederom de situatie dat een vloeistof tussen twee verticaal opgestelde, stilstaande platen onder invloed van de zwaartekracht naar beneden stroomt. Deze Bingham-vloeistof in dit voorbeeld heeft een yield stress numeriek gelijk is aan  $\rho g D/2$  (Let wel: vergroting of verkleining van de platafstand verandert de yield stress niet; het gaat hier slechts om de waarde van de yield stress van de betrokken vloeistof).

Gevraagd wordt naar het snelheidsprofiel.

Uit een krachtenbalans over een typisch volume-elementje volgt nog steeds:

$$\tau_{xy} = -\rho g x \quad (5.130)$$

– zie ook de vergelijkingen (5.101) en (5.124). Om het snelheidsprofiel op te lossen moet de reologie van de vloeistof gespecificeerd te worden. Vanwege de symmetrie hoeft alleen het domein  $0 \leq x \leq D$  geanalyseerd te worden. Daar geldt

$$|\tau_{xy}| = \rho g x \quad (5.131)$$

Vervolgens moet – zie vergelijking (5.129) – onderscheid gemaakt worden tussen de gebieden waar  $|\tau_{xy}| \geq \tau_0$  en waar  $|\tau_{xy}| < \tau_0$ . Beschouw eerst het deel waar  $|\tau_{xy}| \geq \tau_0$ ; daar is

$$|\tau_{xy}| \geq \tau_0 \rightarrow \rho g x \geq \frac{1}{2} \rho g D \rightarrow x \geq \frac{1}{2} D \quad (5.132)$$

Vanwege  $dv_y/dx \geq 0$  voor  $x \geq 0$  volgt uit de vergelijkingen (5.129) - (5.132):

$$\rho g x - \tau_0 = \mu \frac{dv_y}{dx} \quad (5.133)$$

Hieruit volgt voor de snelheidsgradiënt

$$\frac{dv_y}{dx} = \frac{\rho g}{\mu} x - \frac{\tau_0}{\mu} = \frac{\rho g}{\mu} \left( x - \frac{1}{2} D \right) \quad (5.134)$$

waarin ook de gegeven uitdrukking voor  $\tau_0$  is ingevuld. Deze differentiaalvergelijking heeft, dankzij de randvoorwaarde:  $x = D \rightarrow v_y = 0$ , als oplossing:

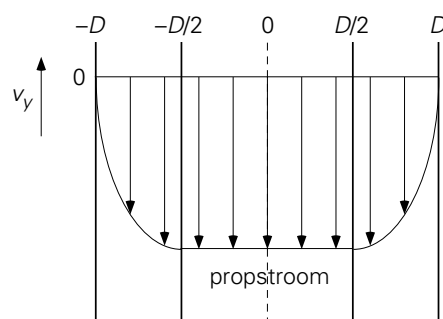
$$v_y(x) = \frac{\rho g}{2\mu} (x^2 - Dx) \quad (5.135)$$

Vervolgens moet nog het profiel voor het gedeelte  $0 \leq x < D/2$  uitgewerkt worden. Hier geldt, in aanmerking genomen de uitdrukkingen (5.129),  $|\tau_{xy}| < \tau_0$  en dus

$$\frac{dv_y}{dx} = 0 \rightarrow v_y = \text{constant} = v_y\left(\frac{1}{2} D\right) = -\frac{\rho g}{8\mu} D^2 \quad (5.136)$$

In deze laatste vergelijking is gebruikt dat als randvoorwaarde de waarde van de snelheid op  $x = D/2$  genomen moet worden zoals die uit het eerste deel van de oplossing volgt.

In figuur 5.28 is dan het snelheidsprofiel van de Bingham-vloeistof na spiegeling ten opzichte van de symmetrieas geschetst. In het gebied  $-D/2 < x < D/2$  geldt niet  $v_y = 0$ , maar  $v_y = \text{constant} \neq 0$ ! In dit gebied treedt echte propstroom op.



Figuur 5.28.

Wat zou nu de oplossing van het snelheidsprofiel geweest zijn indien de yield stress numeriek groter dan  $\rho g D$  geweest was?

In dat geval was overal in de vloeistof  $|\tau_{xy}| < \tau_0$  en dus geldt overal dat de snelheid  $v_y = \text{constant}$ . Toepassen van de randvoorwaarde  $x = D \rightarrow v_y = 0$  levert dat dan overal in de vloeistoflaag geldt  $v_y = 0$  !

⑤

### 5.7.3 Casson-vloeistoffen

De rheologie van Casson-vloeistoffen wordt beschreven door

$$\begin{aligned} |\tau_{xy}|^{1/2} - \tau_C^{1/2} &= \mu_C^{1/2} \left| \frac{dv_y}{dx} \right|^{1/2} \quad \text{als } |\tau_{xy}| \geq \tau_C, \\ \frac{dv_y}{dx} &= 0 \quad \text{als } |\tau_{xy}| < \tau_C \end{aligned} \quad (5.137)$$

waarin  $\tau_C$  weer een zwichtspanning is. Voorbeelden van vloeistoffen die hieraan voldoen zijn yoghurt en bloed.

### 5.7.4 Visco-elastische vloeistoffen

Sommige vloeistoffen hebben, afhankelijk van de omstandigheden (de aangelegde spanningen), ook *elastische eigenschappen*; het gedrag van zulke vloeistoffen wordt dikwijls goed beschreven met

$$\tau_{xy} + \lambda \frac{d\tau_{xy}}{dt} = -\mu \frac{dv_y}{dx} \quad (5.138)$$

waarin  $\lambda$  de tijdconstante is die het elasticiteitsgedrag typeert.

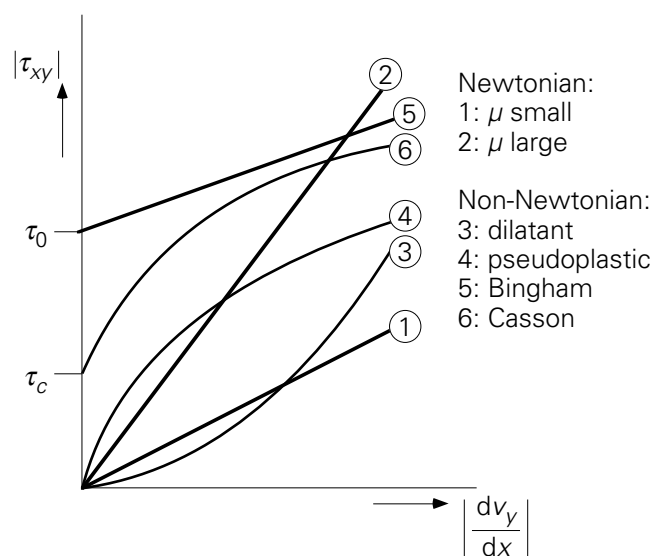
Het bijzondere hieraan is dat de vloeistof zich deels als een ‘gewone’ viskeuze vloeistof gedraagt: onder stationaire condities reduceert vergelijking (5.138) tot de Newtonse vergelijking. Als echter de schuifspanning in de tijd wel varieert, zal de stof elastische eigenschappen vertonen. Ook dit gedrag is terug te voeren op netwerkvorming tussen sterk vertakte en opgerolde moleculen en de reactie van dit netwerk op aangelegde spanningen.

Een zeer fraaie illustratie van dit *visco-elastische* gedrag kan getoond worden met haaievinnensoep. Als in de soep gedurende langere tijd met een lepel steeds eenparig eenzelfde kant op geroerd wordt, zal een stationaire situatie ontstaan. Wordt nu de lepel uit de vloeistof gehaald, dan zal de vloeistof nog even doordraaien en door de viscositeit tot stilstand willen komen. Nu is echter de toestand niet meer stationair en worden de andere eigenschappen van de vloeistof goed zichtbaar. De soep komt niet langzaam tot stilstand, maar draait vrij abrupt de stromingsrichting even om! Het is net alsof de vloeistof (eigenlijk de polymere moleculen in de soep) als een elastiekje



uitgerekt was en alsof, nu de lepel eruit is, het elastiekje zijn evenwichtsstand weer wil aannemen. Dit is een eenvoudige doch doeltreffende test om te onderzoeken of haaievinnensoep wel de ‘echte’ is ( $\lambda \approx 1$  s).

Aan het einde van deze paragraaf over niet-Newtonse vloeistoffen is in figuur 5.29 bij wijze van samenvatting het verband tussen de schuifspanning en de snelheids-gradiënt voor een aantal soorten vloeistoffen – zowel Newtonse als niet-Newtonse – nog eens weergegeven.



Figuur 5.29.

### Samenvatting

Het verband tussen de snelheidsgradiënt en de schuifspanning wordt niet voor alle vloeistoffen gegeven door de wet van Newton. Integendeel, de meeste vloeistoffen die in de industrie gebruikt worden alsmede in het dagelijks leven, voldoen hier niet aan. Er zijn dan ook veel verschillende categorieën vloeistoffen, elk met hun eigen verband tussen schuifspanning en snelheidsgradiënt (zie figuur 5.29). Het vakgebied dat zich hiermee bezighoudt, is een geheel eigen tak binnen de stromingsleer en heet de *reologie*. Overigens noemt men ook het verband tussen de schuifspanning en de snelheidsgradiënt de reologie van de vloeistof.

Bedenk dat het schuifspanningsprofiel niet van de reologie van de vloeistof afhangt, maar het snelheidsprofiel wel. Voor power law vloeistoffen en Bingham vloeistoffen in elementaire geometrieën zijn snelheidsprofielen afgeleid. Ook Casson vloeistoffen en visco-elastische vloeistoffen zijn kort besproken. Soms gaat de stroming op een propstroom lijken.

---

## 5.8 De algemene bewegingsvergelijkingen

---

### 5.8.1 *Stromingsleer en fysische transportverschijnselen*

In de hoofdstukken 1 en 2 van dit boek zijn de technieken van balansen opstellen en van dimensie-analyse besproken. Daarnaast zijn allerlei concepten (zoals mechanische energie, verblijftijdspreiding en schuifspanning), allerlei dimensieloze kentallen en enkele fenomenologische wetten geïntroduceerd. Vervolgens zijn in de hoofdstukken 3 en 4 warmte- en stoftransport behandeld. Daarbij is steeds eerst moleculair transport aan de orde geweest en is daarna voor convectief transport steeds het gebruik van overdrachtscoëfficiënten gepropageerd. Fysisch technologen zijn bij de beschrijving, ontwikkeling, toepassing en opschaling van procesapparaten heel ver gekomen op basis van bovenbedoelde aanpak die door uitgebreide empirische informatie wordt ondersteund. De analogie tussen warmte- en stofoverdracht was daarbij treffend en uiterst behulpzaam.

Stromingsleer, feitelijk impulstransport of impulsoverdracht, kan ook naar analogie met warmte- en stofoverdracht benaderd worden. Dit is gedaan in § 2.1 en § 5.6 voor laminaire stroming (moleculair transport) en in § 5.3.3 voor wrijvingsweerstand (impulsoverdracht aan vaste wanden) onder turbulente stromingscondities. Toch is voor de grote lijn van dit hoofdstuk over stromingsleer voor een andere volgorde van behandeling gekozen dan in de hoofdstukken 3 en 4. Hoofdstuk 5 begint met de fenomenologische aanpak van wrijving en met drukvalberekeningen, terwijl daarna pas moleculair transport aan de orde komt. Voor deze omgekeerde volgorde is om vier redenen gekozen:

Allereerst zijn voor veel technologen drukvalberekeningen over pijpleidingsystemen en gepakte bedden uitermate relevant. Daarin speelt de mechanische-energiebalans een grote rol. Deze balans valt wat buiten de klassieke analogie van impuls-, warmte- en stoftransport; zo zijn de frictiefactor (§ 5.3.1) en het weerstandsgetal van een appendage (§ 5.4) op een heel andere wijze gedefinieerd dan de warmte- en stofoverdrachtscoëfficiënten (in § 3.5 respectievelijk § 4.5), al is in § 5.3.3 voor de frictiefactor de analogie wel weer hersteld. Met het oog op de ingenieurspraktijk is daarom in dit hoofdstuk begonnen met de technische stromingsleer over drukvallen die aansluit op de behandeling van de mechanische-energiebalans en de Bernoulli-vergelijking (in § 1.3.3 en de voorbeelden 1.20 en 1.21) en op die van de meesleep-kracht (in § 2.3).

Op de tweede plaats is er, afgezien van de analogie met warmte- en stoftransport, geen goede reden om hoofdstuk 5 met moleculair impulstransport te laten beginnen. Het

simpelste geval van moleculair impulstransport is laminaire ééndimensionale stroming<sup>22</sup>. Deze is voor drukvalberekeningen in de technische stromingsleer meestal niet erg relevant, terwijl bijvoorbeeld moleculair warmtetransport wel van belang is voor de beschrijving van convectief warmtetransport (vanwege het begrip ‘weerstand tegen warmtetransport’, het Nusselt-getal, en de overall warmte-overdrachtscoëfficiënt). Daarom kan de behandeling van moleculair impulstransport ook naar achteren geschoven worden.

Ten derde is er in de hoofdstukken 3 en 4 al op gewezen dat er voor de fenomenologische aanpak van convectieve warmte- en stofoverdracht wel degelijk een exacter alternatief beschikbaar is. In § 3.4 en § 4.4 zijn immers de algemeen geldige microbalansen leidend tot de transportvergelijkingen voor tijdsafhankelijk driedimensionaal warmte- en stoftransport gepresenteerd op basis van de *cubic volume element methode*. Daarbij is opgemerkt dat het oplossen van deze transportvergelijkingen een even gedetailleerde kennis van het (tijdsafhankelijke driedimensionale) snelheids-veld vergt.

De zogenaamde Navier-Stokes-bewegingsvergelijkingen, die de stroming (de impulshuishouding) in een driedimensionaal domein beschrijven, komen dan nu aan de orde. De behandeling van de Navier-Stokes-vergelijkingen sluit daarmee aan op die van de ééndimensionale stroming in § 5.6 en § 5.7. Met de behandeling van de Navier-Stokes-vergelijkingen is dan de analogie tussen warmte-, stof- en impuls-transport weer in volle glorie aanwezig: de transportvergelijkingen voor impuls (3x), warmte en stof zien er mathematisch ook volslagen identiek uit.

Tenslotte: waar de Navier-Stokes-vergelijkingen voor veel klassiek geschoolde technologen het sluitstuk van de theorie en een rariteit vormden, dienen zij thans als het uitgangspunt voor de moderne chemical engineering die zich van numerieke technieken bedient om een beeld te verwerven van de lokale transport- en overdrachtsverschijnselen in procesapparaten. Daarmee kunnen allerlei effecten van geometrie en schaalgrootte op bijvoorbeeld de opbrengst en de selectiviteit van chemische reacties, op de intensiteit en effectiviteit van warmte- en stofoverdracht en op scheidingsprocessen (door variaties in stromingspatronen, verblijftijdspreidingen, contacttijden, etc.) veel beter begrepen en beheerst worden. De gekozen volgorde van behandeling laat dit hoofdstuk eindigen met dit veelbelovende toekomstperspectief.

---

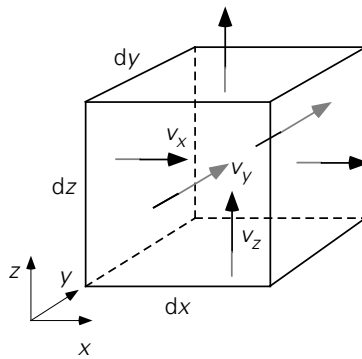
<sup>22</sup> Laminaire ééndimensionale stromingen komen voor in micro-fluidics (micro-reactors, lab on a chip), in de polymeertechnologie (extrusie, coatingprocessen), in de life sciences, en in de levensmiddelenindustrie; in de laatste drie gebieden spelen niet-Newtonse vloeistofeigenschappen een grote rol.

### 5.8.2 De continuïteitsvergelijking

Alvorens de bovenbedoelde Navier-Stokes-vergelijkingen voor driedimensionaal impulstransport in een stromingsdomein af te leiden, wordt nu eerst de *cubic volume element methode* gebruikt om op basis van een totale-massabalans voor een kubusje een vergelijking af te leiden waaraan elk stromingsveld moet voldoen. Wederom zal eenvoudigheidshalve en uitsluitend in een Cartesiaans coördinatenstelsel gewerkt worden (zie figuur 5.30, overigens identiek aan figuur 3.22). Het controlevolume  $dx dy dz$  bevindt zich willekeurig ergens in het stromingsveld dat driedimensionaal en tijdsafhankelijk is. Dat betekent dat de drie snelheidscomponenten en de dichtheid  $\rho$  alle een functie zijn van zowel de tijd als de coördinaten  $x$ ,  $y$  en  $z$ .

De microbalans voor de totale massa over het kubusje van figuur 5.30 bevat naast de accumulatieterm

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho dx dy dz \quad (5.139)$$



Figuur 5.30.

uitsluitend de convectieve transporttermen door ieder van de zes vlakken. Zo komt door het linkerzijvlak door convectief transport

$$[\rho v_x]_{x,y,z} dy dz \quad (5.140)$$

aan massa naar binnen, en gaat door het rechterzijvlak door convectief transport weer

$$[\rho v_x]_{x+dx,y,z} dy dz \quad (5.141)$$

aan massa naar buiten. Netto levert dit een nettobijdrage aan convectief massatransport in de  $x$ -richting van

$$[\rho v_x]_{x,y,z} dy dz - [\rho v_x]_{x+dx,y,z} dy dz = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) dx dy dz \quad (5.142)$$

Op identieke wijze leveren de convectieve massastromen door de voor- en achtervlakken netto op

$$\left[ \rho v_y \right]_{x,y,z} dx dz - \left[ \rho v_y \right]_{x,y+dy,z} dx dz = - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) dx dy dz \quad (5.143)$$

en door de onder- en bovenvlakken

$$\left[ \rho v_z \right]_{x,y,z} dx dy - \left[ \rho v_z \right]_{x,y,z+dz} dx dy = - \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) dx dy dz \quad (5.144)$$

Samenvoegen van de termen (5.139), (5.142), (5.143) en (5.144), en delen door de vaste grootte  $dx dy dz$  van het kubusje levert de zogenaamde *continuïteitsvergelijking*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \quad (5.145)$$

Deze continuïteitsvergelijking is een rechtstreeks gevolg van het *principe van het behoud van massa*. Dat geldt ook nog steeds als de dichtheid constant is en daardoor vergelijking (5.145) overgaat in

$$0 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (5.146)$$

Wat bijvoorbeeld door het linkervlak van de kubus aan massa binnenkomt en niet door het rechtervlak naar buiten gaat, moet, bij constante dichtheid, wel door één of meer van de andere vlakken naar buiten gaan. Dat geldt op elk moment! Merk op dat in vergelijking (5.146) de dichtheid (de massa) niet meer voorkomt.

### **Samenvatting**

Met behulp van de cubic volume element methode is op basis van een massabalans de continuïteitsvergelijking afgeleid, waaraan elk snelheidsveld op elk moment moet voldoen: het directe gevolg van de wet van behoud van massa.

### **5.8.3 De Navier-Stokes-vergelijkingen**

Voor de afleiding van de algemene microbalansen voor impulstransport, oftewel de Navier-Stokes-vergelijkingen, is het raadzaam weer te werken met het begrip *impulsconcentratie* zoals dat in §1.4 is ingevoerd: de snelheidscomponent  $v_x$  (in m/s) in de  $x$ -richting is eigenlijk een concentratie van  $x$ -impuls (in Ns/kg). Vandaar ook dat  $\rho v_x$  de impulsconcentratie op volumebasis (in Ns/m<sup>3</sup>) voorstelt.

De feitelijke snelheidsverdelingen, of het snelheidsveld, in een stromingsdomein komen tot stand doordat impuls herverdeeld wordt over het domein door convectieve en moleculaire impulsstromen, terwijl op de massa en op de randen van het domein

krachten werken. Wederom wordt de *cubic volume element methode* gebruikt om deze impulsuishouding in kaart te brengen.

Vanwege het vectorkarakter van impuls en van krachten dient voor elke richting een aparte impulsbalans voor het kubusje van figuur 5.30 opgesteld te worden. Hieronder wordt alleen de afleiding voor de  $x$ -impulsbalans gepresenteerd. Eerst worden weer de afzonderlijke bijdragen tot deze microbalans geïnventariseerd.

#### *Accumulatie*

De instationaire term is

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_x dx dy dz \quad (5.147)$$

#### *Convectief transport*

Door het linkzijdvlak stroomt een volumedebiet  $v_x(x,y,z,t) \cdot dy dz$  het kubusje binnen, terwijl de  $x$ -impulsconcentratie in deze stroom  $\rho v_x(x,y,z,t)$  is. In het algemeen staat immers de lokale snelheidsvector niet toevallig loodrecht op het linkzijdvlak. Deze vector wordt ontbonden in zijn componenten in het gekozen assenstelsel; de  $x$ -component van de snelheid brengt als enige door dit linkzijdvlak massa het kubusje in en die massa draagt (o.a.)  $x$ -impuls bij zich. Convectief komt er derhalve door het linkzijdvlak

$$\left[ v_x \cdot \rho v_x \right]_{x,y,z} dy dz \quad (5.148)$$

aan  $x$ -impuls het kubusje binnen. Door het rechtervlak verlaat

$$\left[ v_x \cdot \rho v_x \right]_{x+dx,y,z} dy dz \quad (5.149)$$

weer het kubusje, waarbij zowel  $v_x$  als  $\rho v_x$  rechts andere waarden hebben dan links. Netto leveren deze stromen in de  $x$ -richting een bijdrage van

$$\left[ v_x \cdot \rho v_x \right]_{x,y,z} dy dz - \left[ v_x \cdot \rho v_x \right]_{x+dx,y,z} dy dz = - \frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho v_x) dx dy dz \quad (5.150)$$

aan de accumulatie van  $x$ -impuls in het kubusje. Op soortgelijke wijze brengt de  $y$ -component van de snelheid aan de voorzijde van het kubusje massa naar binnen die (o.a.)  $x$ -impuls bij zich draagt:

$$\left[ v_y \cdot \rho v_x \right]_{x,y,z} dx dz \quad (5.151)$$

Samen met een dergelijke term aan de achterzijde van het kubusje wordt zo de netto-bijdrage van het convectief transport in de  $y$ -richting aan de accumulatie van de  $x$ -impuls verkregen:

$$\left[ v_y \cdot \rho v_x \right]_{x,y,z} dx dz - \left[ v_y \cdot \rho v_x \right]_{x,y+dy,z} dx dz = - \frac{\partial}{\partial y} (v_y \rho v_x) dx dy dz \quad (5.152)$$

De nettobijdrage door onder- en bovenvlak luidt analoog

$$\left[ v_z \cdot \rho v_x \right]_{x,y,z} dx dy - \left[ v_z \cdot \rho v_x \right]_{x,y,z+dz} dx dy = - \frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho v_x) dx dy dz \quad (5.153)$$

### *Moleculair transport*

Mits de wet van Newton geldt, kan voor de moleculaire  $x$ -impulsstroom door het voorvlak geschreven worden

$$- \mu \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{x,y,z} dx dz \quad (5.154)$$

en door het achtervlak

$$- \mu \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{x,y+dy,z} dx dz \quad (5.155)$$

zodat een nettobijdrage van het moleculaire transport van  $x$ -impuls in de  $y$ -richting aan de accumulatie resulteert van

$$- \mu \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{x,y,z} dx dz - \left\{ - \mu \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{x,y+dy,z} \right\} dx dz = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] dx dy dz \quad (5.156)$$

De linker- en rechtervlakken dragen bij tot een nettobijdrage aan de accumulatie ter grootte van

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] dx dy dz \quad (5.157)$$

Hierbij moet aangetekend worden dat het hierbij gaat om *moleculair* transport van  $x$ -impuls aan ieder van de twee vlakken dat samenhangt met de lokale waarden van de snelheidsgradiënt  $\partial v_x / \partial x$ . Deze gradiënt drukt uit of gemiddeld gesproken moleculen in de  $x$ -richting *versnellen* of *vertragen*, terwijl  $\mu \partial v_x / \partial x$  dan een maat is voor de lokale netto-overdracht van  $x$ -impuls door botsingen van *individuele* moleculen *gegeven die gemiddelde versnelling of vertraging*. Links en rechts is deze netto-overdracht verschillend en daaruit resulteert de bijdrage van uitdrukking (5.157).

Moleculair transport van  $x$ -impuls in de  $z$ -richting aan onder- en bovenkant resulteert in de nettobijdrage

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (5.158)$$

In bovenstaande afleidingen van de moleculaire transporttermen is aangenomen dat aan elk vlak van een kubusje er of alleen een schuifspanning of alleen een normaalspanning heerst waarvoor dan de wet van Newton geldt. Deze voorstelling – waarvoor gekozen is omdat deze benadering nauw aansluit bij de analogie tussen warmte-, stof- en impulstransport (zie § 3.4 en § 4.4) – is feitelijk niet correct, mis-kent het gelijktijdig optreden en de onderlinge samenhang van schuif- en normaalspanningen in ieder vervormend fluïdum-elementje, en staat op gespannen voet met een aantal fysische wetmatigheden. Het uiteindelijke resultaat, vergelijking (5.161), is evenwel correct. Voor de fysisch juiste afleiding, die gebruik maakt van een lineair verband tussen spanningen in een fluïdum en vervormingssnelheden van fluïdum-elementjes, wordt de lezer verwezen naar bijvoorbeeld Munson<sup>23</sup>.

#### *Productie*

Productie van  $x$ -impuls geschiedt door de  $x$ -componenten van alle krachten die op het kubusje werken. Wat de druk betreft: in de  $x$ -richting werkt die alleen op de linker- en rechterzijvlakken van het kubusje. Netto resulteert

$$p|_x dy dz + \left\{ -p|_{x+dx} dy dz \right\} = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (5.159)$$

Een fysisch juiste interpretatie van deze nettobijdrage aan de totale  $x$ -impulsbalans is dat  $[-\partial p/\partial x]$  een bronterm is die uitdrukt dat per volume-eenheid en per tijdseenheid een bepaalde hoeveelheid  $x$ -impuls (in Ns) wordt toegevoerd aan het volume-elementje. Tenslotte werkt de  $x$ -component  $g_x$  (in Ns/kg) van de zwaartekracht op de massa in het kubusje:

$$g_x \rho dx dy dz \quad (5.160)$$

Daarmee is de zwaartekracht een typisch voorbeeld van een ‘*body force*’ (in N/kg), waar de druk (in N/m<sup>2</sup>) op een vlak werkt.

#### *De bewegingsvergelijkingen*

Samenvoegen van de uitdrukkingen (5.147), (5.150), (5.152), (5.153) en (5.156) t/m (5.160), delen door  $dx dy dz$ , en de aanname van constante  $\mu$  levert de  $x$ -impulsbalans:

<sup>23</sup> Munson, B.R., D.F. Young en T.H. Okiishi, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Wiley, 1994, § 6.1



$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y} (v_y \rho v_x) - \frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho v_x) + \\ & + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (5.161)$$

Deze vergelijking is geheel vergelijkbaar met en analoog aan de vergelijkingen (3.135) en (4.72).

Overigens kan de  $x$ -impulsbalans ook afgeleid worden in termen van schuifspanningen en is dan ook geldig voor niet-Newtonse fluïda. In die afleiding komen dan geen moleculaire transporttermen voor van de vorm van uitdrukking (5.154), maar dienen de schuifspanningen op de zes vlakken opgenomen te worden onder het hoofdje *Productie*. Zo stroomt er fluïdum in de  $x$ -richting buiten langs het voorvlak van het kubusje van figuur 5.30; gezien de lokale schuifspanning als gevolg van de lokale snelheidsgradiënt  $\partial v_x / \partial y$  oefent dit fluïdum een kracht

$$\tau_{yx} \Big|_{x,y,z} dx dz \quad (5.162)$$

uit op het fluïdum in het kubusje. Een soortgelijke kracht in de  $x$ -richting is er aan de achterkant ten gevolge van het fluïdum dat daar aan de buitenkant langs het kubusje stroomt:

$$- \tau_{yx} \Big|_{x,y+dy,z} dx dz \quad (5.163)$$

Tezamen geven deze twee krachten in de  $x$ -richting de nettokracht

$$- \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz \quad (5.164)$$

op het kubusje. Aan de andere vier vlakken werken soortgelijke krachten in de  $x$ -richting met de nettobijdragen

$$- \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx dy dz \quad (5.165)$$

als gevolg van variaties in de normaalspanning  $\tau_{xx}$ , en

$$- \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz \quad (5.166)$$

Deze laatste twee bijdragen aan de  $x$ -impulsbalans hangen samen met de lokale snelheidsgradiënten  $\partial v_x / \partial x$  en  $\partial v_x / \partial z$ .

Samenvoegen van de uitdrukkingen (5.147), (5.150), (5.152), (5.153), (5.159) en (5.160) met (5.164) t/m (5.166) en delen door  $dx dy dz$  levert

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x}(v_x \rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(v_y \rho v_x) - \frac{\partial}{\partial z}(v_z \rho v_x) + \\ & - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (5.167)$$

Veelal wordt de  $x$ -impulsbalans in een andere vorm gepresenteerd. Daartoe wordt het linkerlid van de vergelijkingen (5.161) en (5.167) uitgeschreven tot

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.168)$$

Zo wordt ook de tweede convectieve term aan de rechterkant van de vergelijkingen (5.161) en (5.167) uitgewerkt tot

$$\rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_x \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \quad (5.169)$$

Door zulks ook te doen met de twee overige convectieve termen ontstaan ter rechterzijde van de vergelijkingen (5.161) en (5.167) zes termen. Drie daarvan vallen, dankzij de *continuïteitsvergelijking* (5.145), weg tegen de tweede term van (5.168). Daardoor kan vergelijking (5.161) geschreven worden als

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ = \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (5.170)$$

waarin  $\mu$  weer constant is verondersteld.

Voor de twee overige snelheidscomponenten kunnen soortgelijke vergelijkingen afgeleid worden:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \\ = \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \end{aligned} \quad (5.171)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ = \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned} \quad (5.172)$$

De vergelijkingen (5.170) – (5.172) zijn de bewegingsvergelijkingen, beheersen en beschrijven – samen met de continuïteitsvergelijking, zie vergelijking (5.145) – de stroming van elk Newtons fluïdum (met constante  $\mu$ ), en vormen de hoeksteen van de vloeistofmechanica (*Eng.* ‘fluid mechanics’). Deze vergelijkingen zijn vernoemd naar Navier (1785-1836) en Stokes (1819-1903), en worden daarom ook wel aangeduid als de Navier-Stokes-vergelijkingen.

In vectornotatie luiden de Navier-Stokes-vergelijkingen heel compact als

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (5.173)$$

In termen van schuifspanningen – voortbordurend op vergelijking (5.167) – wordt dit:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (5.174)$$

Voor stromingen waarin viskeuze effecten kunnen worden verwaarloosd, geldt de Euler-vergelijking:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (5.175)$$

Voor viskeuze (laminaire) stromingen waarin juist de traagheidstermen (*Eng.* ‘inertial terms’) verwaarloosbaar zijn, vereenvoudigt vergelijking (5.173) zich voor een tijdsafhankelijke situatie tot

$$0 = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (5.176)$$

Het valt buiten de scope van dit boek de vorm van deze stelsels vergelijkingen weer te geven in het geval van cilinder- of bolcoördinaten. Hiervoor wordt verwezen naar Bird *et al.*<sup>24</sup> of de Data Companion<sup>25</sup>.

De stelsels (5.173), (5.174) en (5.175) gelden zeer algemeen voor tijdsafhankelijke driedimensionale stromingen. Een vergelijking voor een simpeler type stroming, zoals bijvoorbeeld behandeld in § 5.6, kan gemakkelijk uit een algemeen stelsel geëxtraheerd worden. Zo kan vergelijking (5.96) voor tijdsafhankelijke, ééndimensionale, verticale, incompressibele stroming van een laag met uniforme dikte verkregen worden uit stelsel (5.174) door de volgende aannamen:

<sup>24</sup> Bird, R.B., W.E. Stewart & E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Wiley, 2<sup>nd</sup> Ed., 2002,

<sup>25</sup> Janssen, L.P.B.M. en M.M.C.G. Warmoeskerken, *Transport Phenomena Data Companion*, VSSD, Delft, 2006

$$v_x = 0, v_z = 0, \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0, g_x = g_z = 0, g_y = g$$

plus alle drukgradiënten nul en alle schuifspanningen nul behalve  $\tau_{xy}$ . Op soortgelijke wijze kan vergelijking (5.82) verkregen worden uit vergelijking (5.176) bij afwezigheid van zwaartekrachtseffecten.

Overigens kan, op soortgelijke wijze als bij de omschrijving van vergelijking (5.161) naar eindresultaat (5.170), namelijk met behulp van de continuïteitsvergelijking (5.145), ook de warmtetransportvergelijking (3.135) herschreven worden tot

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial c_p T}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial c_p T}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial c_p T}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial c_p T}{\partial z} = \\ = \lambda \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\} + q \end{aligned} \quad (5.177)$$

Op identieke wijze volgt uit vergelijking (4.72) als eindresultaat

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = \\ = D \left\{ \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right\} + r \end{aligned} \quad (5.178)$$

Opgemerkt kan worden dat in vergelijking (5.177) de combinatie  $c_p T$  de eenheid J/kg heeft en dus als *energieconcentratie* opgevat kan worden, zoals eerder betoogd. Tenslotte gaat vergelijking (5.177) voor constante  $c_p$  over in

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \\ = a \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\} + \frac{q}{\rho c_p} \end{aligned} \quad (5.179)$$

Ga zelf na hoe bijvoorbeeld vergelijking (3.72) uit vergelijking (5.179) verkregen kan worden.

De vergelijkingen (5.170) t/m (5.172), (5.177) en (5.178) illustreren in hun vorm op perfecte wijze de analogie tussen impuls-, warmte- en stoftransport. Tezamen met continuïteitsvergelijking (5.145) is zo een stelsel van zes partiële differentiaalvergelijkingen beschikbaar, waaruit in principe, met voldoende rand- en beginvoorwaarden, de ruimtelijke verdelingen van de drie snelheidscomponenten, druk, temperatuur en een componentconcentratie als functie van de tijd berekend kunnen worden. Dit stelsel

van zes differentiaalvergelijkingen is onderling sterk gekoppeld en is dankzij de convectieve termen ook sterk niet-lineair.

### **Samenvatting**

Met behulp van de *cubic volume element methode* is voor de  $x$ -impuls geïllustreerd hoe de Navier-Stokes-vergelijkingen worden afgeleid: aan alle vlakken van een kubusje moeten zowel convectieve als moleculaire transporttermen geformuleerd worden; voorts dienen alle relevante krachten in ogenschouw te worden genomen. De moleculaire transporttermen kunnen ook als schuifspanningen verantwoord worden. De continuïteitsvergelijking kan worden gebruikt om de impulsbalansen te herschrijven; hetzelfde geldt voor de warmte- en componenttransportvergelijkingen.

De klassieke analogie tussen impuls-, warmte- en stoftransport blijkt uit de onderlinge gelijkheid van de verschillende transportvergelijkingen. Tenslotte kunnen uit de algemene transportvergelijkingen de specifieke vergelijkingen voor specifieke simpele gevallen worden verkregen door weglating van de niet-relevante termen.

### **5.8.4 Computational Fluid Dynamics**

Stelsels als de vergelijkingen (5.170) t/m (5.172), (5.177), (5.178) en (5.145) vormen de basis van wat thans ‘Computational Fluid Dynamics’ (CFD) is gaan heten. De moderne fysische technologie bedient zich van CFD ten einde op basis van informatie over *lokale* variabelen (snelheden, druk, temperatuur, concentraties) te komen tot bijvoorbeeld betere beschrijvingen en ontwerpen van procesapparaten. De stand van de computertechniek laat het in toenemende mate toe de fenomenologische benadering van transportverschijnselen te vervangen door CFD-simulaties. Toch is er niets nieuws onder de zon: het blijft gaan om de concepten, de wetten en de techniek van balansen opstellen als behandeld in de hoofdstukken 1 en 2.

De bedoelde stelsels transportvergelijkingen zijn alle afgeleid aan de hand van een klein typisch kubusje (figuur 5.30). De afmetingen daarvan zijn niet nader gespecificeerd; die moeten bij voorkeur wel klein zijn ten opzichte van de afmetingen van het stromingsdomein (het apparaat) om inderdaad op lokale waarden van de variabelen uit te komen. Absolute ondergrens voor de afmetingen van het kubusje is de vrije weglengte van de moleculen: wordt die benaderd, dan verliezen continuïmbegrippen als gemiddelde snelheid en convectief transport hun betekenis. Zolang dat niet het geval is, mogen de snelheden, de temperatuur en de concentraties die in de *cubic volume element* methode aan een kubusje worden toegekend, opgevat worden als puntgrootheden op de plaats van het centrum van het kubusje.

Voor CFD-berekingen volgens de *eindige-volumemethode* wordt het stromingsdomein dan ook opgedeeld in een zeer groot aantal kleine volume-elementjes (kubusjes in een Cartesiaans coördinatenstelsel). Het aantal ‘cellen’ wordt in de

praktijk aan de onderkant begrensd door de gewenste mate van detaillering (resolutie), met name daar waar steile gradiënten in de variabelen verwacht mogen worden, en aan de bovenkant door de grootte, het geheugen en de snelheid van de computer.

Over elk van de volume-elementjes worden massa-, impuls-, warmte- en/of componentmassabalansen opgesteld. Dat is equivalent aan het oplossen van bijvoorbeeld het stelsel (5.145), (5.170) t/m (5.172), (5.177) en (5.178) in de discrete (knoop)punten (*Eng.* ‘nodes’) van een rooster (*Eng.* ‘grid’ of ‘lattice’) dat het gehele stromingsdomein omvat; de variabelen hebben alleen een waarde op de rooster-punten die in het hart van alle cellen liggen. Alle termen met afgeleiden in de (micro)balansjes over de cellen worden gediscrètiseerd met behulp van de variabelen in de naburige roosterpunten; daarvoor zijn een groot aantal zogenaamde differentie-schema’s beschikbaar. Daarmee gaan de partiële differentiaalvergelijkingen over in algebraïsche vergelijkingen en worden de waarden van de variabelen in naburige punten aan elkaar geknoopt. Deze procedure is in § 3.1.5 geïllustreerd voor het een-voudige geval van tweedimensionale warmtegeleiding in een Cartesisch coördinatenstelsel.

Elke cel levert zoveel algebraïsche vergelijkingen als er balansjes voor die cel opgezet zijn. Voor het gehele stromingsdomein met zijn vele cellen betekent dit een zeer groot aantal algebraïsche vergelijkingen die simultaan, in feite iteratief, moeten worden opgelost. Daartoe is weer keuze uit een veelheid van oplosmethoden. De iteraties worden voortgezet tot overal in het domein, met een tevoren gekozen nauwkeurigheid, aan alle microbalansen wordt voldaan.

Vervolgens moet evenwel hier herhaald worden dat de meeste stromingen (zowel in procesapparaten als in de natuur) *turbulent* zijn. Het rooster waarop de stroming dan berekend zou moeten worden, moet dan fijn genoeg zijn om ook de kleinste wervels inderdaad zichtbaar te laten worden. De stand van de computertechniek laat dit voor hogere Reynolds-getallen nog niet toe. (De kleinste wervels worden kleiner met toenemend Reynolds-getal.) Bovendien zijn de meeste technologen ook weer niet geïnteresseerd in het momentane snelheidsveld inclusief alle wervels. Doorgaans is kennis van gemiddelde grootheden en de variaties daarin over het stromingsdomein ruim voldoende.

Dat betekent dat gerekend wordt op een grover rooster en dat het *impulstransport* door de *wervels* gemodelleerd wordt als een aparte bijdrage aan de impulshuishouding op een schaal tussen het convectieve transport door de (gemiddelde) stroming en het moleculaire transport in. Alle wervels individueel en bij elkaar transporteren (door convectie) tijdens hun bestaan o.a. impuls (zie ook § 3.5.2). Dit turbulente impuls-transport kan in een groot aantal gevallen met voldoende succes gemodelleerd worden in termen van twee kernbegrippen uit de turbulentieleer:

- de concentratie van *turbulente kinetische energie*, aangeduid met  $k$  en met de eenheid  $\text{m}^2/\text{s}^2$  ofwel  $\text{J}/\text{kg}$ : een maat voor de grootte en sterkte van alle momentane snelheidsfluctuaties als resultaat van het gehele spectrum van turbulente wervels; en
- de *snelheid*  $\varepsilon$  waarmee  $k$  gedissipeerd wordt in warmte door de werking van de viscositeit in de kleinste werveltjes (de zgn. *Kolmogorov-wervels*); daarmee heeft  $\varepsilon$  de eenheid  $\text{m}^2/\text{s}^3$  ofwel  $\text{W}/\text{kg}$ . Het beeld dat bij  $\varepsilon$  past, is dat van het aantal kleinste werveltjes waarin de *energie-dissipatie* plaatsvindt.

Zowel  $k$  als  $\varepsilon$  kunnen kennelijk als concentraties worden opgevat; voorts blijken beide variabelen behoorlijk te kunnen variëren over een stromingsdomein. Daarom is het, met het oog op het lokale en tijdsafhankelijke impulstransport door wervels, meestal gewenst ook  $k$  en  $\varepsilon$  te berekenen. Voor beide variabelen kunnen ook weer transportvergelijkingen afgeleid worden, die in feite weer staan voor microbalansen voor  $k$  en  $\varepsilon$  en die qua vorm (aantal en soort termen) sterke gelijkenis vertonen met de Navier-Stokes-vergelijkingen. Wel moet erop gewezen worden dat  $k$  en  $\varepsilon$  weer *geen behouden grootheden* zijn (zie ook de discussie in § 1.3.3). Een en ander betekent dat in deze benadering van turbulente systemen het aantal transportvergelijkingen dat opgelost moet worden, nog groter is dan voor laminaire stromingen.

Als de klassieke fysische technologie, die fenomenologische concepten als stof- en warmteoverdrachtscoëfficiënten hanteert, vergeleken wordt met de moderne, op CFD gebaseerde fysische technologie, dan valt op dat

- beide sterk leunen op het opstellen van balansen;
- beide dezelfde concepten en wetten hanteren;
- de fenomenologische aanpak heel snel tot een vrij nauwkeurig eindresultaat leidt en in het verleden tot grote successen heeft geleid;
- CFD veel meer gedetailleerde informatie oplevert en daardoor een grote belofte voor de toekomst inhoudt;
- voor CFD een nadere scholing in stromingsleer (inclusief turbulentie) en numerieke wiskunde wenselijk is.

Opgemerkt moet worden dat de huidige stand van de CFD-techniek met name voor turbulente stromingen nog zeker experimentele verificatie van de simulatieresultaten vergt. Mede daarom zullen zeker voorlopig nog de fenomenologische benadering van fysische transportverschijnselen en CFD-simulaties als waardevolle, complementaire technieken naast elkaar blijven bestaan.

### **Samenvatting**

Het principe van Computational Fluid Dynamics (CFD) gebaseerd op de algemene transportvergelijkingen (microbalansen) voor impuls, warmte en massa, is geschetst.

De procedure van oplossen als gevolgd in de eindige-volumemethode is kort aange-stipt. Voor turbulente stromingen is het gebruik toegelicht van twee nieuwe variabelen, namelijk de turbulente kinetische energie  $k$  en de dissipatie  $\varepsilon$  daarvan. Met behulp daarvan wordt impulstransport door de wervels van het turbulente snelheidsveld gemodelleerd. Als eindoordeel is gegeven dat simulaties met behulp van CFD een welkome en veelbelovende uitbreiding zijn van het instrumentarium van de transporttechnoloog.





# 6 Uitgewerkte tentamenopgaven

## Adviezen

- Trek voldoende tijd uit voor het maken van een oefenopgave. Bedenk dat op tentamen per opgave drie kwartier à een uur beschikbaar is. Bij het oefenen vergt een opgave dus al snel meer tijd.
- Meestal zit de grootste moeilijkheid in het vinden van de juiste aanpak en in het vertalen van de tekst naar termen en concepten van fysische transportverschijnselen. Gebruik het recept gegeven in § 1.1 (als het tenminste om een balansvraagstuk gaat).
- Het leereffect van een opgave gaat volledig verloren, als de uitwerking geraadpleegd wordt. De uitwerking dient uitsluitend ter verificatie van het antwoord *achteraf*.
- Veel opgaven bestaan uit meerdere onderdelen die vaak met elkaar te maken hebben: in de gegeven volgorde staan zij borg voor de juiste weg naar het juiste antwoord op de eigenlijke vraagstelling (vaak in het laatste onderdeel). Leer uit de getrapte vraagstukken met welke strategie een probleem opgelost moet worden.

## 6.1 Opgaven

---

- 1 Een open, ideaal geroerde tank (volume  $V_0$ ) is voor een kwart gevuld met zuiver water. Op tijdstip  $t = 0$  stroomt aan de ingang van de tank een zoutoplossing met een concentratie  $c_0$  het vat binnen. Het volumedebiet bedraagt  $\phi_v$ . Ook vanaf  $t = 0$  stroomt er een volumedebiet ter grootte  $\frac{3}{4} \phi_v$  het vat uit.  
De vragen die beantwoord moeten worden, hebben betrekking op het tijdsinterval tussen  $t = 0$  en het moment dat de tank geheel vol is.
  - a) Bepaal het verloop van het vloeistofvolume in de tank als functie van de tijd.
  - b) Stel de differentiaalvergelijking op die de zoutconcentratie in de uitgang van het vat beschrijft.
  - c) Bepaal het verloop van de zoutconcentratie in de uitgang van het vat als functie van de tijd.
- 2 In een fabriek moet een ingenieur een nieuwe installatie ontwerpen om plastic folie te maken. Hiervoor moet hij weten welke kracht er nodig is om een lang vel

in horizontale richting door een zeer diepe, zeer brede bak met vloeistof te trekken. Hij besluit hiervoor proeven op kleine schaal te laten uitvoeren. Men meet hierbij de kracht  $F$  die nodig is om vellen van verschillende breedtes door water ( $\mu = 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$ ,  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) te trekken. De lengte van het deel van de vellen dat door het water gaat, is bij deze experimenten steeds 1 meter.

Als resultaat wordt voor de kracht (in N) per eenheid van breedte gevonden:

$$\frac{F}{B} = 2,83 v^{9/5} \quad (6.1)$$

waarin  $v$  de snelheid van het vel is (in m/s).

Gevraagd wordt de kracht te berekenen die nodig is om een vel met een breedte van 2,90 m met een snelheid van 2 m/s door een viskeuze vloeistof ( $\mu = 10^{-2} \text{ Ns/m}^2$ ,  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) te trekken, als de lengte van het vel dat door deze vloeistof gaat 20 meter is.

- 3** Tijdens het fabricageproces van waspoeder wordt poeder gemaakt door een vloeibare pasta te verstuiven in een sproeitoren. De poederdeeltjes die zo ontstaan hebben een veel te hoge temperatuur om direct naar de inpakafdeling te kunnen worden getransporteerd. Daarom laat men de poederdeeltjes nogmaals van grote hoogte in een toren omlaag vallen. Om de toren niet al te hoog te moeten maken wordt er lucht met een temperatuur van  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  van onder naar boven door de toren geblazen (de druk is 1 bar). Een poederdeeltje komt de toren binnen met een temperatuur van  $700 \text{ }^\circ\text{C}$  en moet na zijn val afgekoeld zijn tot een gemiddelde temperatuur van  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . De vraag die uiteindelijk beantwoord moet worden, luidt: hoe groot moet de snelheid van de koelende lucht zijn als de toren 7 meter hoog is? Hiertoe dienen de volgende subvragen eerst beantwoord te worden:
- Bereken de eenparige valsnelheid van een poederdeeltje door stilstaande lucht van  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ .
  - Stel de differentiaalvergelijking op die de afkoeling van een poederdeeltje beschrijft.
  - Bepaal de gemiddelde temperatuur van een poederdeeltje als functie van de tijd.
  - Bereken hieruit de valtijd die nodig is om te bewerkstelligen dat een poederdeeltje een gemiddelde temperatuur van  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  heeft aan de onderzijde van de kolom.
  - Bepaal hieruit de gewenste valsnelheid van een poederdeeltje en daaruit de snelheid van het gas in de toren.

Gegevens poederdeeltjes    diameter  $D = 2 \text{ mm}$ , bolvormig  
   dichtheid  $\rho = 600 \text{ kg/m}^3$   
   soortelijke warmte  $c_p = 0,4 \text{ kJ/kgK}$

warmtegeleidingscoëfficiënt  $\lambda = 0,1 \text{ W/mK}$

N.B. Bij de berekening mag worden aangenomen dat de temperatuur van de bulk van de lucht in de toren steeds  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  bedraagt.

- 4** Op een folie is zojuist een beschermende verflaag aangebracht. Voordat het folie verder verwerkt kan worden, moet eerst het grootste deel van het (vluchtige) oplosmiddel uit de verf verwijderd worden. De eerste stap in dit droogproces geschiedt door het folie in een warme, met lucht gevulde ruimte te leggen. Op afstand  $L$  boven dit folie bevindt zich een even grote plaat, gemaakt van een materiaal dat de vluchtige stof absorbeert. Deze plaat is evenwijdig aan het folie. Tijdens de gehele procestijd van de eerste stap heerst juist boven het folieoppervlak een concentratie  $c^*$  van de vluchtige stof, terwijl aan het absorberende oppervlak de concentratie hiervan verwaarloosbaar klein is. Beschouw een stationaire situatie. De situatie mag als eendimensionaal opgevat worden.
- Hoe groot is de molflux van de lucht in de ruimte?
  - Stel een molbalans op voor het vluchtige oplosmiddel in een plakje, dat zich op een willekeurig gekozen plaats tussen het folie en de absorberende plaat bevindt. Het plakje is evenwijdig aan het folie.
  - Bepaal hieruit het concentratieprofiel van de vluchtige stof tussen folie en plaat en geef de uitdrukking voor de molflux van de vluchtige stof waarin  $c^*$  en  $L$  voorkomen.
- 5** Een Newtonse vloeistof stroomt stationair onder invloed van een constante drukgradiënt in de  $x$ -richting tussen twee evenwijdige vlakke platen door. De platen bevinden zich op een afstand  $2D$  van elkaar. De onderste plaat staat stil, de bovenste beweegt met een snelheid  $v_0$  in de positieve  $x$ -richting ( $v_0 > 0$ ).
- Leid een uitdrukking af voor de schuifspanning  $\tau_{yx}$  en voor de snelheid  $v_x$  als functie van  $y$ . Kies hiertoe  $y = 0$  halverwege tussen de platen.
  - Schets de profielen van  $\tau_{yx}$  en  $v_x$  voor drie verschillende situaties, nl.

$$\frac{dp}{dx} < 0, \quad \frac{dp}{dx} > 0 \quad \text{en ook} \quad \frac{dp}{dx} = 0$$

- 6** Bij off-shore oliewinning in de Noordzee wordt de olie vanuit verspreid liggende putten naar een centrale olieterminal verpompt door buizen die op de zeebodem liggen. De olie komt met een temperatuur van  $T_0 = 80 \text{ }^\circ\text{C}$  uit een bepaalde put en stroomt met een snelheid  $v = 1 \text{ m/s}$  door een rechte buis met een inwendige diameter  $D = 20 \text{ cm}$  en een lengte  $L = 7 \text{ km}$  naar de olieterminal.

Gegevens van deze Noordzee-olie:  $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$

$$\lambda = 0,3 \text{ W/mK}$$

$$\rho = 800 \text{ kg/m}^3$$

$$c_p = 2 \cdot 10^3 \text{ J/kgK}$$

De warmteoverdrachtscoëfficiënt aan de buitenzijde van de buis is  $h_u = 100$

W/m<sup>2</sup>K. De dikte van de buiswand is klein en de warmteweerstand van de buiswand mag verwaarloosd worden. De temperatuur van het zeewater is  $T_z = 10$  °C.

- a) Bepaal de gemiddelde temperatuur van de olie als functie van de plaats  $x$  in de buis ( $x = 0$  is het begin van de buis waar de olie de buis binnenstroomt).
- b) Met welke gemiddelde temperatuur komt de olie bij de olieterminal aan?

Ter voorkoming van stollen van de zwaardere componenten die in de ruwe olie voorkomen, mag de olietemperatuur niet beneden de 50 °C komen. Men brengt daartoe een isolatielaag van polyurethaanschuim ( $\lambda_s = 0,003$  W/mK) om de buis aan. Bekend is dat de benodigde dikte van de isolatielaag klein is t.o.v. de diameter van de buis. De isolatielaag kan dus als een vlakke plaat worden opgevat.

- c) Bereken de minimaal benodigde dikte  $d$  van deze laag; verwaarloos bij deze berekening de warmteweerstanden aan binnen- en buitenzijde van de geïsoleerde buis.
- d) Toon aan dat bovenstaande verwaarlozing van warmteweerstanden gerechtvaardigd is.

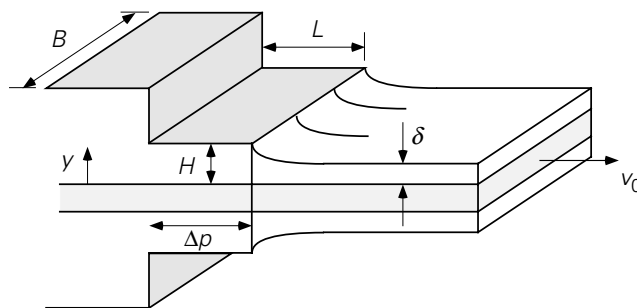
- 7** Een open bakje met water (laagdikte 0,1 m) wordt geplaatst in een grote ruimte met zuiver CO<sub>2</sub>-gas ( $T = 20$  °C,  $p = 10^5$  N/m<sup>2</sup>). Indien het water aanvankelijk geen CO<sub>2</sub> bevat, bereken dan de gemiddelde concentratie CO<sub>2</sub> in het water na 1 uur.

Voor CO<sub>2</sub> in water wordt gegeven: de diffusiecoëfficiënt  $D = 1,69 \cdot 10^{-9}$  m<sup>2</sup>/s en de oplosbaarheid  $c^* = 1,73$  kg/m<sup>3</sup> bij de heersende condities.

- 8** Een metalen plaat met een breedte  $B$  moet gecoat worden met een Newtonse vloeistof met een viscositeit  $\mu$  van 20 Ns/m<sup>2</sup>. Hiertoe wordt de plaat met een snelheid  $v_0$  van 15 m/s door een rechthoekig, spleetvormig mondstuk getrokken. Over de lengte  $L$  van het mondstuk is een drukval  $\Delta p$  aangelegd. Het mondstuk heeft een lengte  $L$  van 1 cm en dezelfde breedte  $B$  als de plaat. Aan de boven- en onderzijde van de plaat blijft een spleet vrij met een hoogte  $H$  van 0,05 cm, die geheel gevuld is met de coating-vloeistof (zie figuur 6.1).

Het geheel bevindt zich in een stationaire toestand.

- a) Stel een krachtenbalans op over een stukje in de vloeistof tussen  $y$  en  $y + dy$  met lengte  $L$  en breedte  $B$  in het mondstuk ( $y$ -as loodrecht op plaat, zie figuur 6.1).
- b) Bepaal het snelheidsprofiel in het mondstuk en bereken het vloeistofdebiet door het mondstuk.



Figuur 6.1.

- c) Stel een massabalans op over een contolevolume dat het mondstuk voor een deel bevat en verder een deel van de plaat (inclusief coating) *na* het mondstuk (als de laag de dikte  $\delta$  bereikt heeft). De snelheid in de laag ter dikte  $\delta$  is uniform. Leid hieruit een uitdrukking af voor de dikte  $\delta$  van de aangebrachte coating in termen van  $H$ ,  $\Delta p/L$ ,  $\mu$  en  $v_0$ .  
Toon aan dat de laagdikte  $\delta$  onafhankelijk van  $\mu$  en  $v_0$  is als de drukval  $\Delta p$  gelijk aan nul is.
- d) Bereken  $\delta$  voor de gevallen  $\Delta p = 0$  en  $\Delta p = 100$  bar.
- 9** Men wil olie tot 90% verzadigen met een bepaalde stof A. Men beschikt echter alleen over een verzadigde oplossing van A in water. Men laat nu de olie, die onoplosbaar is in water, in kleine starre druppeltjes (diameter 2 mm) door de verzadigde oplossing van A in water opstijgen (stijgsnelheid  $v = 1$  cm/s) in een kolom met hoogte  $H$ .  
De diffusiecoëfficiënt van A in zowel water als in olie is  $10^{-9}$  m<sup>2</sup>/s. De verdelingscoëfficiënt  $m$ , gedefinieerd als

$$m = \left( \frac{\text{concentratie van A in water}}{\text{concentratie van A in olie}} \right)_{\text{evenwicht}}$$

is 200. De continue waterfase is in overmaat aanwezig en wordt niet uitgeput. De beginconcentratie van A in de olie is nul.

- Geef de drijvende kracht voor het transport van A van water naar olie in termen van de bulkconcentraties in het water en de olie,  $c_{wb}$  respectievelijk  $c_{ob}$ , en de verdelingscoëfficiënt  $m$ .
- Druk de massastroom  $\phi_m$  voor het transport van A naar een druppeltje uit in de partiële stofoverdrachtscoëfficiënten en de drijvende kracht.
- Wat zijn de constante waarden van het Sherwoodgetal voor stofoverdracht aan de buiten- respectievelijk de binnenzijde van het druppeloppervlak?
- Toon aan dat de weerstand voor het transport van A vrijwel geheel in de olie ligt.
- Hoe hoog moet de kolom zijn om te bereiken dat de olie voor 90% verzadigd wordt?

- 10** In een proeffabriek bevindt zich een geroerd vat gevuld met  $M$  kg van een viskeuze olie, die aanvankelijk een temperatuur van  $100\text{ }^\circ\text{C}$  heeft. In de wand van dit vat condenseert stoom van  $300\text{ }^\circ\text{C}$ , die de olie in 10 minuten opwarmt naar  $150\text{ }^\circ\text{C}$ .

Een geometrisch gelijkvormig vat heeft driemaal zo grote (lineaire) afmetingen. Dit vat is gevuld met dezelfde vloeistof van  $50\text{ }^\circ\text{C}$ . De verhouding van de vloeistofhoogte en de hoogte van het vat is voor beide vaten dezelfde. Hoe lang duurt het dan tot de olie is verhit tot  $200\text{ }^\circ\text{C}$ , als de temperatuur van de condenserende stoom wederom  $300\text{ }^\circ\text{C}$  is? Het toerental in het kleine vat is 90 toeren/min, in het grote vat 10 toeren/min.

De weerstand voor warmteoverdracht van stoom naar olie bevindt zich geheel in de olie. Voor de partiële warmteoverdrachtscoëfficiënt  $h_o$  geldt:

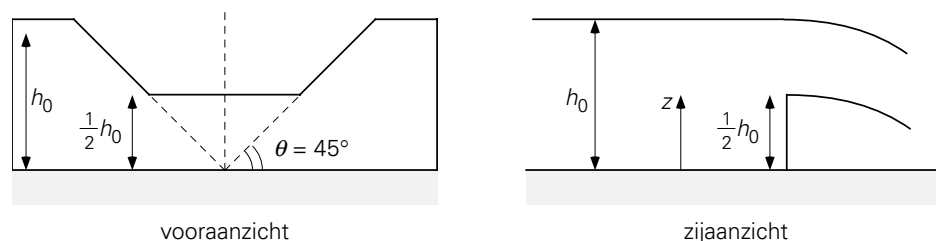
$$h_o = f(D, N, c_p, \lambda, \rho, \mu, \mu_w) \text{ waarbij } D \text{ staat voor de roerdiameter}$$

De opwarming van de olie in het vat van temperatuur  $T_a$  naar  $T_b$  wordt beschreven door:

$$\ln\left(\frac{T_w - T_b}{T_w - T_a}\right) = -\frac{h_o A}{Mc_p} t \quad (6.2)$$

- 11** Een Bingham-vloeistof stroomt laminair en stationair door een zeer lange, vertikaal opgestelde cilinder (straal  $R$ ). De yield stress van de Bingham-vloeistof is numeriek gelijk aan  $\frac{1}{4} \rho g R$ . Er is geen drukverschil over de cilinder aangelegd.
- Bepaal en schets het schuifspanningsprofiel in de cilinder.
  - Bepaal en schets het snelheidsprofiel in de cilinder.
  - Hoe veranderen de antwoorden op (a) en (b) als de yield stress 4 maal zo groot wordt? Een gedetailleerde berekening is niet nodig. Leg wel *duidelijk* uit wat de verschillen zijn.
- 12** Door een agrarisch gebied loopt een beekje. De boeren in dit gebied zouden graag zien dat de waterstand in het beekje beheerst wordt. Om redenen van landschapelijk schoon en ter behoud van het ecologisch systeem wordt het volgende compromis bereikt. Het beekje zal niet gekanaliseerd worden. Maar het wordt voorzien van een overloop die zorgt voor een beheerst waterniveau. In tijden van geringe wateraanvoer moet de waterhoogte in de beek ongeveer 30 cm zijn, terwijl bij maximaal waterdebiet het water in de beek niet veel hoger dan 60 cm mag staan.

De overloop krijgt daarom de in figuur 6.2 geschetste vorm:



Figuur 6.2.

Gevraagd wordt de situatie te analyseren als het waterniveau in de beek juist  $h_0$  (= 60 cm) is. De toestand is stationair. De doorstroomcoëfficiënt is voor deze situatie 0,6.

- Leid het verband af tussen de snelheid van het water in een punt in de opening van de overloop en de hoogte  $z$  van dit punt boven de bodem van de beek. Contractie van de waterstraal en dissipatie mogen hierbij verwaarloosd worden.
- Bepaal het verband tussen het totale debiet door de overloop en de stroomopwaartse waterhoogte  $h_0$ , indien dezelfde verwaarlozingen als bij (a) gemaakt worden.
- Neem nu contractie en dissipatie in beschouwing en bereken nu het debiet door de overloop.

- 13** In een zuivelfabriek wordt melk (Newtons,  $\mu = 2,1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ ) vanuit een grote voorraadtank (1) een andere grote tank (2) ingepompt. Deze laatste tank staat aan het begin van het productieproces. De fabriek draait vol-continu, zodat de niveaus in tank (1) en tank (2) (vrijwel) constant zijn. Verderop in het verwerkingsproces wordt de melk gesteriliseerd bij een druk van 2,3 bar. Dit betekent dat de druk van de lucht in tank (2) 2,3 bar is.

Tank (1) en tank (2) zijn verbonden door een leiding met 2 haakse bochten. In het begin van de leiding is een pomp opgenomen. Deze pomp staat op grondniveau. De leiding heeft een lengte van 20 m en een diameter van 5 cm. De leiding is op grondniveau aan tank (1) bevestigd en komt tank (2) juist onder het melkniveau binnen. Zowel in- als uitgang van de leiding zijn scherp. De hoogte (gemeten ten opzichte van grondniveau) van het melkniveau in tank (1) is 10 m, in tank (2) 5 m.

- Bereken het vermogen dat de pomp nodig heeft om een melkdebiet van 7,85 kg/s te onderhouden.
- Hoe groot is de maximale druk in dit systeem en waar treedt deze op?  
N.B. Dissipatie in de pomp mag verwaarloosd worden.

- 14** Op tijdstip  $t = 0$  worden een laag water en een laag toluen op elkaar aangebracht. In beide lagen is een broomverbinding opgelost met een concentratie van  $20 \text{ kg/m}^3$ . De verdelingscoëfficiënt, gedefinieerd als de concentratie in toluen



gedeeld door de concentratie in water, is 10. De diffusiecoëfficiënt van de broomverbinding in water is  $2,0 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ ; in de toluëen fase is deze 4 maal zo klein. De waterlaag is 2 cm dik, de toluëenlaag 1 cm.

- Beredeneer met behulp van een schets van het concentratieprofiel in de lagen van welke laag naar welke laag er transport van de broomverbinding plaats vindt.
- Geef voor korte tijden voor beide fasen de uitdrukking voor de massaflux door het grensvlak.
- Bepaal voor korte tijden de grensvlakconcentraties.
- Bereken op tijdstip  $t = 3$  uur de broommassaflux door het grensvlak van water en toluëen.
- Bepaal in de evenwichtssituatie de concentratie van de broomverbinding in beide fasen.

- 15** Een nat, goed geleidend voorwerp wordt vertikaal in droge stilstaande lucht geplaatst om te drogen. Stof- en warmte-overdracht vinden plaats onder invloed van laminaire vrije convectie. Na korte tijd is de toestand stationair geworden en heeft het voorwerp de temperatuur  $T_w$  aangenomen, die wordt gegeven door de betrekking:

$$\frac{p_w - p_a}{T_a - T_w} = \frac{RT}{\Delta h_v} \rho c_p \text{Le}^n \quad (6.3)$$

Hierin is

$p_w$  = partiële waterdampdruk in de lucht aan het voorwerp

$p_a$  = partiële waterdampdruk in de lucht

$T_a$  = temperatuur van de lucht

$T$  = gemiddelde temperatuur:  $(T_a + T_w)/2$

$\rho$  = dichtheid van de lucht bij  $T$

$c_p$  = soortelijke warmte van de lucht bij  $T$

$\text{Le}$  = Lewis-getal van de lucht bij  $T$

$\Delta h_v$  = verdampingswarmte van het water bij temperatuur  $T_w$

Verdere gegevens:

$p_a$  en  $T_a$  veranderen tijdens het droogproces zeer weinig;

$p_w$  is klein ten opzichte van de totale druk;

het voorwerp is steeds volledig nat, dat wil zeggen er ontstaan geen droge plekken.

- Verklaar het optreden van vrije convectie. Welke formule geldt voor de warmteoverdrachtscoëfficiënt en welke voor stofoverdrachtscoëfficiënt?
- Hoe groot is  $n$ ?

- 16** In een cilindervormige oven bevindt zich een verwarmingselement van 500 W,

die in de oven voor een uniforme temperatuur  $T_1$  zorgt. De oven heeft een lengte van 50 cm. De ovenwand bestaat uit steen ( $\lambda = 0,1$  W/mK). De inwendige straal van de oven is 20 cm. De dikte van de steenlaag is 10 cm. De temperatuur van de omringende lucht is  $T_0$ . Warmteverliezen door de (cirkelvormige) bodem en deksel van de oven zijn verwaarloosbaar klein. De weerstand voor warmtetransport bevindt zich geheel in de stenen ovenwand. De toestand is stationair.

- Leid de differentiaalvergelijking af voor de temperatuur in de ovenwand.
- Bepaal uit deze differentiaalvergelijking het temperatuurprofiel in de ovenwand. Vermeld expliciet de gebruikte randvoorwaarden.
- Druk de warmtestroom door de ovenwand uit in het drijvende temperatuurverschil, de relevante stofgrootheden en geometrische factoren.
- Bepaal de stationaire temperatuur in de oven voor het geval  $T_0 = 20$  °C.

- 17** In een proces worden teflon bolletjes met een diameter van 5 mm gemaakt. Aan het eind van de fabricage hebben deze bolletjes nog een uniforme temperatuur van 60 °C. De bolletjes moeten afgekoeld worden tot in de bolletjes de maximale temperatuur 12 °C is. Het idee is om deze bolletjes door een kolom gevuld met water van 10 °C te laten vallen. Men denkt (op intuïtieve gronden) genoeg te hebben aan een kolom met een hoogte van 5 m. De ingenieur, die belast is met de uitvoering van dit project, meent echter op grond van een berekening dat deze hoogte te gering is. In deze opgave wordt gevraagd dit na te rekenen.

Gegevens teflon:  $\rho_T = 2200$  kg/m<sup>3</sup>

$$c_{p,T} = 1000 \text{ J/kgK}$$

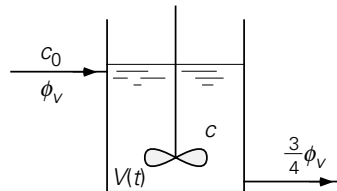
$$\lambda_T = 0,3 \text{ W/mK}$$

- Bepaal de eenparige valsnelheid van een bolletje door stilstaand water.
- Toon aan dat de weerstand voor warmtetransport zich in het teflon bolletje bevindt.
- Bereken de tijd die nodig is om te bewerkstelligen dat de maximale temperatuur in het bolletje 12 °C is.
- Bereken de hiervoor vereiste hoogte van de waterkolom.

## 6.2 Oplossingen

### Oplossing opgave 1

a)



Figuur 6.3.

De totale-massabalans luidt:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \phi_V \rho - \frac{3}{4} \phi_V \rho = \frac{1}{4} \phi_V \rho \rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{4} \phi_V \quad (6.4)$$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking is:

$$V(t) = \frac{1}{4} \phi_V \cdot t + C_1 \quad (6.5)$$

Met behulp van de randvoorwaarde

$$t = 0 \rightarrow V = \frac{1}{4} V_0 \quad (6.6)$$

is de constante  $C_1$  te bepalen en wordt de oplossing:

$$V(t) = \frac{1}{4} V_0 + \frac{1}{4} \phi_V \cdot t \quad (6.7)$$

b) De massabalans voor het zout luidt:

$$\frac{d(Vc)}{dt} = \phi_V c_0 - \frac{3}{4} \phi_V c \quad (6.8)$$

Hierbij moeten we bedenken dat ook  $V$  in dit geval een functie van de tijd is (zie (a)). Dus het linker lid van de vergelijking moeten we eerst verder uitwerken. Toepassen van de kettingregel levert:

$$\frac{d(Vc)}{dt} = c \frac{dV}{dt} + V \frac{dc}{dt} = c \cdot \frac{1}{4} \phi_V + V \frac{dc}{dt} \quad (6.9)$$

Hierbij is reeds het resultaat voor  $dV/dt$  volgens vergelijking (6.4) ingevuld. Combinatie van vergelijking (6.8) en vergelijking (6.9) levert:

$$V(t) \frac{dc}{dt} = \phi_V (c_0 - c) \quad (6.10)$$

c) Deze differentiaalvergelijking is op te lossen door scheiding van variabelen:

$$\frac{dc}{c_0 c} = \frac{\phi_V dt}{V(t)} = 4 \frac{dt}{t + \frac{V_0}{\phi_V}} \quad (6.11)$$

Oplossing van deze vergelijking levert:

$$-\ln(c_0 - c) = 4 \ln\left(t + \frac{V_0}{\phi_V}\right) + C_2 \quad (6.12)$$

De integratieconstante  $C_2$  is te bepalen met de randvoorwaarde:

$$t = 0 \rightarrow c = 0 \rightarrow C_2 = -\ln c_0 - 4 \ln \frac{V_0}{\phi_V} \quad (6.13)$$

Als we dit substitueren in de algemene oplossing (6.12), dan vinden we

$$\frac{c}{c_0} = 1 - \left(1 + \frac{\phi_V t}{V_0}\right)^4 \quad (6.14)$$

## Oplossing opgave 2

Deze opgave wordt opgelost met behulp van dimensie-analyse:

$$\frac{F}{B} = L^\alpha V^\beta \rho^\gamma \mu^\delta \quad (6.15)$$

dit levert voor de verschillende eenheden op:

$$\begin{aligned} \text{kg:} \quad & 1 = \gamma + \delta \\ \text{m:} \quad & 0 = \alpha + \beta - 3\gamma - \delta \\ \text{s:} \quad & -2 = -\beta - \delta \end{aligned} \quad (6.16)$$

Als we  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  uitdrukken in  $\delta$ , dan vinden we:  $\gamma = 1 - \delta$ ,  $\beta = 2 - \delta$  en  $\alpha = 1 - \delta$ . Dit geeft:

$$\frac{F}{B} = k \cdot \left(\frac{\rho V L}{\mu}\right)^\delta \cdot \rho V^2 \cdot L \quad (6.17)$$

Nu is gegeven dat uit de experimenten volgt:

$$\frac{F}{B} \propto V^{9/5} \quad (6.18)$$

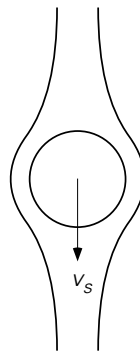
Dus we concluderen:  $\delta = 1/5$ . Verder combineren van de experimentele bevinding en vergelijking (6.17) levert:

$$k \cdot \rho^{4/5} \mu^{1/5} L^{4/5} = 2,83 \rightarrow k = 4,49 \cdot 10^{-2} \quad (6.19)$$

Invullen van  $B = 2,90$  m,  $L = 20$  m,  $v = 2$  m/s,  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup> en  $\mu = 10^{-2}$  Ns/m<sup>2</sup> levert op:  $F = 500$  N.

### Oplossing opgave 3

a)



Figuur 6.4.

Eenparige valsnelheid  $\rightarrow$  krachtenbalans:

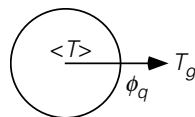
$$0 = \frac{\pi}{6} D^3 (\rho_a - \rho) g + C_D \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{1}{2} \rho_a v_s^2 \quad (6.20)$$

met  $\rho_a$  de dichtheid van lucht, die bij  $p = 1$  bar en  $T = 0$  °C 1,3 kg/m<sup>3</sup> bedraagt. Hieruit volgt voor de eenparige valsnelheid:

$$v_s = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{gD}{C_D} \frac{\rho - \rho_a}{\rho_a}} \quad (6.21)$$

iteratie geeft (met Reynolds gedefinieerd als  $Re = (\rho_a v_s D) / \mu_a$  en  $\mu_a = 1,72 \cdot 10^{-5}$  Ns/m<sup>2</sup>)  $v_s = 4,9$  m/s.

b)



Figuur 6.5.

Energiebalans:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\pi}{6} D^3 \rho c_p \langle T \rangle \right) = -U \cdot \pi D^2 \cdot (\langle T \rangle - T_a) \quad (6.22)$$

- c) Om deze balans op te kunnen lossen moeten we onder andere weten of  $U$  constant is (en dus geen functie van  $t$  of  $\langle T \rangle$ ). De totale warmteoverdrachtscoëfficiënt volgt uit

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_u} \quad (6.23)$$

waarbij  $h_i$  de inwendige warmteoverdrachtscoëfficiënt is die gevonden wordt uit ('doorverwarming' want het hele deeltje moet flink afkoelen)

$$h_i = \text{Nu}_i \cdot \frac{\lambda}{D} = 6,6 \cdot \frac{0,1}{0,002} = 330 \text{ W/m}^2\text{K} \quad (6.24)$$

en  $h_u$  de uitwendige warmteoverdrachtscoëfficiënt is. Voor deze laatste coëfficiënt moeten we eerst een geschikte Nu-relatie vinden. Voor een bol is dit

$$\text{Nu}_u = 2 + 0,66 \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad \text{mits } 10 < \text{Re} < 10^4 \text{ en } \text{Pr} \geq 0,7 \quad (6.25)$$

Nu is aan de eis voor Re voldaan:  $\text{Re} = 742$  volgens (a). Verder is voor lucht bij 1 bar en  $0^\circ\text{C}$   $\text{Pr} = 0,71$ , dus ook aan de tweede eis is voldaan. Dit levert na invullen op:

$$h_u = \text{Nu}_u \cdot \frac{\lambda_a}{D} = 18 \cdot \frac{0,0243}{0,002} = 216 \text{ W/m}^2\text{K} \quad (6.26)$$

We vinden dus:  $U = 130 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

Omdat  $U$  constant is, is de oplossing van vergelijking (6.22):

$$\ln(\langle T \rangle - T_a) = - \frac{6U}{\rho c_p D} t + K_1 \quad (6.27)$$

De randvoorwaarde die hierbij hoort is:

$$t = 0 \rightarrow \langle T \rangle = T_0 = 700^\circ\text{C} \quad (6.28)$$

Dit geeft als oplossing:

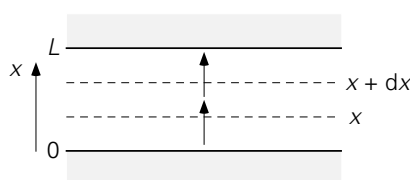
$$\ln\left(\frac{\langle T \rangle - T_a}{T_0 - T_a}\right) = - \frac{6U}{\rho c_p D} \cdot t \quad (6.29)$$

- d) De eis is:  $\langle T \rangle = 20^\circ\text{C}$ . Dit geeft voor de valtijd  $\tau = 2,2$  s.
- e) Bij onderdeel (a) hebben we uitgerekend, dat een poederdeeltje door stilstaande lucht valt met een snelheid van 4,9 m/s. In een toren van 7 m geeft dit dus een valtijd van 1,43 s. Dat is dus te kort: we moeten het poederdeeltje vertragen. Dit kan door de lucht van onder naar boven door de toren te blazen. De snelheid van het deeltje ten opzichte van de lucht blijft uiteraard hetzelfde, het is immers een

relatieve snelheid. We moeten bereiken dat de valtijd 2,2 s is. Dus de valsnelheid van het deeltje ten opzichte van de toren moet zijn:  $v = 7/2,2 = 3,2$  m/s. Dit betekent dat de lucht een snelheid van  $4,9 - 3,2 = 1,7$  m/s moet hebben.

### Oplossing opgave 4

a)



Figuur 6.6.

Noem de vluchtige stof X. De molflux van de lucht is nul. Er is sprake van éézijdige diffusie.

b) plakje tussen  $x$  en  $x + dx$ , molflux voor stof X:

$$\phi''_{\text{mol,X}} = -ID \frac{dc}{dx} + \phi''_{\text{drift}} \frac{c}{c_{\text{tot}}} = -I \quad (6.30)$$

éézijdig, dus

$$\phi''_{\text{drift}} = \phi''_{\text{mol,X}} + \phi''_{\text{mol,lucht}} = \phi''_{\text{mol,X}} \quad (6.31)$$

Dit geeft voor de molflux van X:

$$\phi''_{\text{mol,X}} = -ID \frac{c_{\text{tot}}}{c_{\text{tot}} - c} \frac{dc}{dx} \quad (6.32)$$

Nu we de uitdrukking voor de molflux van X hebben, kunnen we een molbalans opstellen over het plakje:

$$0 = A \cdot \left( -ID \frac{c_{\text{tot}}}{c_{\text{tot}} - c} \frac{dc}{dx} \right)_x - A \cdot \left( -ID \frac{c_{\text{tot}}}{c_{\text{tot}} - c} \frac{dc}{dx} \right)_{x+dx} \quad (6.33)$$

c) Hieruit volgt:

$$\frac{1}{c_{\text{tot}} - c} \frac{dc}{dx} = K_1 \quad (6.34)$$

De oplossing hiervan is (gebruikmakend van de randvoorwaarden:  $x = 0 \rightarrow c = c^*$  en  $x = L \rightarrow c = 0$ ):

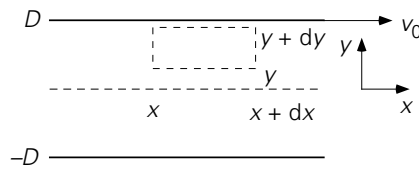
$$\frac{c_{\text{tot}} - c}{c_{\text{tot}} - c^*} = \left( \frac{c_{\text{tot}} - c}{c_{\text{tot}} - c^*} \right)^{x/L} \quad (6.35)$$

Hiermee kunnen we  $dc/dx$  in de vergelijking voor de molflux elimineren:

$$\phi''_{\text{mol},X} = -ID \frac{c_{\text{tot}}}{c_{\text{tot}} - c} \frac{dc}{dx} = \frac{IDc_{\text{tot}}}{L} \cdot \ln \left( \frac{c_{\text{tot}}}{c_{\text{tot}} - c^*} \right) \quad (6.36)$$

### Oplossing opgave 5

a)



Figuur 6.7.

Stationair, dus een krachtenbalans over plakje met  $x$  tussen  $\{x, x + dx\}$  en  $y$  tussen  $\{y, y + dy\}$  levert:

$$0 = - \frac{dp}{dx} - \frac{d\tau_{yx}}{dy} \quad (6.37)$$

Nu is  $dp/dx$  constant; dus is de algemene oplossing van de krachtenbalans:

$$\tau_{yx}(y) = - \frac{dp}{dx} \cdot y + C_1 \quad (6.38)$$

Het gaat om een Newtonse vloeistof:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (6.39)$$

Combineren van vergelijkingen (6.38) en (6.39) levert

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)}{\mu} y - \frac{C_1}{\mu} \quad (6.40)$$

De algemene oplossing hiervan is:

$$v_x(y) = \frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)}{2\mu} y^2 - \frac{C_1}{\mu} y + C_2 \quad (6.41)$$

De beide integratieconstanten kunnen bepaald worden uit de randvoorwaarden:  $v_x(-D) = 0$  en  $v_x(D) = v_0$ . Dit geeft voor het snelheidsprofiel:

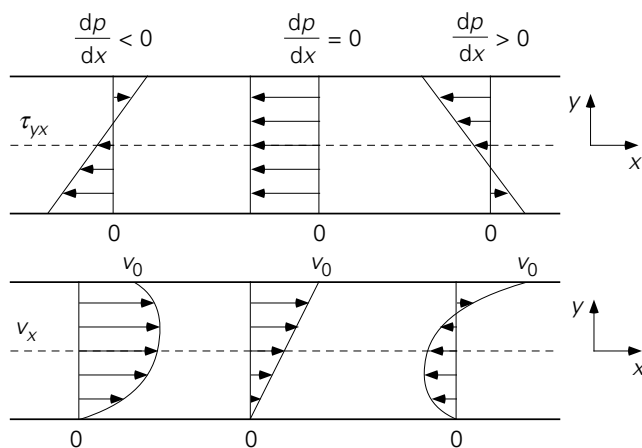
$$v_x(y) = - \frac{D^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y^2}{D^2}\right) + \frac{v_0}{2} \left(1 + \frac{y}{D}\right) \quad (6.42)$$



en voor het schuifspanningsprofiel

$$\tau_{yx} = -\frac{dp}{dx}y - \frac{\mu V_0}{2D} \tag{6.43}$$

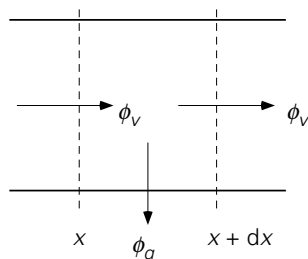
b)



Figuur 6.8.

### Oplossing opgave 6

a)



Figuur 6.9.

We stellen een warmtebalans op over een stukje uit de buis tussen  $x$  en  $x + dx$ :

$$0 = \phi_v \rho c_p \langle T \rangle_x - \phi_v \rho c_p \langle T \rangle_{x+dx} - \pi D dx \cdot U \cdot (\langle T \rangle - T_z) \tag{6.44}$$

Dit is te schrijven als (gebruik makend van  $\phi_v = \frac{\pi}{4} D^2 v$ ):

$$\frac{d\langle T \rangle}{dx} = -\frac{4U}{\rho c_p D v} (\langle T \rangle - T_z) \tag{6.45}$$

Vervolgens moeten we de warmteweerstand uitrekenen. Eerst bepalen we de inwendige warmteweerstand. Hiervoor hebben we Reynolds nodig:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = 4 \cdot 10^4 \rightarrow \text{turbulent}$$

en het Prandtl-getal:  $Pr = \nu/a = 27 > 0,7$ . Dus we mogen de onderstaande Nu-

relatie gebruiken:

$$\text{Nu}_i = 0,027\text{Re}^{0,8}\text{Pr}^{1/3} \quad (6.46)$$

Hieruit volgt dat  $h_i = 575 \text{ W/m}^2\text{K}$ . De uitwendige warmteweerstand is gegeven en de warmteweerstand van de buis mogen we verwaarlozen. Dus de totale warmte-overdrachtscoëfficiënt is

$$U = \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_u} \right)^{-1} = 85,2 \text{ W/m}^2\text{K} \quad (6.47)$$

$U$  is dus constant en we kunnen nu de differentiaalvergelijking (6.45) oplossen. De randvoorwaarde die bij dit probleem hoort, is:  $T(x=0) = T_0$ . De oplossing is:

$$\langle T \rangle = T_z + (T_0 - T_z) \exp\left(-\frac{4U}{\rho c_p D V} \cdot x\right) \quad (6.48)$$

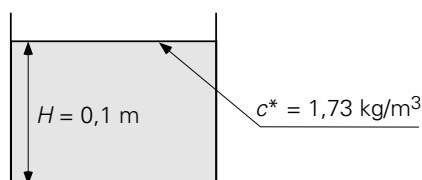
- b) Invullen van  $L$  voor  $x$  levert nu eenvoudig:  $\langle T \rangle_L = 10,04 \text{ }^\circ\text{C}$ !
- c) Nu moeten we een nieuwe  $U$  uitrekenen. Gegeven is dat slechts de weerstand van de schuimlaag van belang is. Dus de nieuwe  $U^*$  wordt:

$$U^* = \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{\lambda_s / d_s} + \frac{1}{h_u} \right)^{-1} \geq \frac{\lambda_s}{d_s} \quad (6.49)$$

De eis is dat  $\langle T \rangle_L \geq 50^\circ\text{C}$ . Volgens de oplossing uit (a) geeft dit  $U^* \geq 6,4 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Dit geeft dus als minimum dikte voor de laagdikte:  $d_s = \lambda_s / U^* = 0,47 \text{ mm}$ .

- d) Om dit aan te tonen vergelijken we  $1/U^* = 0,16 \text{ m}^2\text{K/W}$  en  $1/h_i + 1/h_u = 0,012 \text{ m}^2\text{K/W}$ . Dus inderdaad is  $1/U^* \gg 1/h_i + 1/h_u$  en is de verwaarlozing gerechtvaardigd.

### Oplossing opgave 7



Figuur 6.10.

Indringdiepte  $x_e = \sqrt{\pi I D t_e} = 4,37 \text{ mm} \ll 0,05 \text{ m}$ : we moeten dus de penetratietheorie gebruiken. De gemiddelde stofoverdrachtscoëfficiënt  $k$  in het interval  $(0, t_e)$  is derhalve:

$$\bar{k} = 2 \sqrt{\frac{ID}{\pi t_e}} = 7,73 \cdot 10^{-7} \text{ m/s} \quad (6.50)$$

Voor de gemiddelde flux in dit interval die door het grensvlak tussen water en gas gaat vinden we:

$$\bar{\phi}_m'' = k(c^* - 0) = 1,34 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^2\text{sP} \quad (6.51)$$

Gedurende  $t_e$  is dus per  $\text{m}^2$  door het grensvlak naar binnen gestroomd:

$$\bar{\phi}_m'' \cdot t_e = 4,81 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^2 \quad (6.52)$$

en we vinden voor de gemiddelde concentratie in het bakje:

$$\langle c \rangle = \frac{\bar{\phi}_m'' t_e}{H} = 4,81 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3 \quad (6.53)$$

### Oplossing opgave 8

a) krachtenbalans:

$$0 = \Delta p \cdot B dy + (\tau_{yx}) \Big|_y BL - (\tau_{yx}) \Big|_{y+dy} BL \quad (6.54)$$

b) Hieruit volgt:

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{\Delta p}{L} \rightarrow \tau_{yx} = \frac{\Delta p}{L} y + C_1 \quad (6.55)$$

Gegeven is dat het om een Newtonse vloeistof gaat, dus

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (6.56)$$

Combineren van beide vergelijkingen levert:

$$\frac{dv_x}{dy} = -\frac{\Delta p}{\mu L} y - \frac{C_1}{\mu} \rightarrow v_x(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} y^2 - \frac{C_1}{\mu} y + C_2 \quad (6.57)$$

Met behulp van de randvoorwaarden  $y = 0 \rightarrow v_x = v_0$  en  $y = H \rightarrow v_x = 0$  kunnen de twee integratieconstanten bepaald worden. Dit geeft voor het snelheidsprofiel in de spuitmond:

$$v_x(y) = \frac{\Delta p}{2\mu L} (yH - y^2) + v_0 \left(1 - \frac{y}{H}\right) \quad (6.58)$$

Hieruit is eenvoudig het debiet door het mondstuk (aan de bovenzijde van de plaat) te berekenen:

$$\phi_v = \int_0^H B v_x dy = \frac{1}{2} B H v_0 + \frac{1}{12} \frac{\Delta p}{L} \frac{B H^3}{\mu} \quad (6.59)$$

c) massabalans:

$$0 = \left( \frac{1}{2} B H v_0 + \frac{1}{12} \frac{\Delta p}{L} \frac{B H^3}{\mu} \right) - B \delta v_0 \quad (6.60)$$

Hieruit is de laagdikte  $\delta$  op te lossen:

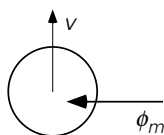
$$\delta = \frac{1}{2} H + \frac{1}{12} \frac{\Delta p}{L} \frac{H^3}{\mu v_0} \quad (6.61)$$

Indien  $\Delta p = 0$  geldt dus:  $\delta = H/2$  onafhankelijk van  $\mu$  en  $v_0$ .

- d)  $\Delta p = 0 \rightarrow \delta = 0,025$  cm  
 $\Delta p = 100$  bar  $\rightarrow \delta = 0,028$  cm, slechts 12% toename bij een drukval van 100 bar!

### Oplossing opgave 9

- a) drijvende kracht:  $c_{wb} - m c_{ob}$



Figuur 6.11.

b)

$$\phi_m = A \cdot \left( \frac{m}{k_o} + \frac{1}{k_w} \right)^{-1} \cdot (c_{wb} - m c_{ob}) \quad (6.62)$$

- c) buiten druppel:  $Re = (\rho_w v D) / \mu_w = 20$  en  $Sc = 1000$ ; we mogen dus onderstaande Sherwood-relatie gebruiken

$$Sh_w = 2 + 0,66 Re^{1/2} Sc^{1/3} = 32 \quad (6.63)$$

aan de binnenzijde van de druppel geldt: analogon van doorverwarming, dus  $Sh_o = 6,6$

d)

$$k_w = Sh_w \frac{D_w}{ID} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

en

$$k_o = Sh_o \frac{D_o}{ID} = 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$$

daarmee vinden we voor de weerstanden voor stoftransport:

$$\frac{m}{k_o} \gg \frac{1}{k_w} \rightarrow \left( \frac{m}{k_o} + \frac{1}{k_w} \right)^{-1} \approx \frac{k_o}{m} \quad (6.64)$$

de weerstand ligt inderdaad in de olie.

e) massabalans over oliedruppel:

$$\frac{d}{dt}(Vc_o) = Ak_o \left( \frac{c_{wb}}{m} - c_{ob} \right) \quad (6.65)$$

De oplossing hiervan is, gebruikmakend van de randvoorwaarde:  $t = 0 \rightarrow c_{ob} = 0$

$$\ln \left( 1 - m \frac{c_{ob}}{c_{wb}} \right) = - \frac{6}{D} k_o t \quad (6.66)$$

90% verzadiging  $\rightarrow c_{ob} = 0,9(c_{ob})_{\text{evenwicht}} = 0,9 \cdot c_{wb}/m$ ; daarmee vinden we voor de tijd  $t = 233 \text{ s} \rightarrow H_{\text{kolom}} = v \cdot t = 2,3 \text{ m}$ .

### Oplossing opgave 10

Dimensie-analyse voor  $h_o$ : gegeven is

$$h_o = f(D, N, c_p, \lambda, \rho, \mu, \mu_w) \quad (6.67)$$

schrijf

$$h_o = k D^a \cdot N^b \cdot c_p^b \cdot \lambda^d \cdot \rho^e \cdot \mu^f \cdot (\mu_w)^g \quad (6.68)$$

Dit zijn 8 grootheden met 4 basiseenheden; dus volgens het Buckingham- $\Pi$  theorema vinden we  $8 - 4 = 4$  dimensieloze groepen. Uitvoeren van de dimensie-analyse levert:

$$h_o \frac{D}{\lambda} = k \left( \frac{D^2 N \rho}{\mu} \right)^b \left( \frac{c_p \mu}{\lambda} \right)^c \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{-g} \rightarrow \text{Nu} = k \text{Re}^b \text{Pr}^c \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{-g} \quad (6.69)$$

Dit resultaat verbaast bij nader inzien niet.

Opschalen van klein naar groot: neem  $\mu$  in beide gevallen bij de gemiddelde temperatuur, die voor beide situaties  $125 \text{ }^\circ\text{C}$  bedraagt.

$$\frac{\text{Re}_{\text{klein}}}{\text{Re}_{\text{groot}}} = \frac{D_k^2 N_k}{D_g^2 N_g} = \frac{1}{9} \cdot \frac{90}{10} = 1 \quad (6.70)$$

Verder geldt

$$\left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)_g = \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)_k \text{ en } \text{Pr}_g = \text{Pr}_k$$

Dus volgens de uitkomst van de dimensie-analyse geldt nu:

$$\text{Nu}_g = \text{Nu}_k \rightarrow (h_o D)_g = (h_o D)_k$$

Verder geldt

$$\frac{h_o A}{Mc_p} = \frac{h_o A/V}{\rho c_p} = \frac{h_o 1/D}{\rho c_p} \quad (6.71)$$

We hebben nu dus voor het opschalen gevonden:

$$\left(\frac{h_o A}{Mc_p}\right)_g = \left(\frac{D_k}{D_g}\right)^2 \left(\frac{h_o A}{Mc_p}\right)_k \quad (6.72)$$

Voor de kleine tank geldt:  $T$  van  $100^\circ\text{C}$  naar  $150^\circ\text{C}$  in 10 min

$$\rightarrow \left(\frac{h_o A}{Mc_p}\right)_k = 4,84 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Voor de grote tank geldt nu dus:  $T$  van  $50^\circ\text{C}$  naar  $200^\circ\text{C}$  in

$$t = - \frac{\ln \frac{300-200}{300-50}}{\left(\frac{D_k}{D_g}\right)^2 \left(\frac{h_o A}{Mc_p}\right)_k} = 4,7 \text{ uur} \quad (6.73)$$

### Oplossing opgave 11

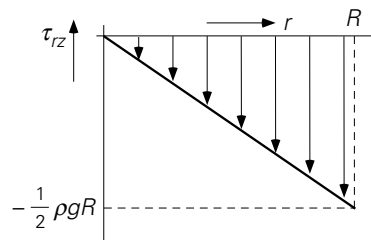
a) krachtenbalans voor ringetje tussen  $\{r, r + dr\}$  met lengte  $L$

$$0 = (2\pi r L \tau_{rz}) \Big|_r + (2\pi r L \cdot -\tau_{rz}) \Big|_{r+dr} - \rho g 2\pi r L dr \quad (6.74)$$

Dit levert de differentiaalvergelijking voor de schuifspanning:

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = -\rho g r \rightarrow r\tau_{rz} = -\frac{1}{2}\rho g r^2 + K_1 \quad (6.75)$$

Op grond van symmetrieoverwegingen geldt:  $\tau_{rz} = 0$  voor  $r = 0$ . Dit geeft dat de integratie-constante  $K_1$  gelijk aan nul is. Het schuifspanningsprofiel is derhalve



Figuur 6.12.

$$\tau_{rz} = -\frac{1}{2} \rho g r \quad (6.76)$$

b) Bingham  $\rightarrow$

$$\begin{aligned} |\tau_{rz}| - \tau_0 &= \mu \left| \frac{dv_z}{dr} \right| && \text{mits } |\tau_{rz}| > \tau_0 \\ \frac{dv_z}{dr} &= 0 && \text{als } |\tau_{rz}| \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (6.77)$$

Eerst gebied waarin

$$|\tau_{rz}| > \tau_0 \Leftrightarrow r > \frac{R}{2}$$

Hier geldt

$$\frac{dv_z}{dr} > 0 \quad \text{en} \quad \tau_{rz} < 0$$

en vinden we voor de snelheid:

$$\mu \frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{2} \rho g r - \tau_0 = \frac{1}{2} \rho g \left( r - \frac{R}{2} \right) \quad (6.78)$$

Gebruik maken van de randvoorwaarde:  $r = R \rightarrow v_z = 0$  ( $r = R$  zit in gebied  $r > R/2$ ) geeft als oplossing van deze differentiaalvergelijking:

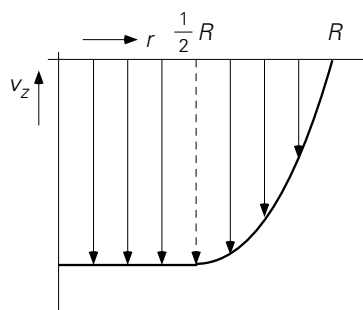
$$v_z(r) = \frac{\rho g}{4\mu} (r^2 - Rr) \quad (6.79)$$

Indien

$$r \leq \frac{R}{2} \Leftrightarrow |\tau_{rz}| \leq \tau_0$$

dan geldt:

$$\frac{dv_z}{dr} = 0 \rightarrow v_z = \text{constant} = v_z \left( \frac{R}{2} \right) = -\frac{1}{16} \frac{\rho g}{\mu} R^2 \quad (6.80)$$

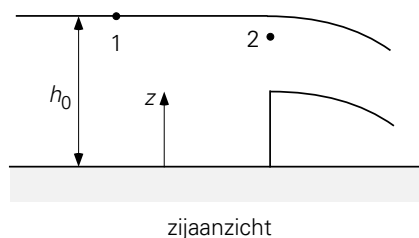


Figuur 6.13.

- c) Nu dus  $\tau_0 = \rho g R \rightarrow$  voor het schuifspanningsprofiel maakt dit niets uit. Dat stelt zich immers in volgens de krachtenbalans van (a) onafhankelijk van de reologie van de vloeistof. Echter nu is overal  $|\tau_{rz}| < \tau_0$ . Dus  $dv_z/dr = 0$  overal. Dit betekent dat  $v_z = \text{constant}$ . De randvoorwaarde hierbij is nu  $r = R \rightarrow v_z = 0$ . Dus  $v_z = 0$  overal; geen stroming.

### Oplossing opgave 12

- a) Zie figuur 6.14  
 punt 1:  $p = p_0, v_1, z = h_0$   
 punt 2:  $p = p_0, v_2 \gg v_1, z$



Figuur 6.14.

Bernoulli  $\rightarrow$

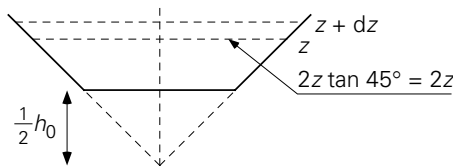
$$\frac{1}{2} v_2^2 = g(h_0 - z) \rightarrow v_2 = \sqrt{2g(h_0 - z)} \quad (6.81)$$

- b) Bijdrage aan het debiet van de stroming door een stripje tussen  $z$  en  $z + dz$  (zie figuur 6.15) is:  $d\phi_V = v(z) \cdot 2z \cdot dz$ . Dus het totale debiet door de overloop is:

$$\phi_V = \int_{\frac{1}{2}h_0}^{h_0} v(z) \cdot 2z \cdot dz$$



$$= 2\sqrt{2g} \int_{\frac{1}{2}h_0}^{h_0} z\sqrt{h_0 - z} dz$$



Figuur 6.15.

$$= 2\sqrt{2g} h_0^{5/2} \int_{\frac{1}{2}}^1 t\sqrt{1-t} dt = \frac{7}{15} \sqrt{g} h_0^{5/2} \quad (6.82)$$

- c) Contractie en dissipatie  $\rightarrow$  theoretische debiet uit (b) vermenigvuldigen met de doorstroomcoëfficiënt  $C$ :

$$\phi_v = C \cdot \frac{7}{15} \sqrt{g} h_0^{5/2} = 0,24 \text{ m}^3/\text{s} \quad (6.83)$$

### Oplossing opgave 13

- a) Oplossen met behulp van de mechanische-energiebalans:

$$0 = -\phi_m \left[ \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \right] + \phi_w - \phi_m e_{fr} \quad (6.84)$$

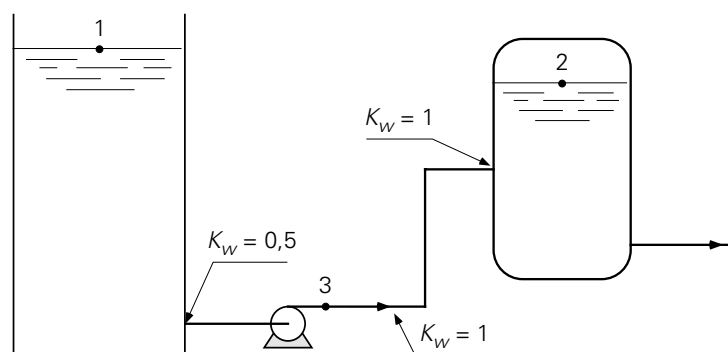
met

$$e_{fr} = 4f \frac{L}{D} \frac{1}{2} v^2 + \sum K_w \frac{1}{2} v^2 \quad (6.85)$$

Het debiet is gegeven en hieruit kan eenvoudig de snelheid in de leiding uitgerekend worden. Daarmee bepalen we  $Re$  en zoeken de bijbehorende  $4f$  op:

$$\phi_m = 7,85 \text{ kg/s} \rightarrow v = \frac{\phi_m}{\rho \frac{\pi}{4} D^2} = 4 \text{ m/s} \rightarrow Re = 9,5 \cdot 10^4 \rightarrow 4f = 1,8 \cdot 10^{-2}$$

Passen we nu de mechanische-energiebalans toe op de punten 1 en 2 (zie figuur 6.16):



Figuur 6.16.

punt 1:  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $h_1 = 10 \text{ m}$ ,  $v_1 \approx 0$

punt 2:  $p_2 = 2,3 \text{ bar}$ ,  $h_2 = 5 \text{ m}$ ,  $v_2 \approx 0$

We vinden voor de dissipatie:

$$e_{fr} = 4f \frac{L}{D} \frac{1}{2} v^2 + (0,5 + 2 \times 1 + 1) \frac{1}{2} v^2 = 85,6 \text{ J/kg} \quad (6.86)$$

en berekenen voor het vermogen dat de pomp moet leveren met behulp van vergelijking (6.84):  $\phi_w = 1310 \text{ W}$ .

- b) De druk is het hoogst vlak achter de pomp. Om deze te bepalen passen we de mechanische-energiebalans toe op punt 1 en 3 (zie figuur 6.16):

punt 3:  $p_3 = ?$ ,  $z_3 = 0$ ,  $v_3 = 4 \text{ m/s}$

Voor  $e_{fr}$  hoeven we enkel het verlies aan mechanische energie ten gevolge van de ingang in rekening te brengen: de dissipatie in het stukje leiding tussen punt 1 en

3 is verwaarloosbaar klein. Dus  $e_{fr} = 0,5 \cdot \frac{1}{2} v^2 = 4 \text{ J/kg}$ . Tevens weten we uit

onderdeel (a) dat  $\phi_w = 1310 \text{ W}$ . Invullen in de mechanische-energiebalans geeft:  $p_3 = 3,5 \text{ bar}$ .

### Oplossing opgave 14

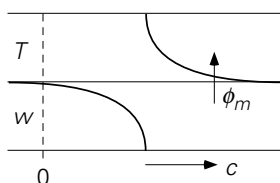
- a) Van water naar toluen, vanwege

$$\left[ \frac{c^T}{c^w} \right]_{\text{eq}} = m = 10$$

- b) Korte tijden  $\rightarrow$  penetratietheorie:  
fluxen door grensvlak

$$\text{toluen: } \phi_m'' = \sqrt{\frac{D_T}{\pi t}} (c_g^T - c_b^T) \quad (6.87)$$

$$\text{water: } \phi_m'' = \sqrt{\frac{ID_w}{\pi t}} (c_g^w - c_b^w) \quad (6.88)$$



Figuur 6.17.

- c) De fluxen zijn gelijk aan elkaar  $\rightarrow$

$$\sqrt{ID_T} (c_g^T - c_b^T) = \sqrt{ID_w} (c_g^w - c_b^w) \quad (6.89)$$

Verder geldt voor de beide grensvlakconcentraties:

$$c_g^T = m c_g^w \quad (6.90)$$

en is gegeven:  $c_b^T = c_b^w = 20 \text{ kg/m}^3 = 20 \text{ kg/m}^3$  en  $ID_w = 4ID_T$ . Invullen levert op:  $c_g^T = 20 \text{ kg/m}^3 = c_g^w = 5 \text{ kg/m}^3$ .

- d) Op  $t = 3$  uur is de indringdiepte aan de waterzijde  $x_e^w = \sqrt{\pi ID_w t} = 8,2 \text{ mm} \ll 1 \text{ cm}$  en aan de toluenezijde  $x_e^T = \sqrt{\pi ID_T t} = 4,1 \text{ mm} \ll 0,5 \text{ cm}$ ; de penetratietheorie is nog steeds te gebruiken. De massaflux door het grensvlak is dan

$$\phi_m'' = \sqrt{\frac{ID_w}{\pi t}} (c_g^w - c_b^w) = 3,64 \cdot 10^{-6} \text{ kg/s} \quad (6.91)$$

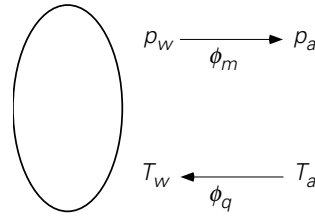
- e) Massabalans over beide lagen:

$$1 \cdot c_b^T(t=0) + 2 \cdot c_b^w(t=0) = 1 \cdot c_b^T(t \rightarrow \infty) + 2 \cdot c_b^w(t \rightarrow \infty) \quad (6.92)$$

Nu geldt in evenwicht:  $c_b^T(t \rightarrow \infty) = 10 \cdot c_b^w(t \rightarrow \infty)$ . Invullen levert  $c_b^T(t \rightarrow \infty) = 50 \text{ kg/m}^3$  en  $c_b^w(t \rightarrow \infty) = 5 \text{ kg/m}^3$ . Bedenk dat het samenvallen van de waarden van de concentraties aan het grensvlak voor korte tijden en de waarden van de bulkconcentraties in evenwicht louter toeval is.

### Oplossing opgave 15

- a) Ten gevolge van het drogen (= verdampen) koelt het voorwerp af. Dit betekent dat de dichtheid van de lucht om het voorwerp toeneemt ten opzichte van de lucht ver weg. Bovendien is de concentratie waterdamp vlak bij het voorwerp als gevolg van de verdamping groter dan ver van het voorwerp vandaan. Ook dit draagt bij aan een hogere dichtheid van de lucht rond het voorwerp. Er is dus een drijvende kracht voor vrije convectie: er zal stroming langs het voorwerp optreden, die omlaag gericht is.



Figuur 6.18.

Laminaire vrije convectie:

$$\text{Nu} = c \cdot (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{1/4}$$

$$\text{Sh} = c \cdot (\text{Gr} \cdot \text{Sc})^{1/4}$$

- b) Er is evenwicht; dus wordt de verdampingswarmte gecompenseerd door een warmtestroom naar het voorwerp toe:

$$\Delta h_v \cdot \phi_m = \phi_q \quad (6.93)$$

De beide stromen zijn te schrijven als

$$\phi_m = k \cdot A \cdot \frac{p_w - p_a}{RT} \quad (6.94)$$

$$\phi_q = h \cdot A \cdot (T_a - T_w) \quad (6.95)$$

Hieruit volgt dat geldt

$$\frac{p_w - p_a}{T_a - T_w} = \frac{h}{k} \cdot \frac{RT}{\Delta h_v} \quad (6.96)$$

De beide overdrachtscoëfficiënten volgen via de Nu- en Sh-relatie gegeven in (a):

$$\frac{h}{k} = \frac{\text{Nu} \frac{\lambda}{D}}{\text{Sh} \frac{D}{D}} = \left( \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \right)^{1/4} \frac{\lambda}{D} = \left( \frac{\nu/a}{\nu/D} \right)^{1/4} \frac{\lambda}{D} = \rho c_p \left( \frac{a}{D} \right)^{3/4} = \rho c_p \text{Le}^{3/4} \quad (6.97)$$

We vinden dus:  $n = 3/4$ .

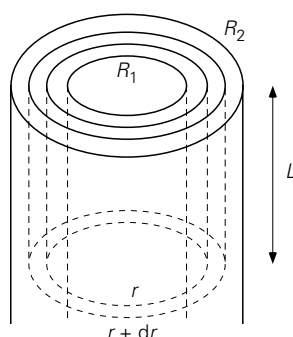
### Oplossing opgave 16

- a) We stellen een stationaire energiebalans op voor een ringetje uit de ovenwand met straal tussen  $r$  en  $r + dr$  en met lengte  $L$ :

$$0 = \left[ -\lambda 2\pi r L \frac{dT}{dr} \right]_r - \left[ -\lambda 2\pi r L \frac{dT}{dr} \right]_{r+dr} \quad (6.98)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr}\right) = 0 \quad (6.99)$$



Figuur 6.19.

b) Deze vergelijking is eenvoudig op te lossen. De algemene oplossing is:

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (6.100)$$

De beide integratieconstanten zijn te bepalen m.b.v. de randvoorwaarden:  $r = R_1 \rightarrow T = T_1$  en  $r = R_2 \rightarrow T = T_0$ . Dit geeft voor het temperatuurprofiel in de ovenwand:

$$T(r) = \frac{\ln r / R_2}{\ln R_1 / R_2} (T_1 - T_0) + T_0 \quad (6.101)$$

c) De warmtestroom door de ovenwand volgt direct uit het profiel:

$$\phi_q = -2\pi R_2 L \lambda \left[ \frac{dT}{dr} \right]_{r=R_2} = \frac{2\pi \lambda L}{\ln R_1 / R_2} (T_1 - T_0) \quad (6.102)$$

d) Tenslotte levert een energiebalans over de hele oven:

$$0 = -\phi_q + Q \quad (6.103)$$

met  $Q = 500$  W, de warmteproductie van het verwarmingselement. Uitwerken levert voor de temperatuur  $T_1$  in de oven:  $T_1 = 665$  °C.

### Oplossing opgave 17

a) De eenparige valsnelheid volgt uit een krachtenbalans:

$$0 = \frac{\pi}{6} D^3 (\rho_w - \rho_T) g + C_D \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{1}{2} \rho_w v_s^2 \quad (6.104)$$

Dit levert voor de snelheid:

$$v_s = \left( \frac{4 D g (\rho_T - \rho_w)}{3 C_D \rho_w} \right)^{1/2} \quad (6.105)$$

Itereren geeft (stofconstanten van water bij 10 °C nemen!):  $v_s = 0,44$  m/s.

- b) De weerstanden zijn te bepalen door de warmteoverdrachtscoëfficiënten uit te rekenen. Als eerste bepalen we de uitwendige warmteoverdrachtscoëfficiënt  $h_u$ . Uit (a) weten we dat  $Re = 1700$ . Het Prandtl-getal is bij 10 °C: 9,45. Dit betekent dat we voor  $Nu_u$  mogen gebruiken

$$Nu_u = 2 + 0,66Re^{1/2}Pr^{1/3} \quad \text{immers } 10 < Re < 10^4 \text{ en } Pr > 0,7 \quad (6.106)$$

Dit geeft:  $h_u = Nu_u \cdot \lambda_w / D = 7200$  W/m<sup>2</sup>K

De inwendige warmteoverdrachtscoëfficiënt  $h_i$  volgt door te bedenken dat we hier met doorverwarming te maken hebben, dus  $Nu_i = 6,6$ . Dit geeft:  $h_i = Nu_i \cdot \lambda_T / D = 400$  w/m<sup>2</sup>K.

We hebben nu dus gevonden:

$$\frac{1}{h_u} \ll \frac{1}{h_i} \quad (6.107)$$

De weerstand ligt (vrijwel) geheel in het bolletje.

- c) Uit (b) volgt nu direct dat de temperatuur van de buitenzijde gelijk is aan de temperatuur  $T_1$  van het water. We kunnen werken met figuur 2.14 om te kunnen bepalen hoe lang het duurt voordat de temperatuur van het centrum van het bolletje 12 °C is. De eis is dus:  $T_c = 12$  °C terwijl gegeven is dat  $T_1 = 10$  °C en  $T_0 = 60$  °C. Dit geeft m.b.v. de grafiek:

$$\frac{T_1 - T_c}{T_1 - T_0} = 0,04 \rightarrow Fo = 0,1 \quad (6.108)$$

Met

$$a_T = \frac{\lambda_T}{\rho_T c_{p,T}} = 1,36 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

volgt hieruit

$$t = Fo \frac{D^2}{a} = 18,4 \text{ s} \quad (6.110)$$

- d) We vinden dus voor de hoogte van de kolom:  $H = v_s \cdot t = 8,1$  m, dus een kolom met een hoogte van 5 m is inderdaad te laag.

## Symbolenlijst

Alleen die symbolen zijn hier opgenomen die door het hele boek heen gebruikt zijn.

		eenheden
$a$	absorptiecoëfficiënt	–
$a$	specifieke oppervlak	$\text{m}^2/\text{m}^3$
$a$	warmtevereffeningscoëfficiënt	$\text{m}^2/\text{s}$
$A$	oppervlakte	$\text{m}^2$
$b$	breedte	m
$c$	concentratie	$\text{kg}/\text{m}^3$ of $\text{kmol}/\text{m}^3$
$c^*$	verzadigingsconcentratie	$\text{kg}/\text{m}^3$ of $\text{kmol}/\text{m}^3$
$c_p$	soortelijke warmte bij constante druk	$\text{J}/\text{kgK}$
$c_v$	soortelijke warmte bij constant volume	$\text{J}/\text{kgK}$
$C_d$	uitstroomcoëfficiënt (discharge coefficient)	–
$C_D$	weerstandcoëfficiënt (drag coefficient)	–
$C(\theta)$	$C$ -functie	–
$d$	diameter	m
$D$	diameter	m
$ID$	diffusiecoëfficiënt	$\text{m}^2/\text{s}$
$e$	energieconcentratie per massaeenheid	$\text{J}/\text{kg}$
$e_{\text{diss}}$	specifieke total energiedissipatie	$\text{J}/\text{kg}$
$e_{fr}$	specifieke energiedissipatie in pijpen (wrijving)	$\text{J}/\text{kg}$
$e_L$	specifieke energiedissipatie in appendages	$\text{J}/\text{kg}$
$e$	emissiecoëfficiënt	–
$E$	energie	J
$E_q$	warmte-extractiefactor	–
$E(\theta)$	$E$ -functie	–
$f$	frictiefactor	–
$f_D$	Stefan's correctiefactor	–
$F_D$	meesleepkracht (drag force)	N
$F$	kracht	N
$F(\theta)$	$F$ -functie	–
$g$	zwaartekrachtsversnelling	$\text{m}/\text{s}^2$
$h$	hoogte	m
$h$	warmteoverdrachtscoëfficiënt	$\text{J}/\text{sm}^2\text{K}$
$h$	enthalpieconcentratie per massaeenheid	$\text{J}/\text{kg}$ of $\text{J}/\text{kmol}$

$\Delta h_v$	verdampingswarmte	J/kg
H	Henry coëfficiënt	Pa
$\mathcal{H}$	absolute vochtigheid	kg/kg
$j_D$	stofoverdrachtsgetal	–
$j_H$	warmteoverdrachtsgetal	–
$k$	stofoverdrachtscoëfficiënt	m/s
$k$	concentratie van turbulente kinetische energie	J/kg
$k$	constante	–
$k_B$	constante van Boltzmann	J/K
$k_r$	reactiesnelheidsconstante	wisselend
$K$	overall stofoverdrachtscoëfficiënt	m/s
$K$	consistency (power law)	wisselend
$K_L$	weerstandsgetal	–
$L$	lengte	m
$l$	lengte	m
$l$	gemiddelde vrije weglengte	m
$m$	massa van molecuul	kg
$m$	verdelingscoëfficiënt	–
$M$	(totale) massa	kg
$M$	molaire massa	kg/mol
$n$	aantal	–
$n$	flow index (power law)	–
$N$	aantal tanks in serie	–
$N$	toerental (roerder)	$s^{-1}$
$N_{\text{avo}}$	getal van Avogadro	$\text{mol}^{-1}$
$p$	druk	$\text{N/m}^2$
$p^*$	evenwichts-dampspanning	$\text{N/m}^2$
$P$	vermogen	J/s
$P$	productie	$s^{-1}$
$P$	impuls	Ns
$q$	warmteproductie per volume- en tijdseenheid	$\text{J/m}^3\text{s}$
$r$	radiale coördinaat	m
$r$	chemische reactiesnelheid	$\text{kmol/m}^3\text{s}$
$r$	reflectiecoëfficiënt	-
$R$	straal	m
$R$	gasconstante	J/molK
$s$	afstand	m
$S$	(bevochtigde) omtrek	m
$t$	tijd	s
$t$	transmissiecoëfficiënt	-



$T$	temperatuur	K
$u$	inwendige-energieconcentratie per massa-eenheid	J/kg
$U$	overall warmteoverdrachtscoëfficiënt	J/sm <sup>2</sup> K
		<i>vervolg op schutblad achterzijde</i>
$v$	snellheid	m/s
$v_r$	relatieve snellheid	m/s
$v_o$	superficiële snellheid	m/s
$V$	volume	m <sup>3</sup>
$w$	bladhoogte (roerder)	m
$w$	breedte	m
$W$	afmeting	m
$W$	arbeid (work)	J/s
$x$	massafractie	kg/kg
$x, y$	plaats coördinaten	m
$z$	verticale coördinaat	m
$\beta$	uitzettingscoëfficiënt	K <sup>-1</sup>
$\delta$	film-, spleet-, laagdikte	m
$\Delta$	verschil, of interval	-
$\varepsilon$	snellheid waarmee turbulente kinetische energie wordt gedissipeerd	J/kg·s
$\varepsilon$	porositeit	m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup>
$\varepsilon$	wandruwheid	m
$\theta$	dimensieloze tijd	-
$\theta$	hoek	rad
$\phi$	debiet	s <sup>-1</sup>
$\phi'$	stroom per lengte-eenheid	s <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>
$\phi''$	flux (stroom per oppervlakte-eenheid)	s <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup>
$\phi_w$	arbeid	J/s
$\lambda$	warmtegeleidingscoëfficiënt	J/smK
$\lambda$	tijdconstante voor elastisch gedrag	s
$\mu$	dynamische viscositeit	Ns/m <sup>2</sup>
$\nu$	kinematische viscositeit	m <sup>2</sup> /s
$\rho$	dichtheid	kg/m <sup>3</sup>
$\sigma$	molecuuldiameter	m
$\sigma$	oppervlaktespanning	N/m
$\sigma$	constante van Stefan-Boltzmann	W/m <sup>2</sup> K <sup>4</sup>
$\tau$	gemiddelde verblijftijd	s
$\tau_o$	zwichspanning (yield stress)	N/m <sup>2</sup>
$\tau_{xy}$	schuifspanning	N/m <sup>2</sup>

*subscripts*

<i>a</i>	omgeving (ambient)
A	component A
B	component B
buoy	opwaarts (buoyant)
<i>c</i>	waarde in centrum
<i>e</i>	energie
<i>fr</i>	wrijving (frictie)
<i>g</i>	zwaartekracht (gravity)
<i>h</i>	hydraulisch
<i>i</i>	grensvlak (interface)
<i>l</i>	vloeistof
<i>L</i>	positie L
<i>m</i>	gemeten
<i>m</i>	massa
mol	mol
<i>p</i>	impuls
<i>p</i>	deeltje (particle)
<i>q</i>	warmte
<i>r</i>	relatief
<i>s</i>	relatief (slip)
tot	totaal
<i>u</i>	inwendige energie
<i>v</i>	damp (vapour)
<i>V</i>	volume
w	wand
<i>x,y,z</i>	<i>x,y,z</i> -richting
X	component X
0	aanvang; ingang
0	natte bol
1, 2	op positie 1, 2
⊥	loodrecht op stromings- of bewegingsrichting
⟨⟩	middeling over ruimte
–	middeling over tijd
Bi	Biot-getal
Br	Brinkman-getal
Fo	Fourier-getal
Gr	Grashof-getal

Gz	Graetz-getal
Le	Lewis-getal
Nu	Nusselt-getal
Pe	Péclet-getal
Po	vermogenskental
Pr	Prandtl-getal
Re	Reynolds-getal
Sc	Schmidt-getal
Sh	Sherwood-getal

# Trefwoordenlijst

- absolute vochtigheid, 259  
 absorptie, 249  
 absorptiecoëfficiënt, 206  
 absorptiviteit, 206, 209  
 adhesie, 62  
 adiabatiese veradigingslijn, 259  
*adiabatische veradigingslijn*, 258  
 afkoelingswet van Newton, 158, 239  
 afkoelingswet van Newton, 142  
 afkoelingswet, Newton, 199  
 albedo, 206  
 algemene microbalans voor stoftransport, 237  
 appendages, 283  
 arbeid, 48  
 balansen, 2  
 balansmethode, 139  
 balansvergelijking, 4  
 barycentrisch, 216  
 batchreactor, 13  
 behoudswet, 4, 37, 48  
 behoudswet, 320  
 Bénard-cellen, 190  
**Bernoulli-vergelijking**, 51  
 Bernoulli-vergelijking, 114  
 Bernoulli-vergelijking, 264  
 bevochtigde omtrek, 273  
 bewegende moleculen, 75  
 Bingham-plastics, 313  
 Blasius, formule van, 276  
 bochtstuk, 63, 64  
 body force, 323  
 body forces, 58  
 Boltzmann, 88, 89, 204  
 Brinkman-getal, 178  
 Buckingham - II theorema, 103  
 buisreactor, 13  
**C-functie**, 21  
 chemische enthalpie, 35  
 chemische potentiaal, 249  
 Chilton en Colburn, 243  
 Chilton-Colburn-analogie, 282  
 coating, 111, 298, 301  
 cohesie, 62  
 componentbalans, 6  
 consistency, 309  
 continuïteitsvergelijking, 320  
 continuïteitsvergelijking, 325  
 Continuous Stirred Tank Reactor, 10  
 controlevolume, 3  
 convectie, 203  
 convectie, gedwongen, 179  
 convectie, vrij, 178, 179, 187  
 convectie, vrije, 246  
 convectief transport, 75, 179  
 cubic volume element method, 174, 237  
 cubic volume element methode, 318  
 cubic volume element methode, 319  
 cubic volume element methode, 321  
*cubic volume element methode*, 328  
 dampspanningslijn, 258  
 dauwpunt, 259  
 debiet, 3  
 debietmeter, 53  
 debietmeters, 264  
 diffusiecoëfficiënt, 80, 215  
*dilatante* vloeistof, 310  
 dimensie-analyse, 92, 99  
 dimensieloze kentallen, 92  
 dimensies, 99  
 dissipatie van mechanische energie, 41, 49  
 doorverwarming, 156, 158  
 driftflux, 231  
 driftflux, 233  
*driftstroom*, 232  
 drijvende kracht, 129  
**druk-energie**, 33  
 drukhoogte, 52  
 dynamische viscositeit, 80  
 eenzijdige diffusie, 233  
 eerste orde lineaire differentiaalvergelijking, 69  
 eerste-orde chemische reactie, 13  
 effectieve viscositeitscoëfficiënt, 310  
**E-functie**, 19  
*eindige-volumemethode*, 328  
 emissiecoëfficiënt, 204  
 energieconcentratie, 38, 327  
 energiedissipatie, 35, 114  
 energiedissipatie, 48  
 energiedissipatie, 269  
 energiedissipatie, 282  
 energiedissipatie, 330  
 energieproductie, 38  
 energiestromen, 37  
 energiestroom, 38  
 enthalpie, 33, 44  
 enthalpie, 35  
 Ergun-relatie, 291  
 errorfunctie, 227  
 errorfunctie, 149  
 evenwichtsdampspanning, 246, 258  
 evenwichtsgrensvlakconcentratie, 247  
 exotherme chemische reactie, 38  
 expansieventiel, 46, 47  
 extractie, 249  
 Fanning-drukvalvergelijking, 274  
 Fanning-frictiefactor, 273  
**F-functie**, 22  
 Fick, wet van, 215, 216  
 film contactor, 241  
*filmtheorie*, 182  
 filmtheorie, 240  
 filmtheorie, 281  
 flow index, 309  
*flux*, 79

- Fourier, 158  
Fourier, wet van, 215  
Fourier-getal, 160, 178, 180, 181, 227  
frictiefactor, 273  
frictiefactor, 282  
fysische technologie, 1  
geleiding, 203  
geleiding, 125  
Geleiding, 76  
gelijkstroom, 196  
gepakt bed, 288  
Graetz-getal, 178, 180, 193  
Grashof-getal, 178  
Grashof-getal, 187  
grenslaag, 62, 115, 118, 120, 182, 185, 188, 189, 235, 236  
grenslaagdikte, 185, 240  
*heliumconcentratie*, 222  
Henry, 247  
hydraulische diameter, 274, 280, 290  
hydraulische filmdikte, 182, 281  
ideaal geroerde tank, 10  
**ideale buisreactor**, 13  
Impuls, 77  
impulsconcentratie, 57, 320  
impulsflux, 96, 97, 98  
indringdiepte, 150, 227  
infrarood, 205, 206  
instationaire penetratietheorie, 168  
instationaire warmtegeleiding, 146  
instationaire wederzijdse diffusie, 226  
interactiekracht, 113  
inwendige energie, 33  
inwendige energie, 271  
irreversibele energie-omzetting  
Karman-wervelstraat, 119  
kinematische viscositeit, 81  
kinetische energie, 33  
kinetische gastheorie, 86  
koelmiddel, 46, 47  
Kolmogorov-wervels, 330  
*krachtenbalans*, 58, 293, 302  
krachtenbalans, 120  
krachtenbalans, 305  
kruipstroming, 116  
ladingsgewijs, 13  
**Ladingsgewijs bedreven chemische reactor**, 13  
laminaire, 77, 96  
laminaire pijpstroming, 180, 240  
laminaire pijpstroming, 276  
laminaire stroming, 293  
Lewis-getal, 244  
Lewis-getal, 93  
Lewis-getal, 258  
lift, 113  
logaritmisch gemiddelde temperatuurverschil, 199  
long term heating, 229  
machtswet, 309  
macrobalansen, 2  
massabalans, 6  
massafracties, 10  
massastroom, 38  
mechanische energie, 35  
meesleepkracht, 114  
meetschijf, 268  
microbalans, 2, 237  
microbalans, 171  
microbalans, 319  
microbalansen, 320  
molaire massa van helium, 223  
moleculair impulstransport, 264  
moleculair transport, 75  
moleculair transport, 75  
moleculair transport, 215  
moleculair warmtetransport, 76  
moleculaire diffusie, 76  
natte-boltemperatuur, 258  
natte-wandkolom, 241  
Navier-Stokes-vergelijkingen, 320  
Newton, wet van, 264  
Newton's afkoelingswet, 142, 158  
Newtonse vloeistoffen, 80, 264  
niet-Newton's gedrag, 309  
niet-Newtonse vloeistoffen, 264, 309  
numerieke diffusie, 193  
*Nusselt-getal*, 142  
opaak, 206, 209  
oplosbaarheid, 244  
oplosbaarheid, 223  
oplosbaarheid, 246  
oppervlaktespanning, 62  
opwaartse kracht, 179  
Ostwald-De Waele model, 309  
overall warmteoverdrachtscoëfficiënt, 143  
overloop, 264  
Péclet-getal, 93  
penetratiediepte, 227  
penetratiediepte, 150  
penetratietheorie, 146, 150, 226, 227  
**pijpstroming**, 179  
pitotbuis, 53  
Poiseuille-stroming, 308  
porositeit, 289  
potentiële energie, 33  
Power Law, 309  
*Prandtl-getal*, 93, 178  
pressure head, 52  
propstroom, 13, 20, 314  
pseudoplastisch, 310  
reactiesnelheidsconstante, 13  
recirculatieverhouding, 17  
reflectiecoëfficiënt, 206  
relatieve ruwheid, 277  
relatieve vochtigheid, 259  
relatieve vochtigheid, 259  
reologie, 309  
reversibel, 49  
Reynolds-getal, 178, 189, 192, 194, 240, 243, 246, 258, 271, 274, 280, 285, 287, 290, 292, 329  
Reynolds-getal, 96  
Reynolds-getal), 183  
roosterpunten, 329  
rotameter, 269  
schijnbare viscositeitscoëfficiënt, 310  
Schmidt-getal, 93  
schuifafsluiter, 284, 286  
schuifspanning, 288  
schuifspanning, 272  
schuifspanningsprofiel, 294  
*Sherwood-getal*, 225

- Sieder&Tate-correctie, 187  
snelheidshoogte, 52  
snelheidsprofiel, 294  
stagnatiedruk, 52, 53, 56, 114  
stationair, 9  
stationaire temperatuurverdeling, 136  
stationaire warmtegeleiding, 125  
stationaire wederzijdse diffusie, 218, 219, 221  
*Stefan*, 216, 233, 234, 237  
Stefan, wet van, 233  
Stefan's correctiefactor, 234  
Stefan-Boltzmann, constante van, 204  
stofoverdracht bij gedwongen convectie, 240  
stofoverdracht bij vrije convectie, 245  
stofoverdrachtscoëfficiënt, 225  
stofoverdrachtscoëfficiënten bij convectie, 239  
stripping, 249  
stromingsleer, 261  
stroommeters, 264  
stuwdruk, 52  
stuwdruk, 114  
stuwpunt, 52, 114  
superficiële snelheid, 289  
tanks in serie, 28  
technische stromingsleer, 264  
temperatuurcontouren, 139  
thermische energie, 33, 271  
thermische filmdikte, 182  
thermische-energiebalans, 263  
totale stofoverdrachtscoëfficiënt, 252  
totale stofoverdrachtscoëfficiënt, 225, 239  
totale-energiebalans, 33, 38  
totale-massabalans, 6  
traagheid, 68, 97, 98, 109, 110, 114, 118, 265  
transmissiecoëfficiënt, 206, 208  
transparant, 206, 209  
turbulent, 97, 176, 179, 291, 329  
turbulente pijpstroming, 181, 240, 276  
uitstroomcoëfficiënt, 68  
uitzettingscoëfficiënt, 33, 177, 191  
upwind, 193  
velocity head, 52  
Venturibuis, 53  
verblijftijdspreiding, 19  
verdampingsenthalpie, 45  
verdampingsenthalpie, 257  
verdelingscoëfficiënt, 250  
vermogenskental, 109  
verschuivingswet van Wien, 205  
visco-elastische vloeistoffen, 315  
viscosity group, 178  
viscosity group, 187  
volumedebiet, 8  
vormweerstand, 282  
vormweerstand, 114, 115  
vrije convectie, 246  
vrije weglengte, 86, 87, 88, 89, 328  
*wandruwheid*, 277  
warmte-extractiefactor, 199  
warmtegeleidingscoëfficiënt, 80  
warmteoverdrachtscoëfficiënt, 142  
warmtetransport bij vrije convectie, 187  
warmtevereffeningscoëfficiënt, 147  
warmtevereffeningscoëfficiënt, 81  
warmtewisselaars, 194  
wederzijdse diffusie, 218  
weerstand, 2  
weerstandcoëfficiënt, 117  
weerstandsgetal, 284  
wervels, 97, 329  
*wet van Fick*, 80, 215, 234  
*wet van Fick*, 216  
*wet van Fourier*, 80, 125, 215  
*wet van Hagen-Poiseuille*, 308  
*Wet van Kirchhoff*, 206  
*wet van Newton*, 80  
*wet van Newton*, 293  
*wet van Ohm*, 129  
*wet van Stefan*, 234  
*wet van Stefan*, 233  
*wet van Stefan-Boltzmann*, 204  
Winkelman-experiment, 231  
wrijving, 35, 281  
wrijving, 272  
wrijving, 283  
wrijvingskracht, 283  
wrijvingskracht, 288  
wrijvingsweerstand, 115, 281  
yield stress, 313  
zichtfactor, 212  
zwaartekracht, 61  
zwichtspanning, 204  
zwichtspanning, 313

# Fysische Transportverschijnselen - Denken in Balansen

Harrie van den Akker & Robert F. Mudde

Synopsis: De transport- en overdrachtsprocessen van warmte, massa en impuls worden naar hun analogie behandeld. De processen worden beschreven met behulp van macro- en microbalansen die in veel gevallen leiden tot differentiaalvergelijkingen. Ook veel aspecten van stromingsleer komen op deze manier aan de orde en zo bereidt het boek ook voor op moderne Computational Fluid Dynamics technieken. Het doel van het boek is ook studenten te trainen in het oplossen van problemen waarbij transportverschijnselen centraal staan. Daartoe bevat het boek bijna 100 uitgewerkte vraagstukken.



**Harrie van den Akker**  
TU Delft | Applied Physics

*Biography: Harrie van den Akker studeerde als fysisch technoloog af bij de TU Eindhoven. Sinds 1988 heeft hij het vak Fysische Transportverschijnselen gedoceerd binnen meerdere opleidingen van de TU Delft en was hij meerdere keren 'teacher of the year'. Zijn onderzoek omvatte stromingen en transportverschijnselen in allerlei, vooral turbulente, één- en meefasen-stromingen. Harrie van den Akker won de Delftse Leermeesterprijs 2011 en was in 2021 Visiting Professor for Distinguished Teaching aan Princeton University. Sinds 2013, is hij hoogleraar stromingsleer aan de Universiteit van Limerick.*



**Robert F. Mudde**  
TU Delft | Applied Physics

*Biography: Robert F. Mudde studeerde natuurkunde in Leiden. Sinds 1988 heeft hij het vak Fysische Transportverschijnselen gedoceerd binnen meerdere opleidingen van de TU Delft en was hij meerdere keren 'teacher of the year'. Zijn focus lag op meefasenstromingen. Hij stond aan de wieg van twee MOOCs over Transportverschijnselen die door tienduizenden over de hele wereld zijn gevolgd. In 2016 werd hij benoemd tot Distinguished Professor in Science Education van de TU Delft. Momenteel is hij Vice President Education / Vice Rector Magnificus van de TU Delft.*



© 2023 TU Delft Open  
ISBN 978-94-6366-683-1  
DOI: <https://doi.org/10.5074/t.2023.002>

[textbooks.open.tudelft.nl](https://textbooks.open.tudelft.nl)

Cover image by Hugo Hartmann,  
snapshot CFD simulatie is licensed  
under CC0