Grasduinen in waterbouw

Tjerk Zitman

TU Delft OPEN Publishing

GRASDUINEN in WATERBOUW

Tjerk Zitman

2025

Colophon

Grasduinen in waterbouw

Author:
Tjerk Zitman, Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Department of Hydraulic Engineering, t.j.zitman@tudelft.nl, https://orcid.org/0009-0009-3021-891X

Keywords:
civiele techniek, stromingen, golven, sedimenttransport, morfologie, waterbouwkundige constructies.

Published by:
TU Delft OPEN Publishing | Delft University of Technology, The Netherlands

DOI: https://doi.org/10.59490/mt.234
ISBN paperback/softback: 978-94-6384-852-7
ISBN eBook/PDF: 978-94-6518-151-6

Copyright statement:



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) licence unless otherwise stated. ©2025 published by TU Delft OPEN Publishing on behalf of the author.

Electronic version of this book is available at:
https://books.open.tudelft.nl

Copyright clearance made by the TU Delft Library copyright team.

Disclaimer:
Every attempt has been made to ensure the correct source of images and other potentially copyrighted material was ascertained, and that all materials included in this book have been attributed and used according to their license. If you believe that a portion of the material infringes someone else's copyright, please contact t.j.zitman@tudelft.nl

Voorwoord

Waterbouw is één van de visitekaartjes van Nederland. Eigenlijk heet het waterbouwkunde, maar dat is zo'n mond vol dat 'kunde' door vrijwel iedereen gemakshalve wordt weggelaten. Dat is begrijpelijk, maar ook jammer in de zin dat daardoor dreigt te worden vergeten dat het inderdaad om een kunde gaat. En ook om kunst. En zeker ook om wetenschap. Waterbouwkunde is een levend vak dat steeds wordt verrijkt met nieuwe inzichten en groeit met nieuwe technieken.

Dit boek is bedoeld als een eerste kennismaking met het vakgebied waterbouwkunde, zonder de pretentie volledig te zijn. Het is gemotiveerd vanuit de ervaring van de auteur dat het heerlijk is om in het vakgebied te grasduinen. Dat is een bezigheid die in het Groot Woordenboek der Nederlandse Taal (Geerts and Heestermans, 1992) wordt omschreven als 'naar hartenlust toetasten' of 'voor liefhebberij studeren'. En zo is het ook tot stand gekomen. Er is gegrasduind in enkele fundamentele aspecten van het vakgebied met verwijzingen naar de huidige praktijk en hier en daar de historie. De nadruk ligt op fysische processen en de mathematische beschrijving daarvan. Daarnaast is er aandacht voor het schetsmatig ontwerpen van enkele waterbouwkundige constructies.

Een eerste aanzet tot dit boek kwam enkele jaren geleden voort uit de behoefte om de positie van het vak waterbouwkunde in de bachelor opleiding Civiele Techniek die door de TU Delft wordt aangeboden, te versterken en studenten in de context van die opleiding beter in dit onderwerp te introduceren. Voor een deel is de keuze van onderwerpen die in dit boek aan de orde komen, gebaseerd op de inhoud van dat vak zoals het er in de jaren nul van deze eeuw uitzag. In die zin zijn de docenten van toen een bron van inspiratie geweest. Minstens zo inspirerend waren de reacties van studenten die dit vak destijds hebben gevolgd. Hun getoonde behoefte aan technisch–wetenschappelijke achtergrond bij het vakgebied heeft in de samenstelling van dit boek een rol van betekenis gespeeld.

Inherent aan grasduinen is dat je soms afdwaalt. En ook dat zit in dit boek, in diverse voetnoten en in een toegift waarin enkele thema's worden belicht die slechts zijdelings zijn gerelateerd aan waterbouwkunde en daar wat verder vanaf staan dan wat in de appendices aan bod komt. Die toegift is voor de liefhebbers.

Inhoudsopgave

1 Inleiding **8**
1.1 Over waterbouwkunde 8
1.2 Denken en werken met modellen 9

2 Stationaire stroming **13**
2.1 Inleiding 13
2.2 Behoud van massa 16
2.3 Behoud van energie 19
2.4 Behoud van impuls 21
Inleiding 21
Dieptegemiddelde stroming 22
Wandwrijving 25
Iets over instationaire stroming 30

3 Toepassingen van stationaire stroming **32**
3.1 Inleiding 32
3.2 Stroming in open waterlopen 33
3.2.1 Verhanglijnen 33
Inleiding 33
Principe van een verhanglijn 34
Benadering van de verhanglijn 37
Minimale waterdiepte 39
3.2.2 Netwerken van open waterlopen 42
Het principe van stromingsberekeningen voor netwerken . . 42
Overlaten, onderspuiers en andere obstakels 46
3.3 Stroming in gesloten leidingen 49
3.3.1 Berekening van de stroming 49
3.3.2 Invloed van wandwrijving 52
3.3.3 Verliezen bij verwijding en vernauwing 54
Verwijding 55
Vernauwing 58
3.4 Waterbeweging rond een varend schip 59
3.4.1 Theoretische beschouwing 59

3.4.2 Diagram van Schijf . . . 66
3.5 Grondwaterstroming . . . 68
3.5.1 Wet van Darcy . . . 68
3.5.2 Volkomen spanningswater . . . 70
3.5.3 Freatisch water . . . 74
3.5.4 Onvolkomen spanningswater . . . 77
3.5.5 Bronbemaling bij bouwkuipen . . . 81
3.6 Circulaties in een verticaal vlak . . . 83
3.6.1 Inleiding . . . 83
3.6.2 Windopzet . . . 85
Inleiding . . . 85
Verticale circulatie . . . 85
Verloop van de waterstand . . . 89
3.6.3 Bochtstroming . . . 94

4 Golven **98**
4.1 Inleiding . . . 98
4.2 Lineaire golftheorie . . . 99
4.3 Golflengte en -periode . . . 100
4.4 Orbitaalbeweging . . . 103
4.5 Golfvoortplanting . . . 107
4.5.1 Golfenergie . . . 107
Hoeveelheid energie . . . 108
Transport van energie . . . 109
4.5.2 *Shoaling* en refractie . . . 112
Shoaling . . . 113
Refractie . . . 114
4.5.3 Diffractie . . . 119
4.5.4 Overdracht van impuls . . . 124
Effect van *shoaling* op golfspanning . . . 126
Effect van breking op golfspanning . . . 129
4.6 Natuurlijk golfveld . . . 129
4.7 Breking . . . 134

5 Planetaire effecten op waterbeweging **137**
5.1 Inleiding . . . 137
5.2 Coriolis . . . 138
5.2.1 Principe van het Coriolis effect . . . 138
5.2.2 Fictieve krachten . . . 140
5.2.3 Coriolis effect in stromingsberekeningen . . . 144
5.3 Astronomische getijden . . . 146
5.3.1 Inleiding . . . 146
5.3.2 Principe van het getij . . . 148
5.3.3 Evenwichtsgetij . . . 153
5.3.4 Primaire harmonische componenten . . . 159
5.3.5 Dagelijkse ongelijkheid . . . 161

5.3.6 Elliptische en andere getijden . . . 166
5.3.7 Getijvoortplanting . . . 168
5.3.8 Getij-analyse . . . 174

6 Sedimenttransport en morfologie 179
6.1 Inleiding . . . 179
6.2 Transport bij stroming . . . 180
Gradering . . . 182
Grens tussen wel en geen transport . . . 184
Effect van een bodemhelling . . . 185
6.3 Riviermorfologie . . . 186
6.3.1 Inleiding . . . 186
6.3.2 Bulk sedimenttransport . . . 187
6.3.3 Lange–termijn respons op ingrepen . . . 189
Aanpassing van de dwarsdoorsnede . . . 192
Aanpassing van de lengte . . . 194
Lokale, permanente onttrekking . . . 196
6.3.4 Dwarstransport in een bocht . . . 198
6.4 Kustmorfologie . . . 203
6.4.1 Inleiding . . . 203
6.4.2 Golf-geïnduceerd transport . . . 204
Inleiding . . . 204
Dwarstransport . . . 205
Langstransport . . . 206
6.4.3 Morfologische ontwikkeling . . . 208
Dwarsprofiel . . . 208
Langsprofiel . . . 211

7 Dijken, golfbrekers, strandhoofden en bodembescherming 220
7.1 Inleiding . . . 220
7.2 Dijken . . . 221
7.2.1 Inleiding . . . 221
7.2.2 Golfoploop . . . 222
7.2.3 Effect van een berm . . . 225
7.2.4 Ruwheid van het talud . . . 227
7.2.5 Hoek van golfinval . . . 229
7.2.6 Kruinhoogte van een dijk . . . 229
7.2.7 Golfoverslag . . . 231
7.3 Golfbrekers . . . 232
7.3.1 Inleiding . . . 232
7.3.2 Stortstenen golfbreker . . . 234
7.4 Bescherming tegen kusterosie . . . 238
7.4.1 Inleiding . . . 238
7.4.2 Strandhoofden . . . 239
7.4.3 Kust–parallelle golfbrekers . . . 245
7.5 Bodem en oeverbescherming . . . 246

Sedimentatie 247
Erosie 247

8 Stabiliteit van constructies met een waterkerende functie 252
8.1 Inleiding 252
8.2 Faalmechanismen 254
8.2.1 Inleiding 254
8.2.2 Evenwicht 256
8.2.3 Kantelen en bezwijken van het korrelskelet 258
8.2.4 Afschuiven 258
8.2.5 Opdrijven 260
8.2.6 Onderloopsheid 261
8.3 Korrelspanning onder de constructie 267
8.3.1 Berekening van de korrelspanning 267
8.4 Hydraulische belastingen 269
8.4.1 Inleiding 269
8.4.2 Horizontale en neerwaartse belastingen bij een gesloten constructie 269
8.4.3 Horizontale belastingen bij een doorlatende constructie . . . 272
8.4.4 Opwaartse belastingen 276
8.5 Kantelen 284
8.5.1 Controle op kantelen 284
8.5.2 Kantelen en bezwijken bij een op staal gefundeerde constructie 287
8.6 Bijzondere omstandigheden 291
8.6.1 Gelaagde ondergrond 291
8.6.2 Constructies deels in de grond 292
Waterdruk 292
Gronddruk 294
8.6.3 Oever- en bodembescherming rond de constructie 297

9 Veiligheid tegen overstromen 299
9.1 Inleiding 299
9.2 Iets over probabilistisch ontwerpen 300
9.2.1 Een voorbeeld 303
9.2.2 Complexe constructies 306
9.3 Economische optimalisatie 309
9.3.1 Overwegingen 309
9.3.2 Principe van optimalisatie 311
9.3.3 Effecten van trends 315

10 Water en energie 317
10.1 Inleiding 317
10.2 Pompen en gemalen 319
10.2.1 Inleiding 319
10.2.2 Pompen 320

10.2.3 Toepassing . . . 322
10.3 Waterkracht . . . 324
10.3.1 Inleiding . . . 324
10.3.2 Stuwmeer . . . 325
10.3.3 Getijdencentrale . . . 329
10.3.4 Energie uit windgolven . . . 337

Appendices **339**

A Tijdreeksanalyse **340**
A.1 Inleiding . . . 340
A.2 Iets over Gaussische processen . . . 341
A.3 Fourieranalyse . . . 346
A.3.1 Inleiding . . . 346
A.3.2 De Fourierreeks . . . 346
A.3.3 Schatting van amplitudes . . . 350
A.3.4 Variantiedichtheidsspectum . . . 352
A.4 Extreme waarden . . . 355
A.4.1 Inleiding . . . 355
A.4.2 Statistiek van extremen . . . 355
Peak over Threshold en Weibull . . . 356
Periodic Extreme Value en Gumbel . . . 360
A.4.3 Herhalingstijd . . . 361
A.4.4 Toepassing . . . 365
A.4.5 Iets over instationaire processen . . . 368
A.5 Deterministische processen . . . 369

B Maximum Likelihood **373**

C Impulsbalans voor een vertikaal vlak **377**

D Excentriciteit en korrelspanning **386**

E Golfvergelijking **389**

F Translatiegolven **393**

G Berekening van verhanglijnen **397**

H Iteratieve oplossing van de dispersierelatie **401**

Toegift **404**

I Wortels van een derde graads vergelijking **405**

J Tekenen en projecteren **409**
J.1 Inleiding 409
J.2 Parallelle projectie 410
J.3 Perspectief 418

K Slinger van Foucault **423**

Bibliografie **432**

1

Inleiding

1.1 Over waterbouwkunde

Waterbouwkunde wordt vrij algemeen gezien als een onderdeel van de Civiele Techniek. Het is een toegepaste wetenschap die zich richt op de realisatie en instandhouding van allerlei vormen van infrastructuur die met water te maken hebben. En anders dan vaak wordt verondersteld, is infrastructuur in dit vakgebied niet beperkt tot harde objecten zoals dijken, sluizen en dammen. In de afgelopen decennia heeft zachte infrastructuur significant terrein gewonnen.

Een voorbeeld van zachte infrastructuur is de Zandmotor. Een van de redenen om die aan te leggen was versterking va het kustvak tussen Hoek van Holland en Scheveningen ten behoeve van de veiligheid tegen overstromen van het achterliggende deel van de Randstad. Deze Zandmotor is infrastructuur omdat het gaat om een gebouwd object dat een algemeen maatschappelijk doel dient. En het is zacht omdat het kan meebewegen met natuurlijke processen zonder acuut verlies aan functionaliteit.

Het project “Ruimte voor de rivier”dat in de tweede helft van de jaren 90 van de vorige eeuw is geïnitieerd als reactie op twee bijna–overstromingen in het Nederlandse rivierengebied, staat bol van zachte waterbouwkundige infrastructuur. In weerwil van kosten is daar indertijd bewust voor gekozen. Verbetering van de veiligheid tegen overstromen met klassieke verzwaring van rivierdijken was in primair functionele zin een effectieve optie, met in de bijsluiter een onaanvaardbaar geachte interventie in het natuurlijke systeem waar de rivier deel vanuit maakt.

Een goed ontworpen dijk biedt gewenste veiligheid tegen overstromen maar is tegelijkertijd een majeure obstructie in dat natuurlijke systeem. Met zachte infrastructuur is het mogelijk om dezelfde veiligheid tegen overstromen te waarborgen met een substantieel geringere nadelige invloed op de natuur. In bredere zin gaat dit om duurzaamheid.

Waterbouwkundige infrastructuur, los van de vraag of die hard is of zacht, is

vrijwel zonder uitzondering onderdeel van een grootschalig infrastructureel complex en ook een interventie in een natuurlijk en/of sociaal–economisch systeem. Daarom heeft waterbouwkunde sterke relaties met uiteenlopende vakgebieden, zoals ecologie, fysische geografie, geotechniek, hydrologie, maritieme techniek, milieukunde, oceanografie en zo meer. In die zin is waterbouwkunde inherent multi–disciplinair.

Wie zich beroepsmatig met waterbouwkunde bezighoudt, is met recht een ingenieur. Volgens het Groot Woordenboek der Nederlandse Taal (Geerts and Heestermans, 1992) is die beroepsnaam afgeleid van het Latijnse *ingenium*, wat verwijst naar 'uitvinding' of 'talent' (*in genum*). Bovendien verwijst het naar vernuft en dat is volgens hetzelfde woordenboek het 'vermogen om iets ingewikkelds uit te denken, te ontwerpen of te doorgronden'.

Dat is juist het oogmerk van dit boek, met een focus op het doorgronden van natuurlijke processen en mechanismen ten behoeve van verantwoord ontwerp van waterbouwkundige infrastructuur. Lang niet alle natuurlijke processen en mechanismen die voor waterbouwkunde relevant zijn, komen aan bod. Ook het ontwerpen van infrastructuur betreft een selectie van objecten en ingrepen en het blijft bij een eerste aanzet. Zoals de titel aangeeft, is dit boek het resultaat van grasduinen in het vakgebied. Daarbij bedienen we ons doorlopend van met name wiskundige modellen.

1.2 Denken en werken met modellen

Een introductie in de waterbouwkunde beginnen met een verhandeling over denken en werken met modellen is minder vreemd dan het wellicht op het eerste gezicht lijkt. Bij waterbouwkunde staat, net als bij alle andere deelgebieden van de civiele techniek en ook andere vakgebieden, het bouwen aan een toekomstbestendige leefomgeving centraal. Daarbij gaat het steevast om het interveniëren in bestaande systemen om daarmee een verbetering te realiseren. Kennis van en inzicht in het desbetreffende systeem is van cruciaal belang voor het ontwerp en de implementatie van zowel effectieve als verantwoorde interventies.

Een klassiek voorbeeld is de stormvloedkering in de Oosterschelde. De Deltacommissie[1], die na de watersnoodramp van 1953 in het leven is geroepen en de opdracht had met een plan te komen om herhaling van zo'n ramp te voorkomen, had aanvankelijk voorgesteld om de Oosterschelde met een volledig dichte dam van de Noordzee te scheiden. Voor het verbeteren van de veiligheid tegen overstromen is dat zeker effectief. Zo'n dam is echter ook een majeure interventie in een uitgestrekt natuurlijk systeem en heeft invloed op alle biotische en abiotische processen die zich daarin afspelen.

[1] Deze commissie is in 1953 ingesteld, kort na de ramp. Inmiddels wordt deze commissie vaak de Eerste Deltacommissie genoemd omdat in 2007 een Tweede Deltacommissie aan het werk is gegaan met een soort vervolgopdracht, gericht op het ontwikkelen van maatregelen waarmee de veiligheid tegen overstromen gewaarborgd kan blijven in relatie tot de maatschappelijke en infrastructurele veranderingen die zich sinds 1953 hebben voorgedaan.

Door de afsluiting zou de Oosterschelde veranderen van een estuarium, gekenmerkt door een wezenlijke invloed van het getij, in een meer zonder getij. Vanwege dat vooruitzicht was er veel maatschappelijke weerstand tegen de voorgenomen afsluiting, met name vanuit visserij en milieubeweging. Uiteindelijk heeft dat geleid tot een nieuw concept in de realisatie van veiligheid tegen overstromen, namelijk een afsluiting die er alleen is als je die nodig hebt.

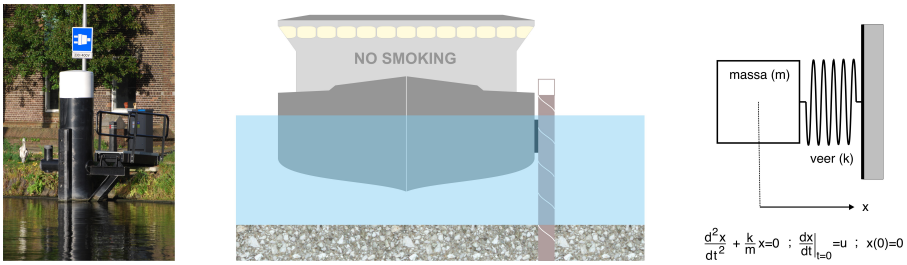
Voor het ontwerp van de Oosterscheldekering was inzicht in dat uitgestrekte natuurlijke systeem dat het estuarium en aangrenzend zeegebied omvat, essentieel. De vraag is echter of inzicht in alle details van dat systeem noodzakelijk is en, minstens zo belangrijk, of het eigenlijk wel mogelijk is om inzicht in alle details te verwerven. In het algemeen past op beide vragen een ontkennend antwoord. Inzicht in alle details is doorgaans niet haalbaar en ook niet altijd nodig om tot een effectief en verantwoord ontwerp van een interventie te komen.

En dit is waar modellen om de hoek komen kijken. Een model is niet de werkelijkheid, maar bevat aspecten daarvan die relevant worden verondersteld voor een specifiek doel, inclusief hun onderlinge verbanden. Battjes et al. (1999) omschrijven een model als een geschematiseerde representatie van een deel van de werkelijkheid voor een bepaald doel. Bij het ontwerp van de Oosterscheldekering is volop gebruik gemaakt van modellen, met name schaalmodellen waarin bijvoorbeeld het effect van de kering op de waterbeweging in de Oosterschelde is nagebootst. Dit modelonderzoek heeft in belangrijke mate bijgedragen aan een ontwerp waarin de veiligheid tegen overstromen, de nadelige effecten op milieu en de technische en economische haalbaarheid met elkaar in balans zijn gebracht.

Toentertijd waren de modelstudies ten behoeve van het ontwerp van de Oosterscheldekering het neusje van zalm waar het gaat om wat technisch–wetenschappelijk mogelijk was. Uit die studies is onder meer naar voren gekomen dat realisatie van de kering gepaard zou gaan met een reductie van de getijbeweging in het Oosterschelde estuarium. De lange–termijn consequenties daarvan zijn in die tijd misschien wel gesignaleerd, maar hebben pas na verloop van tijd aan aandacht gewonnen.

Een van die consequenties betreft de relatie tussen de getijbeweging enerzijds en de morfologie van platen en geulen in het estuarium anderzijds. De afname van de getijbeweging heeft geleid tot erosie van zandplaten, verondieping van geulen en een netto transport van sediment vanuit zee naar het estuarium. Dit laatste staat tegenwoordig bekend als de zandhonger van de Oosterschelde. Vergaand inzicht in het achterliggende fysisch proces is pas na de aanleg van de kering verworven. Uit de modelstudies is die morfologische respons niet naar voren gekomen om de simpele reden dat de betreffende fysica niet in de modellen was begrepen.

De moraal van dit verhaal is dat modellen in de waterbouwkundige praktijk een onmisbaar instrument zijn voor het verwerven van inzicht in fysische processen en voor ontwerp en implementatie van verantwoorde interventies in bestaande systemen. Daarbij moeten we ons echter altijd realiseren dat modellen slechts een afspiegeling zijn van een deel van de werkelijkheid. Modeluitkomsten moeten in



Figuur 1.1: Drie modellen van een schip dat aanmeert bij een meerpaal (foto links): een schets van schip en meerpaal (midden), een schematisatie tot een massa-veersysteem (rechts) en de bijbehorende wiskundige uitbeelding daarvan (rechtsonder).

die context worden geïnterpreteerd en ingezet. En precies dat is de kunst.

Met deze moraal in het achterhoofd, maken we in dit boek volop gebruik van (met name wiskundige) modellen. Dat wordt lang niet overal expliciet vermeld en in veel gevallen gaat het om kleinschalige modelvorming waarin een betrekkelijk klein onderdeel van de complexe realiteit wordt uitgelicht. In het volgende hoofdstuk 2 over stationaire stroming, bijvoorbeeld, creëren we onderdelen waarmee wiskundige modellen kunnen worden samengesteld om stroming te beschrijven. Afhankelijk van de beoogde toepassing, kunnen we die samenstelling variëren. Dat komt in het hoofdstuk daarna aan bod (hoofdstuk 3 over toepassingen).

Een voorbeeld van een model dat misschien wat eenvoudiger is dan de modellen die in dit boek worden gepresenteerd, gaat over een schip dat aanmeert bij een meerpaal. Een foto van zo'n paal (in de Delftsche Vliet, tegenover de Kolenhaven) is gegeven in figuur 1.1. Een schip staat daar niet bij, maar een schets van de combinatie van schip en meerpaal staat ook in figuur 1.1 (in het midden). Die schets kun je een model noemen.

Helemaal rechts in figuur 1.1 is die combinatie geschematiseerd tot een massa-veersysteem, waarbij de massa het schip voorstelt en de meerpaal is geschematiseerd tot een veer. Ook dat is een model, maar dient een ander doel dan de schets in het midden van de figuur. Die schets geeft een kwalitatief beeld van de twee objecten waar het om gaat (schip en meerpaal). Het massa-veersysteem daarentegen, is een schematisatie van het mechanisme dat zich bij aanmeren voordoet.

Kwantitatief inzicht in dat mechanisme kan worden verkregen met het wiskundige model (ook vermeld in figuur 1.1). Dat model is in dit geval een tweede orde differentiaalvergelijking waarin x de positie van de massa (het schip) aangeeft, t is de tijd, m de massa van het schip en u is de snelheid in de richting van de meerpaal waarmee het schip op $t = 0$ tegen de meerpaal aankomt. De meerpaal hebben we in dit model geschematiseerd tot een lineaire veer met veerconstante k.

Dit wiskundig model is een tamelijk vergaande schematisatie van de werkelijkheid, onder meer omdat er geen demping in het systeem zit, de meerpaal loodrecht op de as van het schip wordt aangevaren et cetera. Bovendien gaat het wiskundige

model niet meer op als $t > \pi\sqrt{m/k}$. Het schip is dan door de veer teruggeduwd en heeft het contact met de meerpaal verloren.

2

Stationaire stroming

2.1 Inleiding

Als we in de waterbouwkunde over stroming spreken, gaat dat steevast over water, tenzij nadrukkelijk anders vermeld. Kwantitatief inzicht in stromingen ligt aan de basis van het ontwerp van veel waterbouwkundige constructies en waterbouwkundige ingrepen in (natuurlijke) systemen. Daarbij gaat het om belastingen op constructies die worden veroorzaakt door stilstaand of stromend water, maar ook om de invloed van een waterbouwkundige ingreep op stroming. Sommige constructies zijn erop gericht om stroming te beïnvloeden (zoals een stuw in een rivier). Maar er zijn ook constructies die, ook al heeft het niet met hun primaire functionaliteit van doen, wel blootstaan aan belastingen die gerelateerd zijn aan stroming (zoals de pijlers van een brug over een rivier). Bovendien maakt stroming deel uit van diverse fysische processen die in de waterbouwkundige praktijk een rol spelen, zoals transport van sediment en morfologie.

Voor de kwantitatieve beschrijving van stroming, maken we gebruik van behoudswetten voor massa, energie (de eerste wet van de thermodynamica) en impuls (de tweede wet van Newton). Omdat impuls een vector is, geldt de wet van behoud van impuls in een specifieke richting. Bij de beschrijving van stroming passen we deze wet toe in de drie richtingen die de 3D ruimte opspannen.

Afhankelijk van de toepassing volstaat de wet van behoud van massa in combinatie met één van de beide andere wetten om tot een adequate beschrijving van stroming te komen. Dat is bijvoorbeeld het geval als we geïnteresseerd zijn in stroomsnelheid en waterstand, beide afhankelijk van plaats en tijd.

In dit hoofdstuk werken we deze drie behoudswetten uit voor toepassing in de waterbouwkunde (toepassingen zelf komen in het volgende hoofdstuk aan bod). Daarbij gaan we primair uit van stationaire stroming. Bovendien veronderstellen we dat altijd sprake is van een hydrostatische druk in het water en dat de dichtheid van water constant is. Op beide veronderstelling gaan we kort in.

Hydrostatische druk
De veronderstelling van een hydrostatische druk houdt in dat we aannemen dat het verticale verloop van de druk in een waterkolom bij stromend water gelijk is aan dat bij stilstaand water. In combinatie met de aanname dat de dichtheid van water constant is, komt dit erop neer dat de druk in de waterkolom lineair toeneemt met de afstand tot het vrije oppervlak. Voor langzaam variërende stroming, zowel in de tijd als in ruimtelijke zin, is dat een redelijke aanname. In de beschrijving van onder andere stroming in rivieren en het getij wordt deze benadering veelvuldig toegepast. Karakteristiek voor zulke stroming is dat stroomlijnen niet sterk gekromd zijn. Als dat wel het geval is, zoals bij stroming over een scherpe overlaat, gaat de veronderstelling niet op.

Bij stroming in gesloten leidingen, waar geen sprake is van een vrij oppervlak, is het ook redelijk om uit te gaan van een hydrostatische drukverdeling. Bij een constante dichtheid neemt de druk in verticale richting toe met de afstand tot het piëzometrisch niveau (ofte wel de stijghoogte: het niveau tot waar het water zou stijgen als het niet door de bovenkant van de leiding zou worden tegengehouden).

Constante dichtheid
In waterbouwkundige toepassingen wordt de dichtheid van water voornamelijk bepaald door het gehalte aan opgeloste, gesuspendeerde en meegevoerde stoffen. Zo is de dichtheid van zeewater, vanwege de daarin opgeloste zouten, circa 2,5% hoger dan die van zoet water in rivieren. Een van de effecten daarvan is dat rond de monding van een rivier in zee een pluim van zoet water aanwezig is die drijft op en afstroomt over het zoute zeewater. Kennis van en inzicht in de stromingen die dat met zich meebrengt, zijn bijvoorbeeld van belang bij het bestuderen van kustmorfologische processen.

In estuaria en het benedenstroomse deel van rivieren waarin het getij vanuit zee doordringt, spelen zulke dichtheidsverschillen een wezenlijke rol in de stroming en het daaraan gerelateerde transport van sediment en andere meegevoerde stoffen.

Naast opgeloste stof zijn ook de temperatuur en het gehalte aan gesuspendeerd materiaal (ook wel zwevend stof genoemd) van invloed op de dichtheid. Een voorbeeld van zwevend stof is fijn slib dat al bij matige turbulentie makkelijk vanaf de bodem in de waterkolom wordt opgenomen en daar lang blijft omdat het relatief langzaam bezinkt.

Door een constante dichtheid te veronderstellen, laten we de invloed van variaties (in ruimte en tijd) van temperatuur en gehalte aan opgeloste en gesuspendeerde stoffen op de stroming, buiten beschouwing. Daarmee is niet gezegd dat die invloeden in de waterbouwkunde een ondergeschikte rol spelen. Voor een introductie in dit vakgebied, waar dit boek voor is bedoeld, volstaan we met de vermelding van het bestaan van zulke effecten.

Tot slot merken we op dat in vrijwel alle waterbouwkundige toepassingen, water onsamendrukbaar wordt verondersteld. Dat wil zeggen dat de druk in het wa-

ter geen invloed heeft op de dichtheid. Helemaal juist is dat niet. Bij toename van de druk neemt de massadichtheid van water toe omdat water in enige, zij het geringe mate samendrukbaar is. Het gevolg daarvan is dat een volume V aan het oppervlak van een oceaan een kleinere masse heeft dat datzelfde volume op bijvoorbeeld een kilometer diepte. Als we alleen kijken naar het effect van samendrukbaarheid (en dus alle effecten van variaties in temperatuur, saliniteit, gehalte gesuspendeerd materiaal et cetera buiten beschouwing laten), verloopt de dichtheid ρ volgens

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 + \frac{\rho_0 g}{K} z\right)^{-1} \tag{2.1}$$

waarin ρ_0 de dichtheid aan het wateroppervlak en z een verticale coördinaat met $z = 0$ aan het oppervlak en negatief daaronder. Voorts is g de versnelling van de zwaartekracht en K de compressie-modulus ($2,18 \times 10^9$ N/m^2 voor water)[2].

Om een indruk te krijgen van de fout die wordt gemaakt door water onsamendrukbaar te veronderstellen, kijken we naar de massa van een waterkolom met hoogte h ten opzichte van wat die massa zou zijn als water onsamendrukbaar is. Deze verhouding wordt gegeven door

$$\frac{1}{\rho_0 h} \int_{-h}^{0} \rho(z) \mathrm{d}z \tag{2.2}$$

Voor een waterkolom met een hoogte van 100 meter is deze verhouding gelijk aan 1,0002. Dat wil zeggen dat de massa van de waterkolom met 0,02% wordt onderschat door water onsamendrukbaar te veronderstellen. En als we uitgaan van de werkelijke massa van de waterkolom en dan de hoogte berekenen op basis van de benadering dat water onsamendrukbaar is, komen we 2 centimeter te hoog uit. Bij een waterkolom van een kilometer hoog is dat 23 centimeter. Helemaal bij

[2]Met toenemende afstand onder het wateroppervlak neemt de druk p toe volgens $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = -\rho g$. Tegelijkertijd neemt de dichtheid ρ toe omdat water samendrukbaar is. Het volume V dat een massa water m inneemt, wordt kleiner naarmate de druk toeneemt. Het verband tussen veranderingen in druk en volume wordt gegeven door

$$\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} = -\frac{1}{K}$$

Met $m = \rho V$ is dit te schrijven als

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{K}$$

Combinatie hiervan met de verticale drukgradiënt $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = -\rho g$ geeft het verticale verloop van de dichtheid ρ:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{g}{K}\rho^2 \quad \rightarrow \quad \rho^{-2}\mathrm{d}\rho = -\frac{g}{K}\mathrm{d}z$$

Integratie met de randvoorwaarde dat $\rho(z = 0) = \rho_0$ resulteert in (2.1). Die uitdrukking is overigens beperkt geldig. Op een diepte van $z = -K/(\rho_0 g)$ (wat overeenkomt met ongeveer 220 kilometer) zou volgens deze uitdrukking het volume tot nul zijn gereduceerd en de dichtheid oneindig groot zijn. Belangrijke vraag is of bij vergaande compactering van een massa de uitgangspunten van de gegeven redenering nog opgaan. Het antwoord op die vraag is ontkennend. De diepste delen van de aardse oceanen komen echter niet in de buurt van dit theoretisch extreem van 220 kilometer.

de bodem van de Marianentrog[3], op een diepte van bijna 11km, is de fout circa 282 meter.

In waterbouwkundige toepassingen is de waterdiepte doorgaans niet groter dan 100 meter en dan is onsamendrukbaarheid veronderstellen een goede benadering van de werkelijkheid.

2.2 Behoud van massa

Onder de omstandigheden waar we in de waterbouwkunde in geïnteresseerd zijn, is massa een behouden grootheid. Water kan niet uit het niets ontstaan en kan daar ook niet in verdwijnen. Dit wordt continuïteit genoemd en de vergelijking waarmee het wordt beschreven is de continuïteitsvergelijking. Toegepast op een prismatische[4] waterloop kunnen we behoud van volume schrijven als

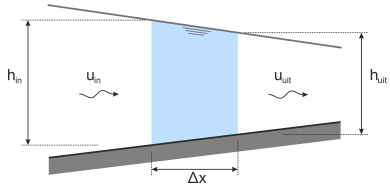
$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} + B\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.3}$$

waarin Q het debiet is, ζ de waterstand (ten opzichte van een willekeurige referentie), B de breedte van de waterspiegel, x een coördinaat in langsrichting en t de tijd. We kunnen ons dit voorstellen door te kijken naar een moot in dwarsrichting uit de waterloop. Als aan de bovenstroomse kant minder water de moot binnenkomt dan er aan de benedenstroomse kant uitstroomt, is $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}x > 0$ (onafhankelijk van de vraag of het water in positieve of negatieve x-richting stroomt). De hoeveelheid water in de moot neemt dan gestaag af en de waterstand daalt ($\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t < 0$). Het verschil tussen de in- en uitgaande debieten is het volume dat per eenheid van tijd aan de moot wordt onttrokken. Bij een zeer smalle moot is de waterspiegel daarbinnen bij benadering vlak. In dat geval is het onttrokken volume gelijk aan de daling van de waterstand in diezelfde eenheid van tijd en vermenigvuldigd met het horizontale oppervlak van de moot ter hoogte van de waterspiegel. Deze gelijkheid wordt, na delen door de lengte van de moot, weergegeven door (2.3). Bij stationaire stroming is er geen verandering met de tijd en dus is $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t = 0$. In dat geval geldt dat ook het debiet in langsrichting constant is ($\mathrm{d}Q/\mathrm{d}x = 0$).

Door te kijken naar een moot uit de waterloop, hebben we de zogeheten Eulerse methode toegepast. Deze methode gaat uit van een denkbeeldig volume met een vaste plaats ten opzichte van één of andere referentie. We noemen dit het controlevolume. Anders dan bij een rigide object hoeft zich in dit volume niet steeds dezelfde materie te bevinden. Via de wanden van het denkbeeldige volume is uitwisseling met de omgeving mogelijk. Voor een behouden grootheid (zoals massa) geldt dat de netto uitwisseling met de omgeving in balans is met de verandering

[3] Deze trog ligt ten zuiden van Japan. Het is het diepst bekende deel van de oceaan (Wikipedia, 2020)

[4] Als de natte doorsnede van een waterloop niet verandert in stroomrichting, spreken we van een prismatische waterloop. De term 'prismatisch' wordt veel gebruikt in de constructiemechanica, waar het ook verwijst naar een constante dwarsdoorsnede.



Figuur 2.1: In stroomrichting kunnen waterdiepte h en stroomsnelheid u veranderen, maar als de stroming stationair is, is het product hu constant.

van de berging in het controlevolume. We passen deze methode niet allen toe op behoud van massa, maar later in dit hoofdstuk ook op behoud van impuls.

Anders dan bij een waterloop is het bij meren of zeeën niet zo voor de hand liggend om een moot te beschouwen die de gehele dwarsdoorsnede beslaat. In plaats daarvan kiezen we een rechthoekige kolom als controlevolume. In figuur 2.1 is het aanzicht geschetst van zo'n kolom. Deze is zo gekozen dat twee tegenover elkaar gelegen wanden loodrecht op de stroomrichting staan en de afmeting dwars op het vlak van tekening is juist één eenheid van lengte. Aan de bovenstroomse kant stroomt water met een dieptegemiddelde snelheid u_{in} de moot binnen en aan benedenstroomse kant stroomt het er met een snelheid u_{uit} weer uit. De waterdieptes aan deze twee zijden van de moot zijn achtereenvolgens h_{in} en h_{uit}.

Als de stroming stationair is en de waterstand dus niet varieert met de tijd, wordt behoud van volume voor deze moot gegeven door

$$h_{in}u_{in} = h_{uit}u_{uit} \tag{2.4}$$

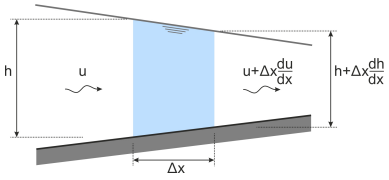
wat betekent dat het inkomende debiet per eenheid van breedte (loodrecht op het vlak van tekening in figuur 2.1) even groot is als het uitgaande.

Ten behoeve van waterloopkundige berekeningen wordt (2.4) geschreven in de vorm van een differentiaalvergelijking. Daarbij wordt gebruik gemaakt van een eerste orde Taylor benadering. Toegepast op de dieptegemiddelde stroomsnelheid u werkt dat als volgt. Deze snelheid varieert met de horizontale coördinaat in stroomrichting x, zodat $u = u(x)$. De moot die we beschouwen heeft een lengte Δx en aan de bovenstroomse zijde is $x = x_0$ (zie figuur 2.1). Als we de stroomsnelheid u ontwikkelen in een Taylorreeks geldt voor de snelheid aan benedenstroomse zijde dat

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \frac{\Delta x}{1!}\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} + \frac{\Delta x^3}{3!}\left.\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x_0} + \cdots \tag{2.5}$$

Bij een eerste orde benadering worden alle termen met Δx tot een macht hoger dan 1 verwaarloosd. De idee hierachter is dat als $\Delta x \ll 1$, de hogere orde termen veel kleiner zijn dan de eerste orde term. Zodoende krijgen we

$$u(x_0 + \Delta x) \approx u(x_0) + \Delta x \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \tag{2.6}$$



Figuur 2.2: Eerste orde Taylor benadering van het verloop van waterdiepte en stroomsnelheid in de richting van de stroming.

Voor de in— en uitstroomsnelheden die in (2.4) zijn genoemd, vinden we hiermee dat

$$u_{in} = u(x_0) \quad ; \quad u_{uit} = u(x_0 + \Delta x) \approx u(x_0) + \Delta x \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \tag{2.7}$$

en op overeenkomstige manier vinden we voor de waterstanden aan weerszijden van de moot dat

$$h_{in} = h(x_0) \quad ; \quad h_{uit} = h(x_0 + \Delta x) \approx h(x_0) + \Delta x \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \tag{2.8}$$

Het equivalent van figuur 2.1 met de benaderingen (2.7) en (2.8) is gegeven in figuur 2.2.

Als we aan de hand hiervan de volumebalans voor stationaire stroming opstellen, vinden we dat

$$h(x_0)u(x_0) = \left(h(x_0) + \Delta x \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}\right)\left(u(x_0) + \Delta x \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}\right) \tag{2.9}$$

ofwel

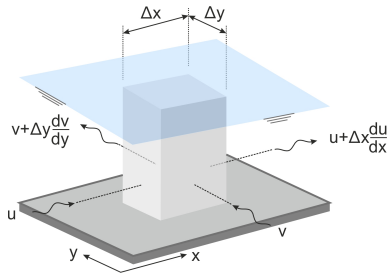
$$\begin{aligned} h(x_0)u(x_0) =& h(x_0)u(x_0) + \Delta x \left(u(x_0) \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} + h(x_0) \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}\right) \\ &+ \Delta x^2 \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Als we (2.10) uitwerken en daarbij, net zoals we eerder hebben gedaan, termen met Δx tot een macht hoger dan 1 verwaarlozen, krijgen we, na delen door Δx,

$$u(x_0) \left.\frac{dh}{dx}\right|_{x_0} + h(x_0) \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}(uh)}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0 \tag{2.11}$$

In deze uitwerking zijn we uitgegaan van een moot waarvan de bovenstroomse zijde samenvalt met $x = x_0$, maar omdat x_0 zelf niet relevant is, geldt de uitwerking voor elke willekeurige locatie van de moot. Met andere woorden, voor stationaire stroming wordt behoud van volume in stroomrichting beschreven met

$$\frac{\mathrm{d}(uh)}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{2.12}$$



Figuur 2.3: Eerste orde Taylor benadering van het verloop van twee horizontale componenten u en v van de dieptegemiddelde stroomsnelheid.

In bovenstaande afleiding van deze zogeheten 1–dimensionale continuïteitsvergelijking (2.12) hebben we de x-richting gekozen in stroomrichting. Dat is niet altijd mogelijk. Horizontale stroming in zeeën en meren heeft in het algemeen een 2–dimensionaal karakter en heeft de snelheid naast een u-component in x-richting ook een v-component in y-richting. Dit levert een beeld zoals geschetst in figuur 2.3.

Voor deze 2–dimensionale situatie houdt continuïteit voor stationaire stroming in dat de hoeveelheid water in een kolom niet met de tijd varieert. De totale hoeveelheid water die de kolom binnenstroomt moet op elk moment identiek zijn aan de hoeveelheid water die eruit stroomt. Anders dan in de afleiding van (2.12) hebben we nu te maken met stroming in twee richtingen en in beide richting kan in- en uitstroming plaatsvinden. Die in– of uitstroming wordt niet bepaald door hu alleen, maar door de som $hu+hv$. De continuïteitsvergelijking voor stationaire stroming in twee horizontale dimensies is zodoende

$$\frac{\mathrm{d}(uh)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}(vh)}{\mathrm{d}y} = 0 \tag{2.13}$$

In vergelijkingen (2.12) en (2.13) zijn u en v dieptegemiddelde stroomsnelheden en de producten hu en hv zijn debieten per eenheid van breedte. De twee vergelijkingen beschrijven continuïteit in termen van de over de diepte–geïntegreerde stroming. Men spreekt daarom van de diepte–geïntegreerde continuïteitsvergelijking. In paragraaf 2.4 over impulsbehoud maken we gebruik van deze vergelijking.

2.3 Behoud van energie

Net zoals massa is ook energie een behouden grootheid. Het beschrijven van waterbeweging vanuit behoud van massa en energie ligt echter niet altijd voor de hand. Een belangrijke reden daarvoor is dat waterbeweging wel een richting heeft, maar energie niet. De energie van een waterdeeltje bestaat uit een combinatie van potentiële, kinetische en thermische energie. Het aandeel kinetische energie is gerelateerd aan de grootte van de snelheid van het deeltje, maar zegt niets over de richting waarin het deeltje zich beweegt. Dit maakt dat behoud van energie niet toepasbaar is voor een willekeurige richting, maar wel langs een stroomlijn. In meren en zeeën zijn stroomlijnen niet makkelijk te identificeren, maar in gesloten

leidingen en tot op zekere hoogte ook in open waterlopen liggen de stroomlijnen gemiddeld evenwijdig aan de as van de waterloop. Behoud van energie kan daar wel worden gebruikt om waterbeweging te beschrijven.

Een bijzonder geval doet zich voor als een waterdeeltje tijdens z'n beweging langs een stroomlijn geen energie uitwisselt met de omgeving als gevolg van wrijving. Dat is bij goede benadering het geval als zich over korte afstand geen vertraging manifesteert. Dat is als volgt in te zien. Door wrijving wordt energie aan het beschouwde waterdeeltje onttrokken. De totale hoeveelheid onttrokken energie is gelijk aan de arbeid die door de wrijvingskracht wordt geleverd. Deze arbeid is het product van de wrijvingskracht en de afstand waarover deze werkt. Over korte afstand is die arbeid navenant beperkt. Tegelijkertijd mag geen vertraging optreden, want daarbij wordt turbulentie gegenereerd wat weer leidt tot dissipatie van energie.

In afwezigheid van uitwisseling van energie met de omgeving is de som van potentiële en kinetische energie constant. De kinetische energie E_k is gerelateerd aan de snelheid volgens

$$E_k = \frac{1}{2}mu^2 \tag{2.14}$$

waarin m de massa van het waterdeeltje is en u de snelheid. De potentiële energie E_p is gerelateerd aan de plaats van het deeltje in het gravitatieveld van de aarde en de afstand waarover het betreffende waterdeeltje in dat veld kan stijgen als gevolg van de druk op de plaats waar het zich bevindt:

$$E_p = mgz + \frac{m}{\rho}p \tag{2.15}$$

waarin z de plaats van het deeltje is ten opzichte van één of andere referentie, g is de versnelling van de zwaartekracht, p de druk ter plaatse van het deeltje en m/ρ is het volume ervan (m is massa en ρ is massadichtheid)[5].

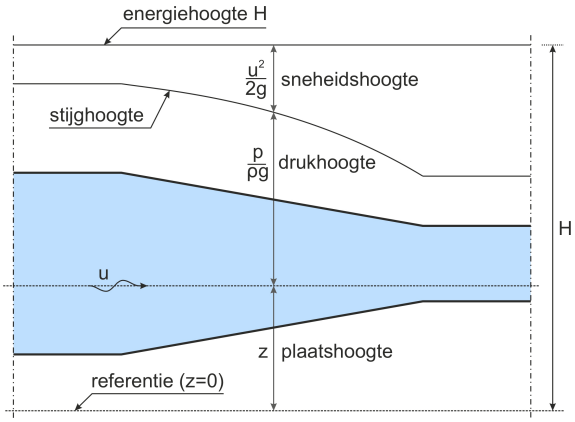
Als de som van E_k en E_p constant is, geldt, na delen door mg,

$$\frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{constant} \tag{2.16}$$

Dit staat bekend als de wet van Bernouilli, genoemd naar de Groningse wis- en natuurkundige Daniel Bernouilli (1700-1782).

Alle termen in uitdrukking (2.16) hebben de dimensie van lengte. De drie termen in het linker lid van (2.16) worden achtereenvolgens de snelheidshoogte, de plaatshoogte en de drukhoogte genoemd. De som is de energiehoogte H. Deze hoogten laten zich makkelijk grafisch weergeven. In figuur 2.4 is dit geschetst voor stroming in een gesloten leiding waarvan de diameter in stroomrichting over enige lengte afneemt. Omdat het debiet in de leiding overal hetzelfde is, neemt de

[5] $E_p/(mg)$ is het zogeheten piëzometrisch niveau of de stijghoogte. Het geeft aan tot welke hoogte het water kan stijgen als gevolg van de druk op hoogte z (beide ten opzichte van de referentie).



Figuur 2.4: Illustratie van de wet van Bernoulli voor versnellende stroming in een gesloten, zich vernauwende leiding (blauw) waarbij de energiehoogte H constant is.

stroomsnelheid (en daarmee de snelheidshoogte) als gevolg van de vernauwing in stroomrichting toe. Bij deze versnelling blijft H constant en neemt de drukhoogte dus af.

In hoofdstuk 3 over toepassingen gebruiken we deze energiehoogte voor de beschrijving van de waterbeweging bij een overlaat, rond een varend schip en in gesloten leidingen. In zulke leidingen zijn energieverliezen door wrijving doorgaans niet te verwaarlozen en kunnen we de wet van Bernouilli (2.16) dus niet toepassen. In plaats daarvan vergelijken we de energiehoogte op twee plaatsen (bijvoorbeeld A en B) in de leiding en kijken we naar

$$|H_{\mathrm{A}} - H_{\mathrm{B}}| = \Delta H \tag{2.17}$$

waarin ΔH het totaal aan verliezen tussen de plaatsen A en B is. Bij gesloten leidingen zijn die verliezen goed in kaart te brengen. Bovendien kan in ΔH de toevoer van energie door bijvoorbeeld een pomp worden begrepen, net zoals onttrekking door een turbine.

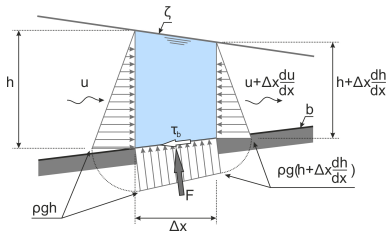
2.4 Behoud van impuls

Inleiding

De derde behoudswet die we in dit hoofdstuk behandelen betreft impuls, gedefinieerd als het product van massa en snelheid. Het wordt ook wel de hoeveelheid van beweging genoemd. De basis van de behoudswet zoals we die in de vloeistofmechanica gebruiken, is de tweede wet van Newton waarin de verandering van impuls van een object wordt gerelateerd aan de kracht die erop wordt uitgeoefend:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{u})}{\mathrm{d}t} \tag{2.18}$$

waarin m de massa van het betreffende object is, $\vec{u}$ de snelheid, $\vec{F}$ de kracht en t staat voor tijd. Snelheid en kracht zijn beide vectoriële grootheden. Impuls $m\vec{u}$ is dat ook. Behoud van impuls geldt zodoende voor elke richting.



Figuur 2.5: Controlevolume (grijs) in een 1–dimensionale stroming met de daarop werkende hydrostatische druk en bodemschuifspanning en de in– en uitgaande stroming.

In het navolgende leiden we de impulsbans af voor een stationaire stroming in één horizontale richting die wordt aangedreven door een verhang. Dit is een veel voorkomende situatie in bijvoorbeeld rivieren en kanalen waarvan de dwarsdoorsnede in langsrichting niet varieert. We veronderstellen een hydrostatische drukverdeling en ook dat de vloeistof onsamendrukbaar is. In de afleiding hanteren we de Eulerse aanpak met een controlevolume en we beperken ons tot stroming in één horizontale richting. Het resultaat is de impulsbalans die hoort bij de zogeheten ondiep water vergelijkingen voor stationaire stroming.

In eerste instantie gebruiken we voor de afleiding van de impulsbalans de volledige waterkolom als controlevolume. Dat levert de diepte–geïntegreerde balans. Die zegt wel iets over de diepte–gemiddelde stroming, maar niets over het verloop van de stroomsnelheid tussen bodem en oppervlakte. Om dat verloop in beeld te brengen, gaan we in tweede instantie (in appendix C) uit van een deel van de waterkolom als controlevolume. Beide resultaten worden gebruikt in de volgende paragraaf over toepassingen.

Dieptegemiddelde stroming

Voor de afleiding van de 1–dimensionale, diepte-geïntegreerde, horizontale impulsbalans kijken we naar een verticale langsdoorsnede van een open waterloop met een vlakke, hellende bodem. Een deel van deze langsdoorsnede met daarin het controlevolume is geschetst in figuur 2.5.

Net als bij continuïteit maken we gebruik van een eerste orde Taylor benadering van het verloop van de horizontale stroomsnelheid u en waterdiepte h. In figuur 2.5 is dat reeds toegepast.

Bij stationaire stroming verandert de totale impuls die in het controlevolume is geborgen niet met de tijd. Er is evenwicht tussen de overdracht van impuls naar en van het controlevolume door de stroming en de uitwendige krachten die op het volume werken. Die uitwendige krachten zijn het gewicht van het water in het controlevolume en de hydrostatische drukken aan weerszijden van het volume. Daarnaast is er een normaalspanning die door de bodem op de onderzijde van het volume wordt uitgeoefend. Deze is een voortzetting van de hydrostatische druk aan weerszijden van dat volume. Bij een hellende bodem is deze normaalspanning niet verticaal gericht maar loodrecht op de bodem en dat geldt ook voor de bijbehorende resultante. De verticale component van die resultante maakt evenwicht met het gewicht van het water in het controlevolume. Er is echter ook een horizontale

component en die speelt een rol in de horizontale impulsbalans. Tot slot is er nog de bodemschuifspanning τ_b als gevolg van de wrijving tussen bodem en water.

Er zijn, kortom, vier bijdragen aan de horizontale overdracht van impuls bij stationaire stroming. Deze bijdragen zijn gerelateerd aan

- hydrostatische drukken aan weerszijden van het controlevolume;
- bodemschuifspanning;
- normaalspanning tegen de onderzijde van het controlevolume;
- stroming in horizontale richting.

Deze vier bijdragen gaan we één voor één in kaart brengen en daarna stellen we de volledige 1–dimensionale, horizontale impulsbalans voor stationaire stroming op. Voor dat type stroming is de som van de vier bijdragen gelijk aan nul.

Als we uitgaan van een eenheid van breedte loodrecht op het vlak van tekening in figuur 2.5, is de resultante F_h van de hydrostatische druk aan weerszijden van het controlevolume, na verwaarlozing van termen met Δx tot een macht groter dan 1, gelijk aan

$$F_h = \frac{1}{2}\rho g h^2 - \frac{1}{2}\rho g \left(h + \Delta x \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \right)^2 = -\Delta x \rho g h \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{2.19}$$

en voor de horizontale component F_w van de bodemwrijving vinden we

$$F_w = -\Delta x \ \tau_b \tag{2.20}$$

Hierin is τ_b de grootte van de bodemschuifspanning en het product $\Delta x \ \tau_b$ in het rechter lid van bovenstaande uitdrukking is de grootte van de bijbehorende horizontale component, geïntegreerd over de onderzijde van het controlevolume.

Voor een eenheid van breedte wordt de grootte van de resultante F_b van de normaalspanning op de onderzijde van het controlevolume gegeven door

$$F_b = \frac{1}{2}\left(\rho g h + \rho g \left(h + \Delta x \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \right) \right) \frac{\Delta x}{\cos\theta} \tag{2.21}$$

waarin θ de hoek die de bodem maakt met de horizontaal. De horizontale component van deze resultante is $-F_b \sin\theta$. Het minteken is toegevoegd omdat de richting van deze component tegengesteld is aan die waarin de bodem oploopt (positieve θ). Na verwaarlozing van termen met Δx tot een macht groter dan 1 vinden we

$$-F_b \sin\theta = -\Delta x \ \rho g h \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} \tag{2.22}$$

waarin b het bodemniveau is (zie figuur 2.5) en $\mathrm{d}b/\mathrm{d}x = \tan\theta$.

Door de stroming worden waterdeeltjes het controlevolume in en uit getransporteerd. Deze deeltjes hebben zowel massa als snelheid en dus ook impuls. Stroming leidt zodoende tot een overdracht van impuls het controlevolume in en uit. Dit verschijnsel wordt advectie genoemd. Per eenheid van tijd komt een hoeveelheid water gelijk aan hu het volume binnen. De massa van deze hoeveelheid bedraagt

ρhu en de bijbehorende impuls is ρhu^2. Bedenk dat het hier gaat om een verandering van impuls per eenheid van tijd en die heeft, conform de tweede wet van Newton (zie (2.18)), de dimensie van kracht.

De netto advectieve overdracht van impuls F_a komt hiermee op

$$F_a = \rho hu^2 - \rho \left(h + \Delta x \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right) \left(u + \Delta x \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 = -\Delta x \rho u \left(u \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + 2h \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \quad (2.23)$$

Naast behoud van impuls geldt ook altijd continuïteit. Daarvan maken we gebruik om bovenstaande uitdrukking voor F_a enigszins te vereenvoudigen. Volgens de diepte–geïntegreerde continuïteitsvergelijking voor stationaire stroming (2.12) is

$$\frac{\mathrm{d}(uh)}{\mathrm{d}x} = u \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + h \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0 \quad (2.24)$$

Als we dat combineren met (2.23) resteert

$$F_a = -\Delta x \ \rho hu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad (2.25)$$

Hiermee hebben we de vier bijdragen gekwantificeerd. In het geval van stationaire stroming zijn ze met elkaar in evenwicht en geldt

$$F_h + F_w - F_b \sin\theta + F_a = 0 \quad (2.26)$$

Substitutie van (2.19), (2.20), (2.22) en (2.25) in bovenstaande balans levert, na delen door $\Delta x \rho h$,

$$u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -g \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} - \frac{\tau_b}{\rho h} - g \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} \quad (2.27)$$

Als ζ de waterstand is ten opzichte van de referentie die we ook bij het bodemniveau b hebben gebruikt, wordt de waterdiepte gegeven door $h = \zeta - b$. Als we de afgeleide hiervan

$$h = \zeta - b \quad \rightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} \quad (2.28)$$

combineren met de impulsbalans (2.27), volgt

$$u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -g \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} - \frac{\tau_b}{\rho h} \quad (2.29)$$

Hieruit blijkt dat de bodemhelling geen invloed heeft op de aandrijving van de stroming.

De bodemschuifspanning τ_b in (2.29) kan worden gerelateerd aan de dieptegemiddelde stroomsnelheid u. Uit analyse van waarnemingen is gebleken dat bij turbulente, verhang-gedreven stroming de bodemschuifspanning evenredig is met het kwadraat van de dieptegemiddelde stroomsnelheid u volgens

$$\tau_b = -c_f \rho u |u| \quad (2.30)$$

waarin c_f een dimensieloze wrijvingscoëfficiënt is die afhangt van de ruwheid van de bodem. In de volgende paragraaf 2.4 gaan we hier nader op in.

In de literatuur wordt vaak $\tau_b = c_f \rho u^2$ gebruikt in plaats van (2.30). Zolang het gaat om de relatie tussen de grootte van de bodemschuifspanning en die van de snelheid, is daar niets op tegen. Het gaat er echter aan voorbij dat de richtingen van schuifspanning en snelheid tegengesteld zijn. In de afleiding van (2.29) hebben we daar rekening mee gehouden. Als de stroming van richting verandert, blijft deze tegenstelling behouden met de notatie $\tau_b \propto u|u|$, maar niet met $\tau_b \propto u^2$.

Combinatie van (2.30) met (2.29) geeft

$$u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} - c_f\frac{u|u|}{h} \tag{2.31}$$

en dat is de diepte–geïntegreerde impulsbalans voor 1–dimensionale stationaire stroming. Samen met de continuïteitsvergelijking (2.24) vormt bovenstaande impulsbalans een set van twee differentiaalvergelijkingen waaruit, met passende randvoorwaarden, het verloop van de dieptegemiddelde horizontale stroming en de waterstand kunnen worden bepaald.

De grootte van de wrijvingscoëfficiënt c_f hangt af van de ruwheid van de bodem. In de volgende paragraaf over wandwrijving gaan we daar nader op in.

Wandwrijving

In de vorige paragraaf is aangegeven dat de bodemschuifspanning τ_b bij turbulente stroming evenredig is met het kwadraat van de diepte-gemiddelde stroomsnelheid u (zie uitdrukking (2.30)). Om de grootte van de wrijvingscoëfficiënt c_f te kunnen bepalen, is inzicht nodig in de verticale structuur van de stroming. De dieptegemiddelde snelheid u is immers een integrale karakteristiek van die structuur, terwijl de bodemschuifspanning wordt bepaald door wat zich vlakbij de bodem afspeelt.

In appendix C over impulsbehoud in een verticaal vlak is die structuur beschreven voor een turbulente, stationaire, 1–dimensionale, uniforme stroming die door een drukgradiënt wordt aangedreven. Zoals in die appendix uiteengezet, neemt voor deze condities de lokale horizontale stroomsnelheid logaritmisch toe met de hoogte boven de bodem. Men spreekt daarom van een logaritmisch snelheidsprofiel.

De redenering die tot dit logaritmisch profiel leidt, gaat vlakbij de bodem niet op. De reden daarvoor is dat in een laag net boven de bodem turbulentie niet volledig tot ontwikkeling kan komen omdat er in verticale zin onvoldoende ruimte is voor turbulente fluctuaties in de waterbeweging. Die ruimte is er pas op enige afstand boven de bodem en vanaf daar neemt het snelheidsprofiel de logaritmische vorm aan. Die afstand is mede afhankelijk van de ruwheid van de bodem.

Tenzij er specifieke interesse is in wat zich vlakbij de bodem afspeelt, wordt in stromingsberekeningen alleen een maat voor de dikte van die laag net boven de bodem betrokken. Deze maat wordt genoteerd als z_0. Het is de hoogte boven de bodem

van de fictieve nuldoorgang van de stroomsnelheid als het logaritmische profiel vanuit de bovenlaag met volledig ontwikkelde turbulentie wordt geëxtrapoleerd in de richting van de bodem (zie appendix C).

Omdat z_0 toeneemt met de ruwheid van de bodem, mag een relatie worden verwacht met de wrijvingscoëfficiënt c_f. Voor stationaire, 1–dimensionale, uniforme, verhang-gedreven stroming kan die relatie in beeld worden gebracht door uit het logaritmisch snelheidprofiel (C.29) de diepte-gemiddelde stroming te bepalen en het resultaat te vergelijken met wat volgt uit de diepte-gemiddelde impulsbalans

$$0 = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} - c_f\frac{u|u|}{h} \tag{2.32}$$

voor dezelfde omstandigheden (zie (2.31) met, vanwege de uniformiteit van de stroming, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 0$). Volgens deze balans kunnen we voor de diepte-gemiddelde snelheid u schrijven dat

$$u|u| = -\frac{g}{c_f}hi \tag{2.33}$$

waarin i het verhang is ($i = \mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}x$). Als we vervolgens gemakshalve de stroomrichting associëren met *positief*[6], volgt dat

$$u = \sqrt{\frac{g}{c_f}h|i|} \tag{2.34}$$

Met het logaritmisch snelheidsprofiel (C.29) volgt voor de diepte-gemiddelde snelheid u dat

$$u = \frac{1}{h - z_0}\int_{z_0+b}^{b+h}\frac{1}{\kappa}\sqrt{gh|i|}\ln\frac{z-b}{z_0}\mathrm{d}z \tag{2.35}$$

Uitwerken van deze integraal levert

$$u = \frac{\sqrt{g}}{\kappa}\left(\ln\frac{h}{z_0} - 1\right)\sqrt{h|i|} \tag{2.36}$$

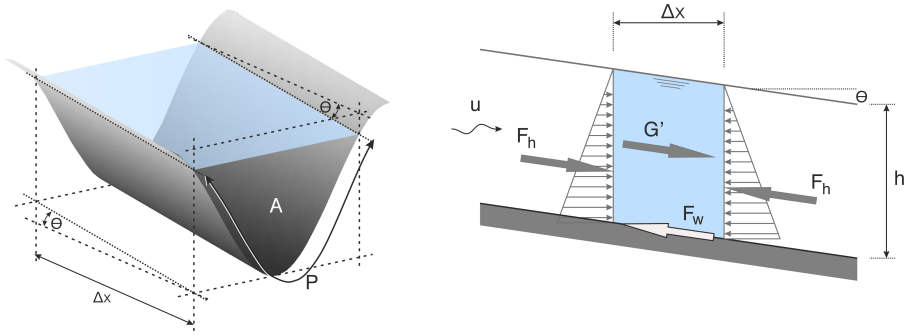
waarbij is verondersteld dat $z_0 \ll h$.

Vergelijking van (2.34) en (2.36) laat zien dat

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa}\left(-\ln\frac{z_0}{h} - 1\right) \tag{2.37}$$

Hiermee is de relatie tussen c_f en z_0 onderling aangegeven, maar voor praktische toepassing is het ook nodig om een verband te leggen met de werkelijke ruwheid van de wand van de waterloop. In het verleden is daar veel onderzoek naar gedaan. In deze paragraaf noemen we daarvan enkele veel gebruikte resultaten, te beginnen met een elementaire beschouwing van stationaire stroming in een prismatische

[6] bij een stationaire, uniforme, verhang-gedreven stroming kan dat straffeloos omdat daarbij de stroming altijd dezelfde richting heeft, tegengesteld aan die van het verhang.



Figuur 2.6: 3D principe-schets van een prismatische waterloop met een constant verhang $\tan\theta$ (links). De natte doorsnede heeft een oppervlak A en omtrek P. In de langsdoorsnede (rechts) zijn de componenten van de resultante hydrostatische druk (F_h), de bodemwrijving (F_w) en het eigen gewicht van het water (G') in de richting van het verhang aangegeven. Deze componenten hebben betrekking op een moot ter lengte Δx.

waterloop met een constant verhang. In dat geval is het stromingspatroon in elke dwarsdoorsnede hetzelfde.

Voor deze gesimplificeerde condities reduceert de impulsbalans voor de richting langs de hellende as van de waterloop tot evenwicht tussen de component in die richting van het gewicht van het water en de bodemwrijving. Dit is geschetst in figuur 2.6. In het linker deel van deze figuur is een 3–dimensionale impressie gegeven van een moot uit zo'n prismatische waterloop en in het rechter deel is een langsdoorsnede geschetst. Het grijze parallellogram daarin verwijst naar de moot van de waterloop.

Geïntegreerd over de dwarsdoosnede van de waterloop en in de richting van het verhang, kunnen we vier forceringen onderscheiden. Twee daarvan zijn betreffende componenten van de resultanten van de hydrostatische drukken aan boven- en benedenstroomse zijden van de moot. In figuur 2.6 zijn die aangegeven met F_h. Deze twee resultanten heffen elkaar op omdat ze even groot zijn en omdat werklijnen van beide samenvallen. Daarnaast zijn er de component G' in de richting van het verhang van het gewicht van de moot en de resultante F_w van de bodemwrijving. In een stationaire situatie moeten deze vier forceringen in evenwicht zijn en dus moet $G' = F_w$ (althans in termen van grootte; we gaan er op voorhand vanuit dat de richtingen van beide krachten tegengesteld zijn).

Voor geringe verhangen geldt bij goede benadering dat $G' = \rho g A|i|\Delta x$, waarbij i het verhang is ($i = \tan\theta$) en A het oppervlak van de natte doorsnede van de waterloop. Met dezelfde benadering is $F_w = \tau_b P \Delta x$, waarbij P de zogeheten perimeter is. Dat is de lengte van het natte deel van de omtrek van de dwarsdoorsnede van de waterloop. Voorts is τ_b de over de bodem gemiddelde schuifspanning. Er is sprake van evenwicht indien (na delen door Δx)

$$G' = F_w \quad \rightarrow \quad \rho g A|i| = \tau_b P \quad \Longrightarrow \quad \tau_b = \rho g \frac{A}{P}|i| \tag{2.38}$$

type wand	ruwheidslengte k_s
(afgestreken) beton	$5 \times 10^{-4} \ldots 5 \times 10^{-3}$m
grind, bedding met sedimenttransport	$1 \times 10^{-2} \ldots 3 \times 10^{-2}$m
stenen, waterloop met vegetatie	$5 \times 10^{-2} \ldots 1 \times 10^{-1}$m
blokken	$0,1 \ldots 1$m

Tabel 2.1: Enkele indicatieve waarden van de Nikuradse ruwheidslengte.

Met de overweging dat voor turbulente stroming geldt dat $\tau_b/\rho \propto u^2$, volgt dat

$$u \propto \sqrt{R|i|} \quad ; \quad R = \frac{A}{P} \tag{2.39}$$

waarin R de zogeheten hydraulische straal is. Als de breedte van een waterloop groot is ten opzichte van de waterdiepte h, is $R \approx h$ en dan heeft (2.39) dezelfde vorm als (2.34).

De aard van deze relatie tussen u en i is al in de 18e eeuw gevonden door de Franse waterbouwkundige Antoine de Chézy (1718-1798). Hij vond dat

$$u = C_h \sqrt{R|i|} \tag{2.40}$$

Deze uitdrukking staat bekend als de formule van Chézy. De coëfficiënt C_h is de zogeheten Chézy ruwheid, een maat voor de ruwheid van de bodem[7]. Er wordt wel gezegd dat het eigenlijk een maat is voor de gladheid omdat de waarde van C_h afneemt bij toenemende ruwheid. Bedenk voorts dat C_h de dimensie van $\sqrt{g}$ heeft. Bij gebruik van SI-eenheden is dat $\sqrt{\text{m}}/\text{s}$.

Vergelijking van (2.34) met (2.40) en (2.37) laat zien dat

$$\frac{C_h}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa}\left(-\ln\frac{z_0}{h} - 1\right) \tag{2.41}$$

De grootte van C_h en ook die van c_f en z_0, hangt af van de afmetingen van oneffenheden in de bodem. Bij een vlakke bodem die bestaat uit loskorrelig materiaal zoals zand of grind, is de korrelgrootte daarvoor bepalend. Daarnaast kunnen beddingvormen zoals ribbels van invloed zijn op de ruwheid, net zoals vegetatie. Een veel gebruikte indicator voor de afmetingen van oneffenheden in wanden van waterlopen is de zogeheten Nikuradse ruwheidslengte, genoemd naar de bedenker ervan Johann Nikuradse (1894-1979). Ter indicatie zijn enkele waarden van deze ruwheidslengte gegeven in tabel 2.1.

De relatie tussen de wrijvingscoëfficiënt c_f en de Nikuradse ruwheid k_s wordt gegegeven door de formule van Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{12R}{k_s + \delta/3,5} \tag{2.42}$$

[7]In de literatuur wordt doorgaans het symbool C gebruikt, zonder subscript. Om verwarring met andere C's te voorkomen, wordt in dit boek C_h aangehouden.

waarin δ de dikte van de laminaire sublaag dichtbij de wand is. In de meeste waterbouwkundige toepassingen hebben we te maken met turbulente condities en dan is $\delta \ll k_s$ zodat $k_s + \delta/3,5 \approx k_s$. De formule van Chézy is ook van toepassing op turbulente situaties en daarmee kunnen we uit (2.41) en (2.42) een relatie tussen de Chézy ruwheid en de ruwheidslengte volgens Nikuradse afleiden:

$$C_h = \frac{\sqrt{g}}{\kappa} \ln \frac{12R}{k_s} \tag{2.43}$$

In de praktijk wordt gewoonlijk een iets andere notatie aangehouden voor deze relatie. Daarin is de natuurlijke logaritme vervangen door een logaritme met grondtal 10 en is g =9,81 N/kg ingevuld. Na enig afronden volgt

$$C_h = 18 \log_{10} \frac{12R}{k_s} \tag{2.44}$$

wat bekend staat als de formule van White-Colebrook. De factor 18 in deze relatie wordt uitgedrukt in $\sqrt{\mathrm{m}}/s$, net als de Chézy ruwheid.

De formule van Chézy kan worden gezien als een uitwerking van de impulsbalans voor 1–dimensionale, stationaire, eenparige stroming die wordt aangedreven door een verhang. Daarbij is sprake van een balans tussen dat verhang en bodemwrijving. Men spreekt hierbij wel van wrijving-gedomineerde stroming. Een andere, wereldwijd veel meer gebruikte formule daarvoor is die van Manning (genoemd naar de Ierse ingenieur Robert Manning (1816-1897) die de formule uit waarnemingen heeft afgeleid). Voor prismatische waterlopen luidt deze formule

$$u = \frac{c}{n} R^{2/3} i^{1/2} \tag{2.45}$$

waarin n de Manning-waarde voor de ruwheid van de wand. Net zoals de Chézy ruwheid, is n niet dimensieloos. De dimensie van n is tijd/lengte$^{1/3}$. Daarmee is de (dimensieloze) conversiefactor c afhankelijk van de gebruikte eenheden. Bij SI-eenheden is $c = 1$, maar bij gebruik van Engelse maten (*feet* in plaats van meter), is $c = 1,49$.

In plaats van de Manning waarde n wordt vaak gebruik gemaakt van de reciproke, $1/n$, die bekend staat als de coëfficiënt van Strickler. Het verband tussen de Manning waarde en de Chézy ruwheid wordt gegeven door

$$C_h = \frac{1}{n} R^{1/6} \tag{2.46}$$

zoals direct valt af te leiden uit (2.40) en (2.45).

Hoewel de aangegeven verbanden tussen c_f, C_h en n enerzijds en de Nikuradse ruwheid k_s anderzijds zijn afgeleid uit empirisch onderzoek aan stationaire, uniforme stroming, worden ze in de praktijk breed toegepast voor zogeheten ondiep water condities. Daarbij gaat het om condities waarin de drukverdeling over de waterkolom bij goede benadering hydrostatisch is. In dit hoofdstuk over behoudswetten

zijn we daar op voorhand vanuit gegaan. Voor stromingen waarbij de verticale component van de snelheid klein is ten opzichte van de horizontale componenten, is dit een goede benadering[8].

Iets over instationaire stroming

In het voorgaande hebben we gezien dat de impulsbalans voor stationaire stroming neerkomt op evenwicht van krachten die op een controlevolume werken. De totale impuls die in het controlevolume is geborgen, verandert niet met de tijd. Bij instationaire stroming is dat wel het geval. Conform de tweede wet van Newton (zie (2.18)) wordt de verandering van in het volume geborgen impuls per eenheid van tijd gegeven door de resultante van alle erop werkende krachten.

Voor het 1–dimensionale stationaire geval hebben we afgeleid dat

$$F_h + F_w - F_b \sin\theta + F_a = 0 \tag{2.47}$$

(zie (2.26)). Bij instationaire stroming maken de vier krachten die in deze uitdrukking worden genoemd, geen evenwicht met elkaar maar met de verandering per eenheid van tijd van de impuls die in het controle volume is geborgen. Die impuls wordt gegeven door $\rho V u$, waarin V de inhoud van het controlevolume en u de gemiddelde snelheid van het water in dat volume. Zodoende volgt voor instationaire stroming dat

$$F_h + F_w - F_b \sin\theta + F_a = \frac{\partial(\rho V u)}{\partial t} \tag{2.48}$$

De krachten F in deze balans zijn per eenheid van breedte van de waterloop uitgewerkt in paragraaf 2.4 (uitdrukkingen (2.19) tot en met (2.23) en (2.28) en (2.30)). Invullen daarvan geeft

$$-\Delta x \rho g h \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \Delta x \rho c_f u|u| - \Delta x \rho u \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + 2h \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \Delta x \frac{\partial(\rho h u)}{\partial t} \tag{2.49}$$

waarin is verwerkt dat de inhoud V van het controle volume per eenheid van breedte van de waterloop gelijk is aan $h\Delta x$.

Met de veronderstelling dat de dichtheid ρ constant is, kunnen we deze balans delen door ρ. Bovendien kunnen we delen door Δx die in alle termen van de balans voorkomt. Het resultaat daarvan is

$$-gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} - c_f u|u| - u \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + 2h \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial(hu)}{\partial t} \tag{2.50}$$

Deze uitdrukking is te vereenvoudigen door combinatie met de diepte-geïntegreerde continuïteitsvergelijking. In het stationaire geval varieert de inhoud van het controle-volume niet met de tijd en zegt deze vergelijking dat wat het controle-volume op

[8] In hoofdstuk 4 over golven wordt ook gesproken over ondiep water condities. Die worden geassocieerd met relatief lange golven waarbij de golflengte groter is dan circa 20 keer de waterdiepte. In stroomrichting varieert de stroming dan betrekkelijk langzaam en is de verticale drukverdeling bij goede benadering hydrostatisch.

elk moment instroomt gelijk moet zijn aan wat er op hetzelfde moment uitstroomt. Bij instationaire stroming kan de inhoud van het controle-volume wel met de tijd veranderen en geeft continuïteit weer dat het verschil tussen in– en uitstroming $(\partial(uh)/\partial x)$ in balans moet zijn met de verandering van de inhoud van het controle-volume met de tijd:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \tag{2.51}$$

Combinatie van beide vergelijkingen geeft, na enig herschikken van termen en delen door de waterdiepte h,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} - c_f\frac{u|u|}{h} \tag{2.52}$$

De $\partial u/\partial t$ in deze uitdrukking wordt de traagheidsterm genoemd. In de paragraaf over getij (hoofdstuk 5 'Planetaire effecten') gebruiken we deze balans om de voortplantingssnelheid van de getijgolf te schatten. In appendix E over de golfvergelijking komt deze uitdrukking ook aan de orde, zij het geïntegreerd over de breedte van de waterloop.

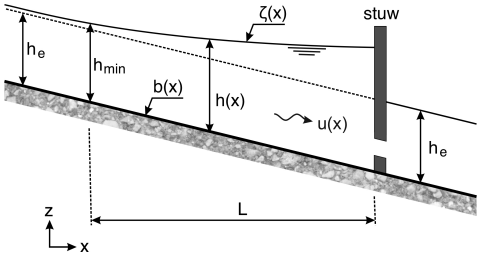
3

Toepassingen van stationaire stroming

3.1 Inleiding

Stroming in rivieren, kanalen en gesloten leidingen kenmerkt zich door een dominante richting. De stroming is voornamelijk in de richting van de as van de waterloop. Als het gaat om de grootte van de stroomsnelheid is alles wat zich dwars op die as afspeelt doorgaans secundair. Dat wil niet zeggen dat die secundaire fenomenen altijd van onderschikt belang zijn. Een tegenvoorbeeld is te vinden in paragraaf 3.6.3 over verticale circulaties dwars op de as van een rivier die verantwoordelijk zijn voor de vorming van meanders. De stroomsnelheden die in zulke dwarscirculaties optreden zijn klein ten opzichte van die in de hoofdstroom, maar vanwege hun persistente karakter kunnen ze op lange termijn significante effecten sorteren.

De theoretische beschouwingen die in het voorgaande hoofdstuk met betrekking tot waterbeweging zijn gegeven over behoud van massa (continuïteit), impuls en energie, passen we in dit hoofdstuk toe op enkele, voor de waterbouwkunde relevante situaties. Dat begint met 1–dimensionale stroming in waterlopen met een vrije waterspiegel (open waterlopen), gevolgd door gesloten leidingen. Ook netwerken van zulke open waterlopen en gesloten leidingen komen aan bod. Tot slot van dit hoofdstuk kijken we naar verticale circulaties die zich voordoen bij een windgedreven stroming en bij stroming in een rivierbocht.



Figuur 3.1: Schets van een verhanglijn bovenstrooms van een stuw in een waterloop. L is de lengte van het traject waarin de waterdiepte ten minste $h_{\min}$ is. De evenwichtsdiepte is h_e. In deze figuur heeft de stuw de vorm van een onderspuier, maar het kan ook een (on)volkomen overlaat zijn, bijvoorbeeld.

3.2 Stroming in open waterlopen

3.2.1 Verhanglijnen

Inleiding

Zolang er geen sprake is van zijdelingse toe– of afvoer, wordt stationaire stroming in een open waterloop, zoals een rivier, gekenmerkt door een constant debiet. Daarmee is echter niet gezegd dat ook de waterdiepte en de diepte-gemiddelde stroomsnelheid overal in die waterloop even groot zijn. Als de bodemhelling of de vorm van de dwarsdoorsnede van de waterloop in stroomrichting varieert, zullen de waterdiepte en stroomsnelheid dat ook doen.

Het omgekeerde geldt ook. Als de waterdiepte in stroomrichting verandert, zal de natte dwarsdoorsnede van de waterloop mee veranderen. Een simpel voorbeeld hiervan is een kunstmatige waterloop met een rechthoekige dwarsdoorsnede en een constante breedte. Het oppervlak van de natte dwarsdoorsnede is dan gelijk aan het product van breedte en diepte. Een verandering in de waterdiepte gaat direct samen met een navenante verandering van de natte doorsnede. En omdat het debiet constant is, verandert de stroomsnelheid dan ook.

Voor de waterbouwkunde is inzicht in deze samenhang bijvoorbeeld van belang voor het reguleren van waterstanden op een rivier. Zo zijn in Nederland op diverse plaatsen stuwen in rivieren geplaatst om de afvoer over riviertakken te kunnen verdelen en om bij lage afvoer voldoende waterdiepte voor de scheepvaart te realiseren. Zo'n stuw is een obstructie in de waterloop die lokaal als het ware voor een grote weerstand zorgt. Om die weerstand te overwinnen, is een verval over de obstructie nodig. In een stationaire situatie is de omvang van het verval zodanig dat het debiet door de stuw gelijk is aan dat elders in de rivier.

Benedenstrooms van de stuw is het stromingspatroon gelijk aan dat zonder dat er een stuw zou zijn, maar direct bovenstrooms is sprake van een hogere waterstand en dus grotere waterdiepte. In stroomopwaartse richting tendeert de waterdiepte naar de evenwichtsdiepte. Als bijvoorbeeld ten behoeve van de scheepvaart over enig traject bovenstrooms van de stuw een minimale waterdiepte moet worden gegarandeerd, is het van belang te weten hoe de waterstand vanaf de stuw in stroomopwaartse richting verloopt in relatie tot de waterstand bij de stuw. Dit is schetsmatig weergegeven in figuur 3.1.

Bij een verhang–gedreven stroming, zoals in dit voorbeeld van een stuw in een rivier, wordt dat verloop van de waterstand de verhanglijn genoemd. In de volgende twee paragrafen gaan we eerst in op een methode om een verhanglijn te bepalen en daarna kijken we naar een toepassing voor het ontwerp van een serie stuwen om over grote lengte van een rivier een minimale waterdiepte te realiseren.

Principe van een verhanglijn

Voor de berekening van een verhanglijn in een waterloop (met constante breedte) gaan we uit van de diepte–geïntegreerde impulsbalans voor 1–dimensionale stationaire stroming (2.31) waarin we voor de waterstand $\zeta = h + b$ hebben ingevuld (zie ook figuur 3.1):

$$u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -g\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} - c_f\frac{u|u|}{h} - g\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} \tag{3.1}$$

waarin $\mathrm{d}b/\mathrm{d}x$ de helling van de bodem (gezien langs de as van de waterloop).

Omdat we uitgaan van een stationaire stroming, is het debiet Q constant. Ter wille van de eenvoud veronderstellen we voorts dat de breedte B van de waterloop niet afhankelijk is van de waterstand die zich daarin voordoet. In dat geval geldt dat het debiet $q = hu$ per eenheid van breedte in langsrichting van de waterloop niet varieert. Dit is niets anders dan continuïteit. Samen met de impulsbalans (3.1) vormt dit een set van twee vergelijkingen met twee onbekenden u en h. Hieruit kunnen we de stroomsnelheid u elimineren door $q = hu$ in te vullen in (3.1). We houden dan

$$\frac{q}{h}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{q}{h}\right) = -g\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} - c_f\frac{q|q|}{h^3} - g\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} \tag{3.2}$$

over waarin alleen h een onbekende is.

Een randvoorwaarde bij deze differentiaalvergelijking heeft de vorm van een voorgeschreven waterdiepte h_0 op een of andere locatie x_0 in de waterloop: $h(x_0) = h_0$. Bij toepassing op een stuw is dat bijvoorbeeld de waterdiepte juist bovenstrooms van die stuw.

Om de waterdiepte $h(x)$ uit (3.2) te kunnen oplossen, schrijven we deze vergelijking eerst in een wat meer handzame vorm. Daartoe werken we eerst het linker lid uit. Omdat q constant is, geldt dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{q}{h}\right) = q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{h}\right) = -\frac{q}{h^2}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{3.3}$$

zodat we (3.2) kunnen schrijven als

$$-\frac{q^2}{h^3}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -g\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} - c_f\frac{q|q|}{h^3} - g\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} \tag{3.4}$$

Door herschikken van termen waarbij alles met $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x$ in het linker lid terecht komt en delen door g, krijgen we

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{q^2}{gh^3}\right) = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}\left(1 + c_f\frac{q|q|}{gh^3}\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}\right) \tag{3.5}$$

De termen tussen de buitenste haken zowel links als rechts van het = teken kunnen we relateren aan karakteristieke waterdieptes. Voor de term in het linker lid is dat de waterdiepte h_c die hoort bij kritische stroming. In dat geval is het getal van Froude, genoteerd als Fr, precies gelijk aan 1:

$$\mathrm{Fr}^2 = \frac{u^2}{gh_c} = \frac{q^2}{gh_c^3} = 1 \quad \Longrightarrow \; h_c^3 = \frac{q^2}{g} \tag{3.6}$$

Voor de term tussen haken in het linker lid van (3.5) kunnen we hiermee schrijven dat

$$1 - \frac{q^2}{gh^3} = 1 - \frac{h_c^3}{h^3} \tag{3.7}$$

Op overeenkomstige manier kunnen we de term tussen haken in het rechter lid van (3.5) relateren aan de evenwichtsdiepte h_e. Dat is de diepte die zich bij het gegeven debiet voor zou doen als sprake zou zijn van een stationaire, horizontaal uniforme stroming. De impulsbalans voor die situatie ziet er iets anders uit dan (3.2) omdat de waterdiepte h en het debiet q in langsrichting niet variëren. In plaats van (3.2) geldt voor dit type stroming dat

$$0 = -c_f \frac{q|q|}{h_e^3} - g\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} \tag{3.8}$$

(wat met $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x = 0$ direct uit (3.2) volgt), zodat

$$h_e^3 = -c_f \frac{q|q|}{g} \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} \tag{3.9}$$

Hiermee kunnen we voor de term tussen haken in het rechter lid van (3.5) schrijven dat

$$1 + c_f \frac{q|q|}{gh^3} \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} = 1 - \frac{h_e^3}{h^3} \tag{3.10}$$

Met (3.7) en (3.10) wordt (3.5)

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{h_c^3}{h^3}\right) = -\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{h_e^3}{h^3}\right) \tag{3.11}$$

Dit is bijna de handzame vorm waar we naar op zoek zijn. Om die te bereiken delen we door de term tussen haken in het rechter lid van bovenstaande uitdrukking en daarna delen we ook nog eens door de evenwichtsdiepte h_e. Het resultaat luidt

$$\frac{h^3 - h_c^3}{h^3 - h_e^3}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} \tag{3.12}$$

Dit resultaat staat bekend als de vergelijking van Bélanger, genoemd naar Jean-Baptiste Charles Joseph Bélanger (1790–1874) die de vergelijking heeft afgeleid.

Door introductie van $y = h/h_e$ kunnen we dit schrijven als

$$\frac{y^3 - \alpha}{y^3 - 1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{h_e}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} \quad ; \quad \alpha = \frac{h_c^3}{h_e^3} \tag{3.13}$$

Integratie met behulp van scheiding van variabelen geeft

$$H(y) + \frac{y}{\alpha - 1} = \frac{x}{L_a} + I \tag{3.14}$$

waarin

- $H(y)$ wordt gegeven door

$$H(y) = \frac{1}{6}\ln\frac{y^2 + y + 1}{(y-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y-1}{\sqrt{3}} \tag{3.15}$$

  wat bekend staat als de functie van Bresse (op een constante na).

- α afhankelijk is van de verhouding tussen de kritieke diepte en de evenwichtsdiepte. Voor eenparige stroming is α met (3.6) en (3.9) te schrijven als

$$\alpha = \frac{h_c^3}{h_e^3} = \frac{1}{c_f}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}\right| \tag{3.16}$$

  Kritische stroming ($\mathrm{Fr}^2 = 1$) komt overeen met $\alpha = 1$. Bij sub–kritische stroming is $\alpha < 1$ (dus $h_e > h_c$) en bij super–kritische stroming is $\alpha > 1$ ($h_e < h_c$).

  In de waterbouwkundige praktijk hebben we veelal te maken met sub–kritische stroming ($\alpha < 1$), bijvoorbeeld als het gaat om optsuwing in rivieren bovenstrooms van een obstructie. Super–kritische stroming doet zich onder meer voor bij het overstromen van een dijk en dan speelt een beschrijving van de verhanglijn een wezenlijke rol in beschouwingen over het onstaan en de ontwikkeling van een bres (Visser, 1998).

- De lengte L_a is gedefinieerd als

$$L_a = -\frac{(\alpha - 1)h_e}{\mathrm{d}b/\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}\frac{h_e^3 - h_c^3}{h_e^2} = \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}\left(h_e - \frac{q^2/g}{h_e^2}\right) \tag{3.17}$$

  De grootte (of absolute waarde) van L_a een maat is voor het tempo, in termen van afstand, waarin de waterdiepte neigt naar de evenwichtsdiepte. Het is daarmee een lengteschaal en die wordt de aanpassingslengte genoemd (verwar deze niet met de lengte L in figuur 3.1).

  Als vergelijking (3.14) wordt gebruikt om een verhanglijn te berekenen, is niet alleen de grootte van L_a van belang, maar ook het teken. En dat

hangt mede af van de richting langs de as van de waterloop waarin we de x-coördinaat (arbitrair) positief hebben gekozen. Bij sub–kritische stroming ($\alpha < 1$) is $L_a > 0$ als het bodemniveau b stijgt in de richting waarin deze coördinaat toeneemt. Dan is immers $\mathrm{d}b/\mathrm{d}x > 0$. Op dezelfde manier geldt dat als het bodemniveau b daalt in de richting waarin x toeneemt, zowel $\mathrm{d}b/\mathrm{d}x$ als L_a negatief zijn. Bij super–kritische stroming ($\alpha > 1$) is dat juist omgekeerd.

- en I is een integratieconstante die bepaald moet worden uit een randvoorwaarde waarin bijvoorbeeld de waterdiepte h op een lokatie x_0 wordt voorgeschreven ($h(x_0) = h_0$) In termen van de relatieve waterdiepte y is dat $y(x_0) = y_0$, zodat

$$H(y) - H(y_0) + \frac{y - y_0}{\alpha - 1} = \frac{x - x_0}{L_a} \tag{3.18}$$

Als bij de voorgeschreven afvoer q en de voorgeschreven bodemhelling ($\mathrm{d}b/\mathrm{d}x$) sprake zou zijn van eenparige stroming ($h = h_e$, ofwel $y = 1$ voor alle x), dan zou $\alpha = \mathrm{Fr}^2$. Voor $\alpha < 1$ is de kritieke waterdiepte h_c kleiner dan de evenwichtsdiepte h_e. Dat is het geval bij subkritische stroming ($-1 < \mathrm{Fr} < 1$). Bij superkritische stroming is $\alpha > 1$. Het resultaat (3.14)- (3.15) geldt voor beide situaties.

Tot slot merken we op dat het resultaat (3.14)- (3.15) in zoverre onhandig is dat we hiermee alleen direct kunnen aangeven op welke plaats x zich één of andere waterdiepte h voor zal doen. Het is niet mogelijk om de verhanglijn $\zeta(x) = h(x) + b(x)$ expliciet als functie van de plaats x te schrijven. De verhanglijn $\zeta(x)$ kan wel langs numerieke weg worden benaderd. Daarnaast kan een polynoom–benadering binnen zekere grenzen een redelijke schatting opleveren van $\zeta(x)$ voor een voorgeschreven x. In appendix G zijn hiervoor enkele handreikingen te vinden.

Voor situaties waarin $h \approx h_e$ kan de vergelijking van Bélanger worden gelineariseerd en de oplossing daarvan heeft de vorm van een exponentiële functie die heel wat handzamer is dan (3.14), maar beperkt in toepasbaarheid. Daar gaan we in de volgende paragraaf op in en daarna passen we het principe van een verhanglijn toe op een situatie waarin de waterdiepte in een rivier over grote afstand moet worden gegarandeerd ten behoeve van bijvoorbeeld scheepvaart.

Benadering van de verhanglijn

In het geval dat de waterdiepte h niet veel afwijkt van de evenwichtsdiepte h_e, dus als $h = h_e + \varepsilon$ met $\varepsilon \ll h_e$, is een benadering mogelijk door linearisering van (3.13). Met $h = h_e + \varepsilon$ kunnen we schrijven dat

$$\begin{aligned} h^3 - h_e^3 &= (h_e + \varepsilon)^3 - h_e^3 \\ &= h_e^3 + 3h_e^2\varepsilon + 3h_e\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - h_e^3 \\ &\approx 3h_e^2\varepsilon = 3h_e^2(h - h_e) \end{aligned} \tag{3.19}$$

waarbij termen met ε^2 en ε^3 ten opzichte van die met ε zijn verwaarloosd[9]. Op overeenkomstige manier benaderen we

$$\begin{aligned} h^3 - h_c^3 &= (h_e + \varepsilon)^3 - h_c^3 \\ &= h_e^3 + 3h_e^2\varepsilon + 3h_e\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - h_c^3 \\ &\approx h_e^3 - h_c^3 \end{aligned} \tag{3.20}$$

En hier hebben we termen met ε^1 en ε^2 verwaarloosd ten opzichte van die met ε^0.

Invullen van deze benaderingen in de vergelijking (3.12) van Bélanger geeft

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}\left(\frac{h^3 - h_e^3}{h^3 - h_c^3}\right) \approx -3\frac{h - h_e}{L_a} \tag{3.21}$$

Integratie van bovenstaande differentiaalvergelijking met de randvoorwaarde $h(x_0) = h_0$ komt uit op

$$h(x) = h_e + (h_0 - h_e)\exp\left(-3\frac{x - x_0}{L_a}\right) \tag{3.22}$$

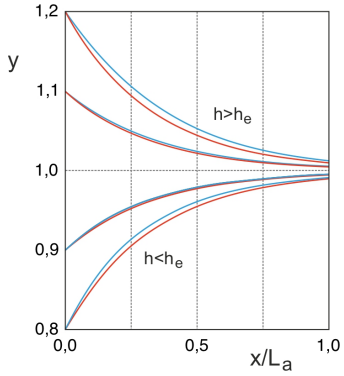
waarin L_a de aanpassingslengte, gedefinieerd in (3.17). In termen van $y = h/h_e$ is dit te schrijven als

$$y(x) = 1 + (y_0 - 1)\exp\left(-3\frac{x - x_0}{L_a}\right) \quad ; \quad y_0 = \frac{h(x_0)}{h_e} \tag{3.23}$$

Deze benadering is een stuk handzamer dan de volledige oplossing (3.14), al was het alleen maar omdat de benadering inverteerbaar is. Daar staat tegenover dat die alleen van toepassing is als de waterdiepte weinig afwijkt van de evenwichtsdiepte. Vaak is dat niet vooraf duidelijk en daarom moet bij toepassing van de benadering worden gecontroleerd of die afwijking inderdaad gering is (dus dat $h/h_e \approx 1$). Een indruk van de kwaliteit van de benadering is gegeven in figuur 3.2. Daarin zijn verhanglijnen getekend langs een traject met lengte L_a bovenstrooms van een lokatie waar de waterdiepte is voorgeschreven.

Op die locatie is $x = 0$ gekozen en x neemt toe in stroomopwaartse richting (de stroming is dus als het ware naar links). In de figuur zijn de verhanglijnen voor vier verschillende randvoorwaarden (op $x = 0$) samen genomen, namelijk $y = 0,8$, $y = 0,9$, $y = 1,1$ en $y = 1,2$. In alle vier gevallen is sprake van sub–kritische stroming. De exacte oplossing (conform (3.14)) is in de figuur voor deze vier randvoorwaarden in het traject $0 \leq x \leq L_a$ aangegeven met een blauwe curve en rode curve is de benadering volgens (3.23). Voor alle vier de randvoorwaarden levert de benadering een onderschatting van de waterdiepte volgens de exacte oplossing. De omvang van die onderschatting neemt af naarmate de randvoorwaarde voor y op $x = 0$ dichter bij 1 ligt. En dat is conform het uitgangspunt van de benadering.

[9] Dat is vergelijkbaar met de eerste orde Taylor benadering waarbij we termen met Δx^n met $n > 1$ hebben verwaarloosd ten opzichte van termen met Δx (zie bijvoorbeeld) (2.6))



Figuur 3.2: Verloop van verhanglijnen voor sub–kritische stroming volgens de exacte oplossing ((3.14), blauwe curve) en de benadering ((3.23), rode curve) voor $h \approx h_e$. In de grafiek neemt x toe in stroomopwaartse richting en zijn vier randvoorwaarden onderscheiden voor y op $x = 0$, namelijk $y = 0,8$, $y = 0,9$, $y = 1,1$ en $y = 1,2$.

Minimale waterdiepte

Met het principe van verhanglijnen voor 1–dimensionale stroming kan bijvoorbeeld het verloop van de waterstand in een rivier worden berekend bovenstrooms van een obstructie. Daarbij valt te denken aan een nauwelijks erodeerbare kleilaag of rotsachtige formatie op de voorts zandige bodem van een rivier. Maar naast zulke natuurlijk obstructies kan de verhanglijn ook worden gebruikt bij het ontwerp van stuwen om de waterstand in een rivier te reguleren, al of niet in combinatie met beïnvloeding van de verdeling van de afvoer over riviertakken.

Zo wordt in Nederland de verdeling van de afvoer over de takken van de Rijn geregeld met stuwen bij Amerongen, Driel en Hagestestein. Deze zijn in de periode 1958-1970 gebouwd volgens hetzelfde ontwerp. Bij geringe afvoer kunnen deze stuwen worden ingezet om op belangrijke scheepvaartroutes een minimale waterdiepte te garanderen. Bij hoge afvoer, daarentegen, kan door aanpassing van de afvoerverdeling de waterdiepte juist worden beperkt en daarmee het risico op overstromen.

Maar hoe de stuwen ook worden ingesteld, de totale afvoer moet op een of andere manier een weg vinden door het complex van riviertakken. Beïnvloeding van de afvoerverdeling is daarom nooit beperkt tot een enkele tak, maar raakt het hele complex. Het instellen van een gewenste situatie in de ene tak kan zodoende een ongewenste situatie in een andere tak tot gevolg hebben.

Dat geldt voor zowel waterstanden als afvoeren. Zo wordt met het oog op waterkwaliteit en behoud van natuurwaarden, bijvoorbeeld, vaak een ondergrens aan de afvoer in elke tak aangehouden, tenzij dat niet haalbaar is omdat de totale afvoer te gering is.

Ter illustratie kijken we naar de inzet van stuwen om in een rivier die uit slechts één tak bestaat, ten behoeve van de scheepvaart over een afstand L een minimale waterdiepte $h_{\min}$ te realiseren. Tenzij wordt toegelaten dat de rivier ergens buiten de oevers treedt, heeft een stuw in dit voorbeeld met één tak alleen invloed op de waterstand en niet op de afvoer. Het principe van een verhanglijn zoals omschreven in de voorgaande paragraaf, is daarmee toepasbaar.

Bij voorgeschreven L en $h_{\min}$ kunnen we met behulp van uitdrukkingen (3.14) en (3.15) voor de verhanglijn, de waterdiepte bepalen die net bovenstrooms van de stuw ten minste aanwezig moet zijn. Die waterdiepte is een randvoorwaarde voor het ontwerp van de stuw.

Om juist aan de gestelde eisen te voldoen, moet de waterdiepte op een afstand L bovenstrooms van de stuw gelijk zijn aan $h_{\min}$. Op basis hiervan bepalen we de integratieconstante I in (3.14). Vervolgens gebruiken we dezelfde uitdrukking om de benodigde waterstand bij de stuw te berekenen. Met deze aanpak hebben we impliciet verondersteld dat de breedte en de bodemhelling ($\mathrm{d}b/\mathrm{d}x$) van de rivier over het traject L niet veranderen. Bij de afleiding van (3.14) en (3.15) was dat immers een uitgangspunt.

Voor toepassing van (3.14) en (3.15) kiezen we een horizontale coördinaat x langs de as van de rivier en met $x = 0$ ter hoogte van de stuw. Hiermee volgt voor de integratieconstante I dat

$$I = (\alpha - 1)H(y_{\min}) + y_{\min} - \frac{1}{h_e}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}L \tag{3.24}$$

waarin $y_{\min} = h_{\min}/h_e$ de relatieve waterdiepte op $x = -L$ is.

De waterdiepte die juist bovenstrooms van de stuw nodig is om ervoor te zorgen dat $h(x) \leq h_{\min}$ over het traject $-L \leq x \leq 0$, noteren we met h_s en, in samenhang daarmee, definiëren we $y_s = h_s/h_e$.

Die waterdiepte volgt uit (3.14) met I volgens (3.24), dus

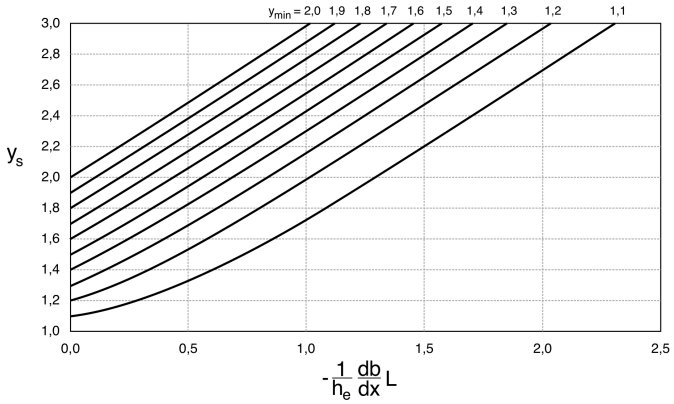
$$(\alpha - 1)\left(H(y_s) - H(y_{\min})\right) + (y_s - y_{\min}) = -\frac{1}{h_e}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}L \tag{3.25}$$

Hieruit kan y_s numeriek worden berekend (zie ook appendix G). Om een indruk te krijgen van de relatie tussen $h_{\min}$ en L enerzijds en h_s (of y_s) anderzijds, werken we de bovenstaande uitdrukking voor y_s iets verder uit voor een soort doorsnee rivier met een zandige bodem (bodemruwheid $C_h = 30 \ldots 40\sqrt{\mathrm{m}}/\mathrm{s}$, ofwel $c_f = 0,011 \ldots 0,006$) en een verhang $\mathrm{d}b/\mathrm{d}x = -10^{-4} \cdots - 10^{-5}$. In dat geval is $\alpha = 0,001 \ldots 0,016$. Dat is zoveel kleiner dan 1 dat $\alpha - 1 \approx -1$. Met deze benadering kunnen we voor de bovenstaande uitdrukking schrijven dat

$$H(y_s) - H(y_{\min}) + (y_s - y_{\min}) \approx -\frac{1}{h_e}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}L \tag{3.26}$$

In deze benadering is er voor een voorgeschreven $y_{\min}$ een directe relatie tussen y_s en $-(\mathrm{d}b/\mathrm{d}x)L/h_e$. In figuur 3.3 is die relatie geschetst voor diverse waarden van $y_{\min}$.

Om een indruk te krijgen van ordes van grootte bij het verband tussen y_s en L, bouwen we voort op onze doorsnee rivier en gaan we uit van een aanwezige



Figuur 3.3: Relatie tussen $-(\mathrm{d}b/\mathrm{d}x)L/h_e$ en y_s voor $y_{\min}$ in het interval $[1,1;2,0]$ in stappen van 0,1.

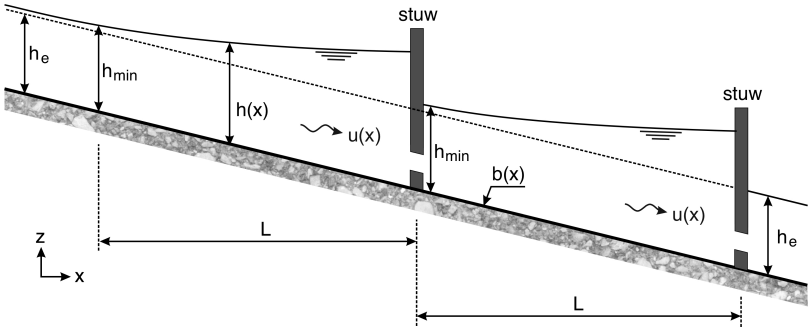
evenwichtsdiepte van $h_e = 4$m terwijl een diepte van 5,6m gewenst is[10]. Bovendien beperken we ons tot $\mathrm{d}b/\mathrm{d}x = -10^{-4}$.

Met (3.26) vinden we bijvoorbeeld dat de minimaal benodigde waterdiepte over een afstand van L =27,5km kan worden gegarandeerd als we de stuw zo ontwerpen dat de waterdiepte daar $2h_e$ is ($y_s = 2$). Die 27,5km komt misschien niet erg indrukwekkend over. Als het ontwerp van de stuw wordt aangepast naar $y_s = 3$, kan de vereiste minimum waterdiepte tot 68,2km bovenstrooms van de stuw worden gegarandeerd. Wie dat aantrekkelijker vindt, moet zich wel realiseren dat de bijbehorende waterdiepte net bovenstrooms van de stuw gelijk is aan drie keer de evenwichtsdiepte. In dit voorbeeld is dat 12m, ofwel 8m meer dan de evenwichtsdiepte.

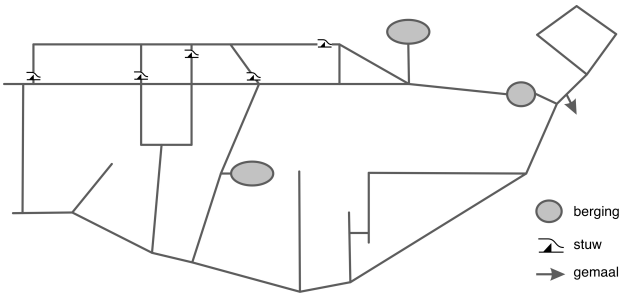
De moraal van dit voorbeeld is dat het garanderen van een minimale waterdiepte over een traject met lengte L, betekent dat de waterdiepte over dat gehele traject ten minste gelijk is aan dat minimum en stroomafwaarts in de richting van de stuw toeneemt, terwijl die toename niet vanzelfsprekend over dat gehele traject toelaatbaar is.

Als die toename niet toelaatbaar is, zou die toelaatbaar gemaakt kunnen worden door bijvoorbeeld rivierdijken aan te leggen of aan te passen. Een andere optie is om stuwen in serie te plaatsen, zoals geschetst in figuur 3.4. Het garanderen van een waterdiepte van ten minste $1,4h_e$ over een afstand van 68,2km is ook mogelijk met twee stuwen met een onderlinge afstand van 34,1km. Juist bovenstrooms van beide stuwen is de waterdiepte daarbij gelijk aan $2,16h_e$. Dat is ongetwijfeld dichter bij wat wel toelaatbaar is, maar daar zijn wel twee stuwen voor nodig

[10]De gewenste diepte is afhankelijk van het type schip dat de rivier als vaarweg gebruikt. In Europa wordt daarvoor de zogeheten CEMT classificering gehanteerd. CEMT is een afkorting die verwijst naar de *Conférance Européenne des Ministres du Transport* waarin de classificering is vastgesteld. In de Richtlijnen Vaarwegen (Rijkswaterstaat, 2020) zijn per CEMT–klasse eisen genoemd waaraan het dwarsprofiel van een vaarweg moet voldoen, waaronder de diepte. De gewenste minimale diepte van 5,6m is ontleend aan CEMT–klasse VIa. Daarmee is het voorbeeld van een rivier waarin een minimale waterdiepte moet worden gehandhaafd, gerelateerd aan een realistische maat. Afgezien daarvan is de keuze voor dat minimum volstrekt arbitrair.



Figuur 3.4: Schetsmatig voorbeeld van twee in serie geschakelde stuwen om over een afstand van $2L$ een waterdiepte van ten minste $h_{\min}$ te garanderen.



Figuur 3.5: Schematische voorstelling van een netwerk van sloten en kanaaltjes in een polder op het eiland Texel (gebaseerd op metingen die in 2013 door ir. M. Kroon zijn uitgevoerd).

in plaats van één. In het algemeen zal een keuze uit deze en andere denkbare alternatieven worden gemaakt op basis van een afweging van maatschappelijke, economische en milieu-gerelateerde belangen. We gaan hier niet verder op in. Dit voorbeeld is slechts bedoeld om de positie van het ontwerp van een systeem van stuwen in die afweging van belangen te illustreren.

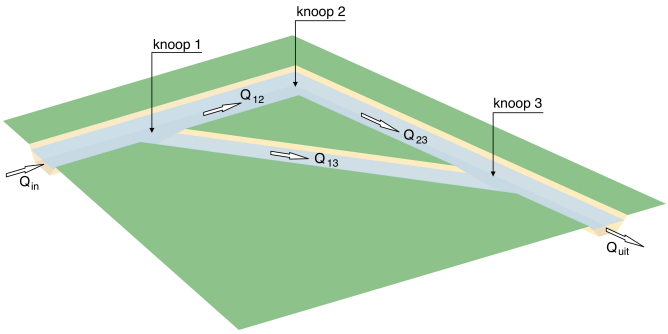
3.2.2 Netwerken van open waterlopen

Het principe van stromingsberekeningen voor netwerken

Stroming in rivieren, kanalen, vaarten en zo meer kenmerkt zich door één dominante stroomrichting. Gemiddeld over de dwarsdoorsnede van zo'n waterloop is de stroming steeds langs de as daarvan. Als we alleen geïnteresseerd zijn in die component van de stroming, kunnen we in berekeningen volstaan met een 1–dimensionale benadering.

In deze paragraaf maken we van die benadering gebruik om de stroming in een netwerk van open waterlopen te beschrijven. Zo'n netwerk zien we als een complex van takken en knopen. Hierin zijn knopen de plaats waar twee of meer takken samenkomen en, complementair, vormen takken de verbinding tussen knopen. Een voorbeeld van een netwerk is gegeven in figuur 3.5.

Voorts beperken we ons tot stationaire stroming en we veronderstellen dat alle



Figuur 3.6: Schets van een eenvoudig netwerk met drie knopen en drie takken.

takken in het netwerk prismatische waterlopen zijn. Voor veel situaties die zich in de praktijk voordoen is dat een tamelijke simplificatie, maar het is geen belemmering om het principe aan te geven van de berekening van de verdeling van debieten over een netwerk. Het voorbeeld waar we naar kijken betreft een netwerk van drie takken die samen een driehoek vormen. De hoekpunten van deze driehoek zijn de knopen in het netwerk. Via twee van de drie knopen is het netwerk verbonden met de buitenwereld. Bij de ene is er een inkomend debiet (Q_{in}) en bij de andere een uitgaand debiet (Q_{uit}). Een schets van dit netwerk is gegeven in figuur 3.6.

Voor de beschrijving van de stroming in dit netwerk maken we gebruik van de al eerder genoemde behoudswetten met betrekking tot volume (continuïteit) en impuls. Continuïteit kunnen we toepassen op de knopen in het netwerk. In de schematisatie is een knoop een punt waar takken samenkomen. Als we de schematisatie van het netwerk zo definiëren dat een knoop geen bergende capaciteit heeft (maar takken wel), dan moet voor elke knoop gelden dat op elk moment de som van de debieten vanuit aangesloten takken gelijk is aan nul. Toegepast op de drie knopen van het netwerk dat is geschetst in figuur 3.6 leidt dit tot

$$\begin{array}{lllll} Q_{in} & -Q_{12} & -Q_{13} & & = 0 \\ & +Q_{12} & & -Q_{23} & = 0 \\ & & +Q_{13} & +Q_{23} \quad -Q_{uit} & = 0 \end{array} \tag{3.27}$$

voor achtereenvolgens de knopen 1, 2 en 3. Voor een voorgeschreven in– of uitstroomdebiet (Q_{in} of Q_{uit})[11] is dit een stelsel van drie vergelijkingen met vier onbekende debieten. Het lijkt wellicht aantrekkelijk om daaraan tegemoet te komen door $Q_{in} - Q_{uit} = 0$ aan toe te voegen. Dat moet immers gelden als in het gehele netwerk sprake is van stationaire stroming. Dat is echter geen nieuwe informatie. Als we de drie vergelijkingen in (3.27) bij elkaar optellen, vinden we precies hetzelfde. Om de debieten te kunnen bepalen, is dus nog een vergelijking nodig.

Die ontbrekende vergelijking is te vinden in de overweging dat met betrekking

[11] Bedenk dat de continuïteitsvergelijking een differentiaalvergelijking is waar een randvoorwaarde bij hoort, anders is die slechts oplosbaar op een constante na. Het voorschrijven van een in– of uitstroomdebiet is zo'n randvoorwaarde.

tot waterstanden in de knopen een soortgelijke consistentie moet bestaan als voor debieten. Een knoop is niet alleen het punt waar de som van alle debieten van en naar aangesloten takken gelijk moet zijn aan nul, maar ook het punt waar de waterstanden in die takken aan elkaar gelijk zijn. De waterstand in het uiteinde van een tak waar die aansluit op een knoop, is altijd identiek aan de waterstand in die knoop. Een belangrijke consequentie hiervan is dat vervallen over takken met elkaar in balans moeten zijn. In termen van het netwerk in figuur 3.6 betekent dit dat het verval over de tak tussen knopen 1 en 3 gelijk moet zijn het verval over de tak tussen knopen 1 en 2, plus het verval over de tak tussen knopen 2 en 3. Een beetje plastisch uitgedrukt komt dit erop neer dat het niet uitmaakt of je rechtstreeks van knoop 1 naar knoop 3 gaat of met een omweg via knoop 2. In beide gevallen met je in knoop 3 op dezelfde waterstand uitkomen.

Als $\Delta\zeta_{kj}$ het verval is over de tak tussen knopen k en j ($\Delta\zeta_{kj}, = \zeta_j - \zeta_k$), dan moet op basis van de voorgaande redenering gelden dat

$$\Delta\zeta_{13} = \Delta\zeta_{12} + \Delta\zeta_{23} \tag{3.28}$$

Hoewel geen van deze drie $\Delta\zeta$ bekend is, is dit in essentie de ontbrekende vergelijking omdat elke $\Delta\zeta$ direct gerelateerd is aan het debiet in de betreffende tak.

In het geval van stationaire stroming en als elke tak, zoals vooraf aangenomen, een prismatische waterloop is, dan moet per tak gelden dat

$$0 = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} - c_f\frac{u|u|}{h} \tag{3.29}$$

waarin u de over de dwarsdoorsnede van de tak gemiddelde stroomsnelheid en x een coördinaat langs de as van de tak. Voor stationaire stroming in een prismatische waterloop reduceert continuïteit tot $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 0$. Invullen in de impulsbalans voor stationaire stroming levert bovenstaande vergelijking. Dit is te schrijven als

$$u|u| = -\frac{g}{c_f}hi \tag{3.30}$$

waarin $i = \mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}x$ (met ζ het niveau van het wateroppervlak). Dit is ook te schrijven als $u|u| = C_h^2 hi$ (zie paragraaf 2.4). En in termen van het debiet Q in een tak wordt dit $Q|Q| = C_h^2 A^2 hi$ (met A het oppervlak van de natte dwarsdoorsnede van de tak).

We passen dit toe op de tak tussen knopen k en j. Het debiet in die tak noteren we als Q_{kj} en de volgorde van de indices geeft de richting van de stroming aan. Q_{kj} is het debiet van knoop k naar knoop j. Met deze definitie is steeds $Q_{kj} = -Q_{jk}$. Op overeenkomstige manier noteren we het verhang in de tak tussen knopen k en j als $i_{kj} = \Delta\zeta_{kj}/L$, waarin L de lengte van de tak is en $\Delta\zeta_{kj} = \zeta_j - \zeta_k$ is het verval over de tak (ζ_j is de waterstand in knoop j en ζ_k die in knoop k). Ingevuld in de gereduceerde impulsbalans en uitgedrukt in termen van het debiet Q, levert

dit

$$Q_{kj}|Q_{kj}| = w_{kj}(\zeta_j - \zeta_k) \quad ; \quad w_{kj} = -\left(\frac{C_h^2 A^2 h}{L}\right)_{kj} \tag{3.31}$$

Combinatie met (3.28) geeft

$$\frac{1}{w_{12}}Q_{12}|Q_{12}| + \frac{1}{w_{23}}Q_{23}|Q_{23}| - \frac{1}{w_{13}}Q_{13}|Q_{13}| = 0 \tag{3.32}$$

Samen met (3.27) vormt (3.32) een stelsel van vier vergelijkingen waaruit voor een voorgeschreven Q_{in} of Q_{uit} de andere debieten kunnen worden berekend[12].

Omdat (3.32) niet-lineair is in de debieten Q en er bovendien absolute waarden van die debieten in voorkomen, kunnen er meerdere oplossingen zijn waarvan er hooguit één fysisch relevant kan zijn. Ter illustratie werken we de vier vergelijkingen voor het netwerk van figuur 3.6 uit.

Uit (3.27) volgt dat

$$\begin{aligned} Q_{23} &= Q_{12} \\ Q_{13} &= Q_{in} - Q_{12} \end{aligned} \tag{3.33}$$

waarmee we Q_{13} en Q_{23} hebben uitgedrukt in de voorgeschreven Q_{in} en de voorlopig nog onbekende Q_{12}. Invullen in (3.32) leidt tot

$$\left(\frac{1}{w_{12}} + \frac{1}{w_{23}}\right) Q_{12}|Q_{12}| - \frac{1}{w_{13}}(Q_{in} - Q_{12})|Q_{in} - Q_{12}| = 0 \tag{3.34}$$

Hierin is Q_{12} de enige onbekende. We schrijven deze vergelijking als

$$aQ_{12}^2 - b(Q_{in} - Q_{12})^2 = 0 \tag{3.35}$$

waarin de coëfficiënten a en b mede afhangen van het teken van Q_{12} en $Q_{in} - Q_{12}$:

$$a = \begin{cases} -\dfrac{1}{w_{12}} - \dfrac{1}{w_{23}} & \text{als} \quad Q_{12} < 0 \\ \dfrac{1}{w_{12}} + \dfrac{1}{w_{23}} & \text{als} \quad Q_{12} \geq 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

en

$$b = \begin{cases} -\dfrac{1}{w_{13}} & \text{als} \quad Q_{in} - Q_{12} < 0 \\ \dfrac{1}{w_{13}} & \text{als} \quad Q_{in} - Q_{12} \geq 0 \end{cases} \tag{3.37}$$

De oplossing van (3.35) is

$$Q_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{ab}}{a - b} Q_{in} \tag{3.38}$$

[12] In plaats van Q_{in} of Q_{uit} kan natuurlijk ook een van de andere debieten voorgeschreven zijn, maar dat ligt minder voor de hand.

Als a en b een verschillend teken hebben, is de uitkomst complex. Als oplossing voor de verdeling van debieten in het netwerk heeft die uitkomst geen betekenis. Op grond hiervan zijn twee van de vier mogelijke combinaties van a en b niet relevant. De andere twee zijn a en b beide positief en a en b beide negatief.

Het eerste geval (a en b positief) doet zich voor als $Q_{12} < 0$ en $Q_{in} - Q_{12} < 0$ (bedenk hierbij dat alle w per definitie negatief zijn). In dit geval is er een stroming van knoop 2 naar knoop 1 en ook van 3 naar 2 en van 3 naar 1. Dat kan alleen als $Q_{in} < 0$, dus als er in knoop 1 geen stroming het netwerk in is, maar juist eruit.

In het tweede geval (a en b beide negatief) zijn de stroomrichtingen tegengesteld aan die in het eerste geval en is Q_{in} een stroming het netwerk in, zoals de naam suggereert.

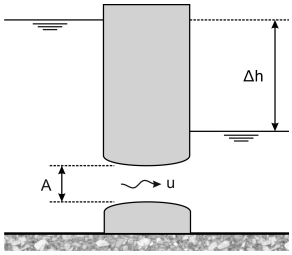
Ter afsluiting van deze beschouwing van netwerken van open waterlopen nog twee opmerkingen[13]:

- Ook bij complexe netwerken geldt continuïteit in alle knopen. Ook de consistentie met betrekking tot waterstanden in knopen en vervallen over takken (wat in het voorbeeld van het netwerk in figuur 3.6 is weergegeven met (3.28)), geldt bij complexe netwerken. Daarmee is echter niet gezegd dat de verdeling van debieten over een netwerk in het algemeen door algebraïsche manipulatie kan worden gereduceerd tot één vergelijking. Voor het netwerk in deze paragraaf is dat toevallig zo omdat het bestaat uit drie takken die samen één gesloten polygoon vormen.
- Consistentie met betrekking tot waterstanden in knopen en vervallen over takken is ook aan de orde als de takken van het netwerk geen prismatische waterlopen zijn en/of sprake is van instationaire stroming. De berekening van waterstanden en debieten is echter aanzienlijk bewerkelijker omdat voor elke tak het debiet en de waterstand als functie van de plaats langs de as van de waterloop moeten worden bepaald (en bij instationaire stroming ook als functie van de tijd) door de volledige 1–dimensionale impulsbalans en continuïteitsvergelijking op te lossen.

Overlaten, onderspuiers en andere obstakels

Het netwerk van sloten en kanaaltjes dat in figuur 3.5 is geschetst, bevat naast waterlopen ook enkele overlaten, een gemaal en bergingsgebieden die voor het beheer van de waterkwantiteit van belang zijn. De principe aanpak voor de berekening

[13] En een derde opmerking is dat extrapolatie van de geschetste methode naar meer complexe netwerken dan het voorbeeld dat is gegeven in figuur 3.6 niet triviaal is. Tegenwoordig is allerhande software beschikbaar voor berekening van de verdeling van de afvoer in complexe netwerken. Veel van die software is gebaseerd op de iteratieve methode die begin vorige eeuw is ontwikkeld door Hardy Cross. In het vakgebied van de constructiemechanica heeft hij voor statisch onbepaalde raamwerken een methode ontwikkeld om de verdeling van momenten over zo'n raamwerk te berekenen (Cross, 1930). Later (Cross, 1936) heeft hij die methode doorontwikkeld voor toepassing op netwerken van waterlopen.



Figuur 3.7: Schematische voorstelling van een onderspuier.

van debieten en waterstanden in het netwerk die in de voorgaande paragraaf is geschetst, voorziet niet in zulke objecten. In deze paragraaf geven we aan hoe overlaten, onderspuiers en overeenkomstige obstakels in die aanpak kunnen worden begrepen. We beperken ons daarbij tot subkritische[14], stationaire stroming in een netwerk waarvan alle takken prismatische waterlopen zijn. Bergingsgebieden laten we buiten beschouwing omdat die alleen een rol spelen bij instationaire stroming. Immers, in een stationaire situatie varieert de hoeveelheid water die in zo'n gebied is geborgen niet met de tijd. Er is dus geen uitwisseling tussen de berging en de rest van het netwerk. Ook het gemaal laten we in deze paragraaf buiten beschouwing. Dat komt in hoofdstuk 10 over energie aan bod.

Het type obstakel waar we in deze paragraaf naar kijken (overlaten, onderspuiers maar ook bijvoorbeeld duikers en bruggen waarvan de pijlers een obstakel voor de stroming vormen), is te zien als een lokale vernauwing van de natte dwarsdoorsnede van de waterloop en daarmee als een lokale toename van de weerstand die de stroming ondervindt. In de berekening van de stroming in het netwerk schematiseren we dat tot een plaatselijk verval. In figuur 3.7 is dat geïllustreerd voor een onderspuier.

De aanwezigheid van een obstakel in een tak heeft geen consequenties voor de volumebalans zoals die in (3.27) is gegeven voor het netwerk in figuur 3.6, maar wel op de impulsbalans 3.31 voor de tak waarin het obstakel voorkomt. Het verval $\zeta_j - \zeta_k$ over die tak is immers inclusief het plaatselijke verval over het obstakel.

In termen van energie is het verval over de tak te zien als een reductie van potentiële energie die balans maakt met de dissipatie van energie als gevolg van weerstand. In aanwezigheid van een obstakel in de tak, bestaat die weerstand uit een combinatie van bodemwrijving en energieverlies rond het obstakel.

Als het obstakel zich in de tak tussen de knopen k en j bevindt, dan is de impulsbalans voor die tak

$$Q_{kj}|Q_{kj}| = w_{kj}(\zeta_j - \zeta_k - \Delta\zeta_{\text{obstakel}}) \quad ; \quad w_{kj} = -\left(\frac{C_h^2 A^2 h}{L}\right)_{kj} \tag{3.39}$$

waarbij $\Delta\zeta_{\text{obstakel}}$ gelijk is aan $\pm\Delta h$ in figuur 3.7, afhankelijk van het teken van Q_{kj}. Als de stroming van knoop k naar knoop j is, is $\zeta_j - \zeta_k < 0$ en dus is

[14] Hiermee blijven bijvoorbeeld volkomen overlaten buiten beschouwing. Voor het principe van de berekening maakt dat niet uit. De uitwerking is wel anders.

$\Delta\zeta_{\text{obstakel}} = -\Delta h$. Bij stroming in omgekeerde richting is $\zeta_j - \zeta_k > 0$ en daarbij hoort $\Delta\zeta_{\text{obstakel}} = +\Delta h$. Dit onderscheid heeft geen fysische betekenis; het gaat puur om consistentie in de mathematische beschrijving van de stroming.

In veel praktisch relevante situaties kan, althans ingeval van subkritische stroming, het verval $\Delta\zeta_{\text{obstakel}}$ over een obstakel worden geschreven als

$$\Delta\zeta_{\text{obstakel}} = -\mu\frac{Q|Q|}{2gA_d^2} \tag{3.40}$$

waarin Q het debiet door of langs het obstakel, A_d een maat voor het doorstroomoppervlak en μ een dimensieloze wrijvingscoëfficiënt. Formules voor de stroming bij een onvolkomen overlaat, onderspuier of duiker hebben deze vorm en de grootte van μ is afhankelijk van de vormgeving van het obstakel. Doorgaans is μ van de orde 1. Als het alleen gaat om het effect van wrijving weer te geven, is $\mu < 1$, maar soms wordt μ ook gebruikt om benaderingen in de beschrijving van de stroming door het obstakel te verdisconteren en dan kan μ iets groter zijn dan 1.

Bij stationaire stroming in het netwerk is het debiet Q door het obstakel altijd gelijk aan het debiet in de tak waarin dat obstakel zich bevindt. Als dat de tak tussen de knopen k en j is, dan is de Q in (3.40) gelijk aan Q_{kj}. Na combinatie met (3.39) leidt dit tot

$$\begin{aligned} Q_{kj}|Q_{kj}| &= w_{kj}(\zeta_j - \zeta_k - \Delta\zeta_{\text{obstakel}}) \\ &= w_{kj}(\zeta_j - \zeta_k) - w_{kj}\Delta\zeta_{\text{obstakel}} \\ &= w_{kj}(\zeta_j - \zeta_k) + w_{kj}\mu\frac{Q_{kj}|Q_{kj}|}{2gA_d^2} \\ &= w_{kj}(\zeta_j - \zeta_k)\left(1 - \mu\frac{w_{kj}}{2gA_d}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{3.41}$$

Bedenk hierbij dat

$$0 < \left(1 - \mu\frac{w_{kj}}{2gA_d}\right)^{-1} < 1 \tag{3.42}$$

omdat per definitie $w_{kj} < 0$ (zie (3.39)). Dit betekent dat, conform verwachting, $|Q_{kj}|$ met een obstakel in de tak tussen knopen k en j kleiner is dan zonder obstakel (althans bij gelijk verval $\zeta_j - \zeta_k$).

Met (3.41) hebben we het debiet in een tak met een obstakel op dezelfde manier geschreven als we dat eerder in (3.39) hebben gedaan voor een tak zonder obstakel. Het enige verschil is dat de weerstandsfactor w is aangepast om het effect van het obstakel weer te geven. Zonder obstakel is

$$w_{kj} = -\left(\frac{C_h^2 A^2 h}{L}\right)_{kj} \tag{3.43}$$

(zie (3.39)) en met obstakel (ter onderscheid aangegeven met een *) is dat

$$w_{kj}^* = w_{kj}\left(1 - \mu\frac{w_{kj}}{2gA_d}\right)^{-1} \tag{3.44}$$

(zie (3.41)).

3.3 Stroming in gesloten leidingen

3.3.1 Berekening van de stroming

Het wezenlijke verschil tussen stroming in open en gesloten leidingen is dat er bij open leidingen een vrij oppervlak is en bij gesloten leidingen niet. Dat betekent dat een buis die niet tot de spreekwoordelijke nok toe gevuld is met vloeistof, in de context van het beschrijven van de stroming geen gesloten leiding is. Bij normaal functioneren is een drinkwaterleiding in deze zin wel een gesloten leiding, maar een rioolbuis doorgaans niet[15].

Net als bij open leidingen kan de stroming in een gesloten leiding worden beschreven met continuïteit in combinatie met behoud van impuls of energie. In het navolgende doen we beide, te beginnen met behoud van impuls om de analogie met een open waterloop te schetsen waar het gaat om de invloed van wandwrijving.

In paragraaf 2.4 is de impulsbalans afgeleid voor stationaire (turbulente) stroming in een prismatische open waterloop:

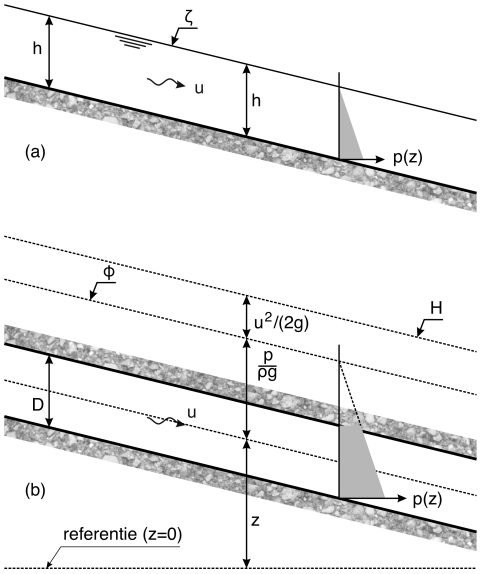
$$u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} - c_f\frac{u|u|}{h}$$

(zie (2.31)). Hierin is ζ het niveau van het vrije oppervlak.

Deze uitdrukking geldt niet voor een gesloten leiding. Daar is immers geen vrij oppervlak en de grootheid ζ heeft dan geen betekenis. In plaats daarvan kijken we naar het niveau van een fictief vrij oppervlak, de hoogte die het water zou bereiken als het niet opgesloten zou zitten in een leiding. Die hoogte wordt de stijghoogte ϕ genoemd.

Ter illustratie zijn in figuur 3.8 langsdoorsneden geschetst van een deel van een open en een deel van een gesloten leiding. Aan het oppervlak van de open leiding (figuur 3.8a) is de druk gelijk aan nul. Daar geldt dat $\zeta = \phi$. Vanaf het oppervlak naar beneden neemt de druk $p(z)$ lineair toe met de afstand tot dat oppervlak.

[15]Transport van afvalwater gaat meestal onder vrij verval, zoals bij stroming in een open waterloop. De buis is deels gevuld en er is een vrij oppervlak. Dat een buis wordt gebruikt, heeft te maken met hygiëne en de mogelijkheid om het afvalwater ondergronds te transporteren. Soms wordt wel een (vrijwel) volledig gevulde buis toegepast, bijvoorbeeld als die omgeven is door grondwater. Daarmee wordt voorkomen dat grondwater naar binnen lekt.



Figuur 3.8: Vergelijking van een open (a) en een gesloten (b) leiding.

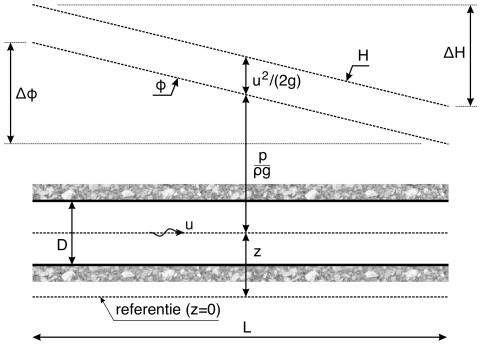
In de gesloten leiding (figuur 3.8b) verloopt de druk $p(z)$ ook lineair, maar aan de bovenkant van de leiding is de druk groter dan nul (met uitzondering van het kritische geval waarbij de druk daar juist gelijk is aan nul). De stijghoogte ϕ wordt gevonden door extrapolatie van dat drukverloop naar boven tot nul. Als op enige hoogte z ten opzichte van een willekeurige referentie, de druk in de gesloten leiding gelijk is aan $p(z)$, dan is de stijghoogte $\phi = z + p(z)/(\rho g)$ ten opzichte van dezelfde referentie.

Waar $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}x$ in de impulsbalans voor open waterlopen een maat is voor de drukgradiënt, is $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x$ dat bij gesloten leidingen. Als het bovendien een prismatische leiding betreft, geldt met continuïteit dat $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 0$ en reduceert de impulsbalans tot

$$0 = -g\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} - c_f\frac{u|u|}{D} \tag{3.45}$$

waarin D de diameter van de leiding is. Bij een leiding met een cirkelvormige doorsnede, is D de diameter van de cirkel. Bij andere vormen van de doorsnede kan het om een equivalente diameter gaan (dat is de diameter van een cirkel waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van de werkelijke doorsnede). Voorts is c_f in dit geval een wrijvingsfactor die gerelateerd is aan de wandruwheid van de leiding en ook aan de vorm van de doorsnede.

Deze impulsbalans geeft het verband tussen de lokale drukgradiënt en de lokale wrijving in een gesloten leiding. Bij de beschrijving van stroming in zulke leidingen is het echter gebruikelijk om integraal te kijken naar secties die over de volle lengte prismatisch zijn. In zo'n sectie zijn alle grootheden in (3.45) constant. Integratie



Figuur 3.9: Verval over een prismatische leiding met lengte L in termen van de stijghoogte ϕ en de energiehoogte H.

van deze balans over de lengte L van de sectie geeft

$$\Delta\phi = -\frac{c_f}{g}\frac{L}{D}u|u| = -2c_f\frac{L}{D}\frac{u|u|}{2g} \quad ; \quad \Delta\phi = L\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \tag{3.46}$$

Hierin is $\Delta\phi$ het verval over de sectie van de gesloten leiding.

Met de schrijfwijze helemaal rechts in (3.46) hebben we, afgezien van de absolute waarde die erin voorkomt, het verval $\Delta\phi$ gerelateerd aan de snelheidshoogte $u^2/(2g)$ in de sectie van de leiding. In paragraaf 2.3 is dit begrip geïntroduceerd als een maat (met de dimensie van lengte) voor kinetische energie. Samen met de drukhoogte $p/(\rho g)$ en de plaatshoogte z vormt het de energiehoogte H volgens

$$H = \frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} \tag{3.47}$$

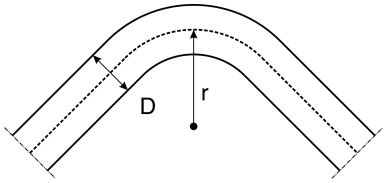
(zie ook (2.16)).

Omdat de sectie van de leiding waar we naar kijken prismatisch is, is de stroomsnelheid over de hele lengte van die sectie gelijk en dat geldt dus ook voor de snelheidshoogte. Het verschil tussen H en ϕ is zodoende constant en dus is $\Delta\phi = \Delta H$, met ΔH het verval in termen van energiehoogte (zie figuur 3.9). Als we dit combineren met (3.46), kunnen we schrijven dat

$$\Delta H = 2c_f\frac{L}{D}\frac{u^2}{2g} \tag{3.48}$$

waarin ΔH moet worden gezien als de grootte van de verandering van de energiehoogte over een prismatische leiding met lengte L als gevolg van wandwrijving.

Voor de berekening van de stroming in gesloten leidingen is het karakter van bovenstaande uitdrukking van belang. Volgens die uitdrukking is het energieverlies (ΔH) als gevolg van wrijving evenredig met de snelheidshoogte. Dit type evenredigheid blijkt op te gaan voor tal van verliezen die zich in gesloten leidingen



Figuur 3.10: Definitie van de bochtstraal r in uitdrukking (3.50).

voor kunnen doen. Dit laat toe dat het totale verval ΔH (in termen van energiehoogte) over een leiding waarin zich een reeks van verliezen voordoet, te schrijven als

$$\Delta H = \sum_i \xi_i \frac{u_i^2}{2g} \tag{3.49}$$

waarin de index i verwijst naar een specifieke bijdrage aan het totale verlies en de ξ_i zijn zogeheten verliescoëfficiënten. Als we bijvoorbeeld kijken naar het energieverlies als gevolg van wandwrijving in een prismatische gesloten leiding met lengte L en diameter D, dan is de bijbehorende verliescoëfficiënt volgens (3.48) gelijk aan $\xi = 2c_f L/D$. Kwantificering van de de factor $2c_f$ voor wandwrijving in buisleidingen komt in de volgende paragraaf aan bod.

Naast wandwrijving noemen we nog verliezen ten gevolge van verwijding of vernauwing van de stroming (paragraaf 3.3.3) en bij bochten in een leiding. Voor leidingen met een cirkelvormige doorsnede wordt het bochtverlies benaderd door de empirische relatie

$$\xi_{\text{bocht}} = 0,13 + 0,16 \left(\frac{r}{D}\right)^{-3,5} \tag{3.50}$$

waarin r de bochtstraal is (zie figuur 3.10). De toepasbaarheid van deze benadering is onder meer beperkt door het ontbreken van de invloed van de bochthoek. Voor een beschrijving van deze en diverse andere bocht- en knikverliezen wordt verwezen naar STOWA (2012).

3.3.2 Invloed van wandwrijving

De verliescoëfficiënt ξ_{wand} voor wandwrijving in gesloten leidingen met een cirkelvormige doorsnede wordt gegeven door

$$\xi_{\text{wand}} = \lambda \frac{L}{D} \tag{3.51}$$

waarin λ een weerstandscoëfficiënt is. In (3.48) zijn we uitgekomen op een factor $2c_f$ vanuit een analogie met stroming in een open waterloop, maar bij gesloten leidingen wordt daarvoor λ gehanteerd.

Naar de grootte van deze weerstandscoëfficiënt is veel, voornamelijk empirisch onderzoek gedaan. Op basis daarvan geeft Colebrook (1939)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{k_s/D}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \right) \tag{3.52}$$

waarin k_s de Nikurandse ruwheid van de leidingwand is (zie tabel 2.1 in paragraaf 2.4) en Re is het getal van Reynolds, gegeven door $\mathrm{Re} = uD/\nu$ (met ν de moleculaire viscositeit van de vloeistof; voor water is dat $10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$).

Dit getal van Reynolds is een dimensieloze maat voor de turbulentie. Als sprake is van volledig ontwikkelde turbulentie (grote Re), is

$$\frac{k_s/D}{3,7} \gg \frac{2,51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \approx -2\log_{10}\left(\frac{k_s/D}{3,7}\right) \tag{3.53}$$

Deze benadering laat zien dat bij volledig ontwikkelde turbulentie, de weerstandscoëfficiënt λ uitsluitend wordt bepaald door karakteristieken van de leiding (ruwheid en diameter) en niet door de stroming zelf. Dat wil zeggen dat het verlies als gevolg van wandwrijving evenredig is met u^2 en dat is consistent met wat in paragraaf 2.4 is gesteld met betrekking tot bodemschuifspanning in open waterlopen. Onder turbulente condities is de grootte van die schuifspanning ook evenredig met u^2.

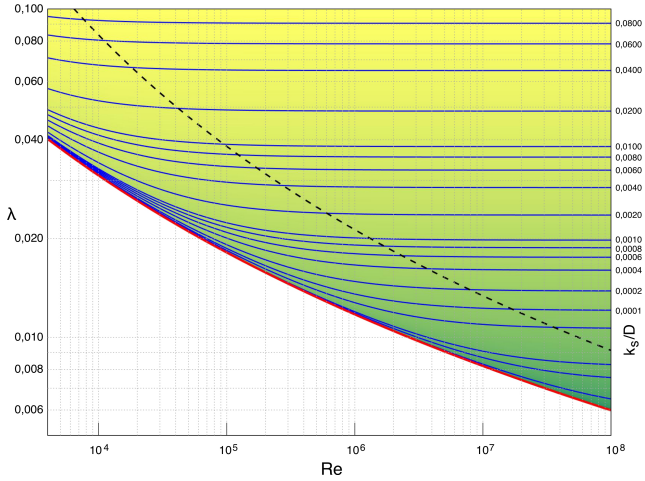
Naarmate de turbulentie afneemt (afnemende Re), blijkt λ in toenemende mate afhankelijk te zijn van de stroomsnelheid u. In het uiterste geval van vrijwel volledig laminaire stroming ($\mathrm{Re} < 2000$), is het wrijvingsverlies evenredig met de stroomsnelheid in plaats van het kwadraat daarvan en is $\lambda \propto 1/u$ (het product van λ en de snelheidshoogte is dan evenredig met u). Langs empirische weg is afgeleid dat voor laminaire stroming $\lambda = 64/\mathrm{Re}$ en dat is inderdaad evenredig met $1/u$.

In het traject tussen volledig laminair en volledig turbulent worden met betrekking tot kwantificatie van wrijvingsverliezen twee gebieden onderscheiden. Een daarvan wordt de kritische zone genoemd en daar is ongeveer $2000 < \mathrm{Re} < 4000$. Deze zone kenmerkt zich door instabiele stroming. Uitdrukking (3.52) is hier niet van toepassing.

Het andere gebied wordt de overgangszone genoemd. Daarin is sprake van een merkbare invloed van de stroomsnelheid op λ en die wordt weergegeven door de rechter term in het argument van de logaritme in uitdrukking (3.52).

Voor praktische toepassingen is het impliciete karakter van uitdrukking (3.52) een nadeel. Met de beschikbaarheid van grafische rekenmachines en meer geavanceerde apparatuur, is dat nadeel tegenwoordig beperkt. In vroeger dagen lag dat echter anders. Om daaraan tegemoet te komen, werden waar mogelijk diagrammen gemaakt met behulp waarvan een oplossing geschat kan worden. Voor (3.52) is dat gedaan door Moody (1944) en diens diagram geldt nog steeds als een standaard. In STOWA (2012), bijvoorbeeld, is een reconstructie van het oorspronkelijke diagram opgenomen en een variant voor $\mathrm{Re} > 4000$ is gegeven in figuur 3.11.

Deze variant toont het verband tussen de wrijvingscoëfficiënt λ enerzijds en de mate van turbulentie (Re) in combinatie met de relatieve wandruwheid (k_s/D) van de gesloten leiding, anderzijds, volgens (3.52). De rode curve in deze figuur betreft de theoretische ondergrens van een wrijvingsloze wand ($k_s = 0$). Het gebied



Figuur 3.11: Variant van het diagram van Moody voor de wrijvingsfactor λ in relatie tot de relatieve wandruwheid k_s/D en het getal van Reynolds Re. De blauwe krommen horen bij specifieke waarden van k_s/D die langs de rechter vertikale as zijn weergegeven. Dit zijn tevens contouren in het kleurverloop van groen (kleine k_s/D) naar geel (grote k_s/D). De rode kromme (onderaan) staat voor de theoretische ondergrens van een oneindig gladde wand ($k_s = 0$).

onder deze curve heeft geen fysische betekenis. De gestreepte curve verbeeldt een min of meer redelijke grens tussen de overgangszone (waar de stroomsnelheid een merkbare invloed heeft op λ) en volledige turbulentie (waar die invloed er niet is). Langs deze curve geldt dat

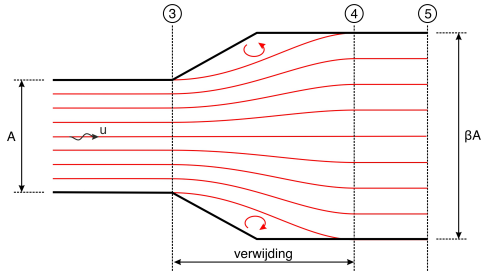
$$\frac{2,51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} = \varepsilon \frac{k_s/D}{3,7} \quad ; \quad \varepsilon = 0,05 \tag{3.54}$$

Naarmate ε kleiner wordt gekozen, komt de gestreepte curve steeds verder naar rechts te liggen in de figuur en ook de vorm wordt enigszins anders. De curve is slechts indicatief en heeft voor de berekening van λ weinig betekenis. De curve wordt wel gebruikt om de geldigheid van benadering (3.53) te controleren. De benadering wordt geaccepteerd als de resulterende schatting van λ hoort bij een punt rechts van de curve.

3.3.3 Verliezen bij verwijding en vernauwing

Naast wandwrijving en bochten zijn ook vertakkingen en verandering van leidingdiameter bronnen van verliezen in systemen van gesloten leidingen. Ook voor zulke verliezen zijn, veelal op basis van empirisch onderzoek, verliescoëfficiënten ξ bepaald, net zoals dat voor bochten is gedaan. In deze paragraaf gaan we in op verliezen die zijn gerelateerd aan verandering van leidingdiameter. Voor effecten van vertakkingen wordt verwezen naar STOWA (2012).

In algemene zin leidt verandering van leidingdiameter tot een conforme verandering van de stroomsnelheid. Als de diameter van een leiding in stroomrichting afneemt, zal de stroomsnelheid toenemen. Uit continuïteit volgt immers dat het debiet in stroomrichting constant is. Voor een vernauwing betekent dit dat in de relatief ruim bemeten leiding bovenstrooms van de vernauwing per eenheid van tijd net zoveel water moet passeren als in de relatief krappe leiding benedenstrooms van



Figuur 3.12: Impressie van het stromingspatroon rond een verwijding in een gesloten leiding. De rode krommen in de figuur staan voor stroomlijnen. Bij de verwijding kan loslating van de stromin optreden en ontstaan neren (aangegeven met de ronde pijlen in de figuur).

de vernauwing. Bij een verwijding geldt het tegenovergestelde. Daar neemt de stroomsnelheid in stroomrichting juist af.

Een vernauwing gaat samen met een versnelling van de stroming en als zich dat afspeelt over een betrekkelijk korte afstand, gaat dat volgens Bernouilli (zie paragraaf 2.3) niet gepaard met noemenswaardige verliezen. Voor een abrupte vertraging ligt dat anders. De turbulentie die daarbij wordt gegenereerd, gaat gepaard met verliezen die doorgaans niet verwaarloosd kunnen worden ten opzichte van de lokaal aanwezige snelheidshoogte. De bijbehorende verliescoëfficiënt ξ is in zulke gevallen niet ongeveer gelijk aan nul.

In deze paragraaf gaan we in op vertragingsverliezen die een direct gevolg zijn van een verruiming, in stroomrichting, van de dwarsdoorsnede van een gesloten leiding, maar ook als indirect gevolg van een verkleining van die doorsnede.

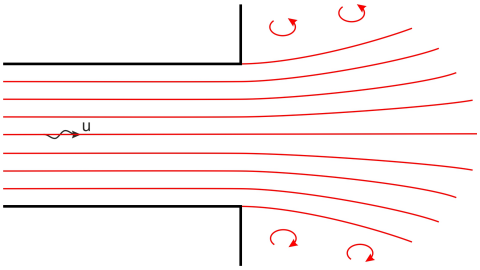
Verwijding

In een buis doet vertraging zich voor als de buisdiameter in stroomrichting toeneemt. Een langsdoorsnede van zo'n verwijding is geschetst in figuur 3.12. De rode krommen in deze figuur zijn stroomlijnen en de stroming is van links naar rechts. In het smalle deel, links van doorsnede ③, zijn de stroomlijnen recht en evenwijdig. De verwijding begint direct rechts van deze doorsnede. Daar treedt loslating van de stroming op en ontstaan neren (aangegeven met de ronde pijlen in de figuur). Dat gaat gepaard met verhoogde turbulentie en dissipatie van energie. Op enige afstand van de verwijding treedt herstel op in de zin dat de stroomlijnen daar weer evenwijdig zijn aan de rechte buiswand (rechts van doorsnede ④ in figuur 3.12).

De omvang van het energieverlies ΔH_c bij vertraging over korte afstand is afhankelijk van de afname van de snelheid en wordt gegeven door de regel van Carnot:

$$\Delta H_c = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g} \tag{3.55}$$

waarin u_1 en u_2 de stroomsnelheden zijn aan weerszijden van de verwijding waarbij de vertraging optreedt. Voor de situatie in figuur 3.12 is één van beide de snelheid links van doorsnede ③ en de andere de snelheid rechts van doorsnede ④.



Figuur 3.13: Bij uitstroming vanuit een gesloten leiding (schematisch weergegeven in het linker deel van de grafiek), neigen stroomlijnen (de rode krommen in de figuur) uit elkaar. Rondom de uitstromende vloeistof ontstaan neren (aangegeven met de ronde pijlen).

Dit energieverlies is te schrijven als het product van een verliescoëfficiënt ξ en de snelheidshoogte voor of na de vertraging. Als we u_1 als referentie kiezen, dan is

$$\Delta H_c = \xi_{c,1} \frac{u_1^2}{2g} \quad ; \quad \xi_{c,1} = \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)^2 \tag{3.56}$$

en met u_2 als referentie vinden we

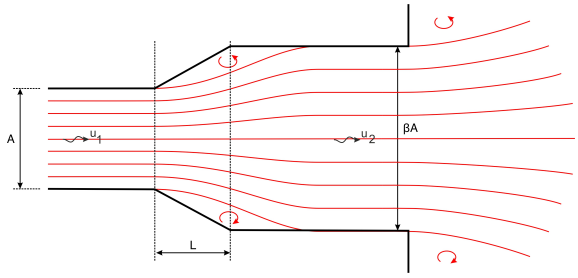
$$\Delta H_c = \xi_{c,2} \frac{u_2^2}{2g} \quad ; \quad \xi_{c,2} = \left(\frac{u_1}{u_2} - 1\right)^2 \tag{3.57}$$

Een veel voorkomend voorbeeld van vertragingsverlies doet zich voor bij de uitstroming van water vanuit een gesloten leiding in een bassin waarvan de afmetingen heel groot zijn in vergelijking tot die van de doorsnede van de leiding (zie figuur 3.13 voor een impressie). In zo'n situatie is de stroomsnelheid in het bassin verwaarloosbaar ten opzicht van die in de leiding en het vertragingsverlies is nagenoeg gelijk aan de snelheidshoogte in de leiding. De snelheidsafname $(u_1 - u_2)$ in de regel van Carnot is dan gelijk aan snelheid in de leiding en ten opzichte van die snelheid is $\xi_c = 1$.

Bij het ontwerp van onder meer gemalen en waterkrachtcentrales (waarover meer in hoofdstuk 10) is beperking van dit zogeheten uitstroomverlies een serieus punt van aandacht. Hoe kleiner dit verlies, hoe kleiner ook de energiebehoefte van een gemaal en hoe groter het rendement van een waterkrachtcentrale. Reductie van het verlies kan worden bereikt door de uitstroming niet zo abrupt te laten verlopen als in figuur 3.13, maar geleidelijk.

Ter illustratie kijken we naar de getrapte uitstroming die is geschetst in figuur 3.14. Dat is een benadering in twee stappen van een geleidelijke verbreding die in de praktijk niet snel zal worden toegepast, maar wel de effectiviteit van het principe laat zien.

In deze getrapte verwijding (en dus ook getrapte vertraging) neemt de stroomsnelheid af van u_1 in het relatief krappe deel van de leiding helemaal links in figuur 3.14 tot u_2 in het ruimere deel van de leiding (in het midden van figuur 3.14) tot uiteindelijk nul voorbij de uitstroming uit dat ruimere deel. We hebben zodoende twee keer te maken met een vertragingsverlies. Gezien in stroomrichting is dat eerst de vertraging door de overgang van de krappe naar de ruime leiding. Deze



Figuur 3.14: Voorbeeld van een diffusor. Die is erop gericht om uitstroming uit een gesloten leiding getrapt (zoals geschetst in de figuur) of continu geleidelijk te laten verlopen. Met toepassing van een diffusor zijn uitstroomverliezen kleiner dan zonder.

noteren we als ΔH_1. De tweede is de uitstroming uit dat ruime deel en die noteren we als ΔH_2. Het totale verlies komt daarmee op $\Delta H_{\text{tot}} = \Delta H_1 + \Delta H_2$. We gaan dit totaal berekenen en vervolgens vergelijken met het verlies dat zich zou voordoen zonder de tussenstap van de relatief ruime leiding.

Volgens Carnot is het verlies ΔH_1 in de overgang van de krappe naar de verruimde leiding gelijk aan

$$\Delta H_1 = \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)^2 \frac{u_1^2}{2g} \tag{3.58}$$

(zie (3.56)).

En voor de uitstroom uit het verruimde deel van de leiding geldt, ook volgens Carnot, dat

$$\Delta H_2 = \frac{u_2^2}{2g} \tag{3.59}$$

Als het oppervlak van de dwarsdoorsnede van het verruimde deel van de leiding een factor β keer zo groot is als dat van het krappe deel (zoals aangegeven in figuur 3.14), dan is vanwege continuïteit $u_2 = u_1/\beta$. We gebruiken dit verband om het totale verlies ΔH_{tot} te relateren aan de snelheidshoogte in het krappe deel van de leiding:

$$\Delta H_{\text{tot}} = \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)^2 \frac{u_1^2}{2g} + \frac{u_2^2}{2g} = \left(1 - \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\beta^2}\right) \frac{u_1^2}{2g} \tag{3.60}$$

Met $\beta > 1$ (anders is er geen sprake van een verwijding) is de term tussen haken in het rechter lid van bovenstaande uitdrukking altijd kleiner dan 1. Dat wil zeggen dat de verliescoëfficiënt voor het vertragingsverlies in deze getrapte uitstroming kleiner is dan 1 (althans in relatie tot de stroomsnelheid in het krappe deel van de leiding).

In afwezigheid van het verruimde deel van de leiding zou het vertragingsverlies gelijk zijn aan $u_1^2/(2g)$. Met andere woorden, de verliescoëfficiënt voor het totale verlies ten opzichte van de stroomsnelheid u_1 zou dan gelijk zijn aan 1. Kortom, de reductie van het uitstroomverlies door toepassing van een getrapte verwijding toont zich in de ongelijkheid

$$1 - \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} < 1 \quad ; \quad \beta > 1 \tag{3.61}$$

De twee-traps reductie is maximaal als $\beta = 2$. Toepassing van meerdere trappen geeft een beter resultaat, maar nog beter is het om de verwijding van de leiding in stroomrichting zo geleidelijk te laten verlopen dat geen loslating van de stroming optreedt. Er ontstaan dan geen neren en daarmee wordt dissipatie van energie door het genereren van turbulentie in belangrijke mate onderdrukt. Een soort vuistregel voor een ronde leiding is dat dit kan worden bereikt als de toename van de straal van de cirkelvormige doorsnede over een lengte L van de leiding niet meer dan $L/7$ toeneemt[16]. Knikken in de wand van de leiding helpen ook niet. De conische overgang zoals geschetst in figuren 3.12 en 3.14 voldoet daar niet aan. Een vorm die lijkt op de langsdoorsnede van een trompet is beter in dit opzicht. Een dergelijke constructie wordt een diffusor genoemd.

Een kanttekening hierbij is dat een streven naar reductie van vertragingsverliezen door toepassing van een diffusor, impliciet een eis stelt aan de minimaal benodigde lengte. Naarmate die lengte toeneemt, neemt ook de invloed van wandwrijving in de diffusor toe en waar het gaat om het beperken van het totaal aan verliezen is dat contra-productief. In dat opzicht is het ontwerp van een diffusor te zien als een optimalisatievraagstuk.

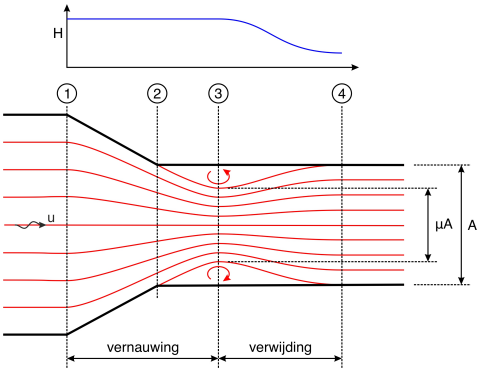
Vernauwing

Als het oppervlak van de dwarsdoorsnede van een gesloten leiding in stroomrichting afneemt, neemt de stroomsnelheid toe. Als dit over betrekkelijk korte afstand gebeurt, zijn wrijvingsverliezen volgen Bernouilli van ondergeschikt belang en treedt geen noemenswaardig verlies van energie op. Daarmee is echter niet gezegd dat geen enkele vernauwing verliezen met zich meebrengt. Eerder in deze paragraaf hebben we gewezen op verliezen, gerelateerd aan de vorming van neren in het geval van het loslaten van stroomlijnen. Bij de overgang van een betrekkelijk ruime leiding naar een krappe, kan zich dat ook voordoen, ook al is er netto sprake van een vernauwing.

Dit verschijnsel is geïllustreerd in figuur 2.1 waarin de langsdoorsnede is geschetst van een leiding waarvan de diameter in stroomrichting afneemt. De rode krommen in deze figuur zijn stroomlijnen.

Links van doorsnede ① in deze figuur zijn de stroomlijnen evenwijdig aan de wand van de leiding. Tussen doorsneden ① en ② neemt de diameter van de leiding in stroomrichting af. Daarbij treedt contractie van de stroming op. Stroomlijnen komen dichter bij elkaar te liggen en, vanwege continuïteit, neemt de stroomsnelheid toe. Net rechts van doorsnede ② in de figuur treedt loslating van de stroming op waarbij contractie in stroomrichting doorgaat. Ter hoogte van doorsnede ③ bereikt de contractie een maximum. Stroomafwaarts daarvan treedt herstel op en vanaf doorsnede ④ lopen de stroomlijnen weer evenwijdig aan de wand van de leiding.

[16]Voor de factor β in figuur 3.14 komt dit neer op $\beta < \sqrt{L/(7\sqrt{A/\pi}) + 1}$ als L de lengte is van dat deel van de leiding waarover de diameter toeneemt.



Figuur 3.15: Bij een vernauwing versnelt de stroming en mits over voldoende korte afstand, zijn de bijbehorende verliezen betrekkelijk klein. Net stroomafwaarts van de vernauwing kan echter wel loslating van de stroming optreden, zoals aangegeven in de figuur (de rode krommen zijn stroomlijnen). In stroomrichting herstelt zich dat, maar dat gaat gepaard met vertraging en bijbehorende verliezen. Ter illustratie is boven de doorsnede van de vernauwing het verloop van de energiehoogte H geschetst. De afname van H tussen ③ en ④ hoort bij de vertraging die in traject optreedt.

Het traject tussen doorsneden ① en ③ kenmerkt zich door contractie van stroomlijnen en dus versnelling van de stroming. Als zich dat over voldoende korte afstand voordoet, is dit het traject waarover volgens Bernouilli geen noemenswaardige verliezen optreden en de energiehoogte constant is. Vanwege de versnelling neemt de snelheidshoogte in dit traject wel toe en dat gaat ten koste van de som van plaats- en drukhoogte.

Tussen doorsneden ③ en ④ vertraagt de stroming en dat gaat gepaard met energieverlies dat we kunnen kwantificeren met de regel van Carnot. Daarvoor kijken we naar de stroomsnelheden in de doorsneden ③ en ④. In doorsnede ③ is de contractie maximaal en dat geldt dus ook voor de stoomsnelheid. Als vanwege die contractie het oppervlak van de dwarsdoorsnede van de leiding in doorsnede ③ effectief een factor μ kleiner is dan het werkelijke oppervlak, dan geldt dat $u_3 = u_4/\mu$, waarbij u_3 de stroomsnelheid in doorsnede ③ en u_4 die in doorsnede ④. Het vertragingsverlies ΔH_c komt daarmee op

$$\Delta H_c = \frac{u_3 - u_4}{2g} = \xi_c \frac{u_4^2}{2g} \quad ; \quad \xi_c = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \tag{3.62}$$

De factor μ wordt de contractiecoëfficiënt genoemd. De grootte van deze factor hangt af van de vormgeving van de overgang van de ene naar de andere dwarsdoorsnede van de leiding. In beginsel gelden hierbij dezelfde overwegingen als bij het ontwerp van een diffusor: hoe geleidelijker of glooiender de overgang, hoe kleiner het vertragingsverlies, zij het met de kanttekening dat bij toenemende lengte van de overgang wandwrijving een steeds grotere rol gaat spelen.

3.4 Waterbeweging rond een varend schip

3.4.1 Theoretische beschouwing

Bij de beschrijving van de waterbeweging rond een varend schip maken we onderscheid tussen primaire en secundaire golven. De boeg- en hekgolven vormen de secundaire golven. De lengte van deze golven is klein ten opzichte van de lengte van

het schip. De lengte van de primaire scheepsgolf daarentegen, is van dezelfde orde van grootte als die van het schip. Het is een enkelvoudige golf die onder normale omstandigheden met het schip meeloopt. In deze paragraaf gaan we kwantitatief in op de primaire golf.

Als een schip vaart, zit het water vlak voor de boeg dat schip in de weg. Het wordt zijdelings door het schip verdrongen. Tegelijkertijd komt achter het schip, juist omdat het zich voortbeweegt, ruimte vrij die door zijdelingse instroom van water wordt opgevuld. Het volume van die vrijkomende ruimte is precies even groot als het volume dat voor de boeg in de weg zit. Samen leidt dit tot een stroming langs het schip, van boeg naar achtersteven. Deze zogeheten retourstroom is bepalend voor de primaire golf die door een varend schip wordt opgewekt.

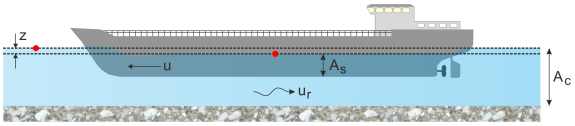
Voor een schip dat met constante snelheid in een prismatische waterweg vaart, kan de primaire golf bij goede benadering worden beschreven op basis van continuïteit en behoud van energie. Deze benadering staat bekend als de methode van Schijf (1949). Hierbij wordt de retourstroom rond het varend schip beschreven ten opzichte van dat schip (en dus niet ten opzichte van de oever) en worden twee dwarsdoorsneden van het kanaal met elkaar vergeleken.

Een van die doorsneden wordt gekozen op enige afstand voor de boeg van het schip. We nemen aan dat de waterbeweging in deze doorsnede niet wordt beïnvloed door het schip. In deze doorsnede is de (over de doorsnede gemiddelde) snelheid van het water gelijk aan u. Dit is de snelheid waarmee een waarnemer op het schip het water op zich af ziet komen.

In het bijzondere geval dat het water in waterweg niet beweegt ten opzichte van de oever, is u tevens de snelheid waarmee het schip zich ten opzichte van die oever beweegt, zij het in tegengestelde richting. Omdat in de methode van Schijf het schip als referentie wordt gekozen, is het de oever die ten opzichte van het schip beweegt en dat geldt dan ook voor het water. Een voordeel van deze aanpak is dat de methode onverkort kan worden toegepast op een schip dat vaart in een waterweg met stromend water, dus ook als het water beweegt ten opzichte van de oever. Het verschil is dat bij stromend water, de snelheid van het water ten opzichte van het schip niet gelijk is aan die van de oever ten opzichte het schip. Als het schip tegen de stroming in vaart, is ten opzichte van het schip de snelheid van het water groter dan die van de oever. ls het schip stroomafwaarts vaart, is dat juist omgekeerd.

Voor toepassing van de methode van Schijf maakt het niet uit of het schip met de stroom mee vaart of er tegenin. Alleen de beweging van het water ten opzichte van het schip is van belang voor de kwantitatieve beschrijving van de waterbeweging rond het schip.

En, zoals gesteld, komt dat water in een doorsnede op enige afstand voor de boeg van het schip met een snelheid u op dat schip af. Als op die plaats A_c het oppervlak van de natte doorsnede van de waterweg is, is sprake van een debiet $Q = uA_c$ naar het schip toe.



Figuur 3.16: Indicatie van de natte dwarsdoorsnede A_c van de waterloop, het deel A_s daarvan dat door een varend schip in beslag wordt genomen, de stroomsnelheden u voor het schip en $u + u_r$ naast het schip (beide ten opzichte van het schip) en de spiegeldaling z.

We maken nu de stap naar de andere dwarsdoorsnede van de waterweg waar in de methode van Schijf naar wordt gekeken. Deze wordt gekozen ter hoogte van het grootspant[17] van het schip.

In deze doorsnede is de snelheid van het water ten opzichte van het schip groter dan u. Hier doet zich immers de eerder genoemde retourstroom voor. De bijbehorende stroomsnelheid noteren we met u_r. Daarmee komt de totale stroomsnelheid in deze doorsnede en ten opzichte van het schip op $u + u_r$.

Ook voor deze doorsnede kunnen we het debiet bepalen. Daarbij moeten we er rekening mee houden dat het oppervlak van de natte dwarsdoorsnede van de waterweg afwijkt van die vóór het schip omdat een deel van die dwarsdoorsnede in beslag wordt genomen door het schip. Dat deel noteren we met A_s (zie figuur 3.16). Bovendien kan de waterstand in deze doorsnede afwijken van die in de doorsnede voor het schip. Met de afstand z (ook aangegeven in figuur 3.16) geven we aan hoeveel de waterstand in de dwarsdoorsnede ter hoogte van het grootspant lager is dan die in de dwarsdoorsnede voor de boeg van het schip. Dit wordt de spiegeldaling genoemd. Op de reden om deze te introduceren, komen we verderop in deze paragraaf terug.

Zo redenerend is de natte oppervlakte van de dwarsdoorsnede ter hoogte van het groot-spant van het schip gelijk aan $A_c - A_s - Bz$. Hierin is B de zogeheten spiegelbreedte van de waterweg. Dat is de breedte van de waterweg, gemeten langs de waterspiegel. Impliciet veronderstellen we hierbij dat de oevers van de waterweg rond de waterspiegel verticaal zijn. Als die oevers voorzien zijn van een verticale beschoeiing, is dat juist. Bij taluds is de bijbehorende fout doorgaans klein ten opzichte van $A_c - A_s$.

Met een oppervlak van $A_c - A_s - Bz$ en een stroomsnelheid $u + u_r$ is het debiet dat het schip passeert gelijk aan $(A_c - A_s - Bz)(u + u_r)$.

Vanwege continuïteit moet het debiet Q dat op het schip afkomt, ook de doorsnede bij het grootspant passeren. Er moet zodoende gelden dat

$$Q = uA_c = (u + u_r)(A_c - A_s - Bz) \tag{3.63}$$

[17] De primaire constructie van traditionele schepen bestaat uit een reeks spanten dwars op de kiel van het schip. Van boeg naar steven neemt de afmeting van deze spanten eerst toe, tot circa midscheeps, en daarna weer af. Het grootspant is het spant waarbij de natte dwarsdoorsnede van het schip het grootst is. Ter hoogte van dit grootspant neemt het schip maximaal ruimte in beslag in de dwarsdoorsnede van het kanaal.

Een waterdeeltje dat zich aan het wateroppervlak bevindt (aangegeven met de rode stip in figuur 3.16), ondervindt op de route van de doorsnede voor de boeg van het schip naar de doorsnede ter hoogte van het grootspant, een versnelling van u naar $u + u_r$. Dat wil zeggen dat de kinetische energie van dat waterdeeltje toeneemt. In de redenering van Schijf gaat die toename ten koste van de potentiële energie en dat gaat gepaard met een verplaatsing over enige afstand in de richting van de zwaartekracht. Die afstand is de spiegeldaling z.

Om die afstand z te kunnen berekenen, wordt in de methode van Schijf de wet van Bernouilli toegepast. Volgens die wet zijn wrijvingsverliezen verwaarloosbaar als zich in een stroming over betrekkelijk korte afstand en langs een stroombaan een versnelling voordoet. Dat is van toepassing op het waterdeeltje in het wateroppervlak dat we hebben gevolgd van de dwarsdoorsnede voor de boeg van het schip naar die ter hoogte van het grootspant.

Als ζ de waterstand in de doorsnede voor de boeg van het schip is (ten opzichte van een willekeurige referentie), dan is de potentiële energie van het waterdeeltje op die locatie gelijk aan $mg\zeta$, waarbij m de massa van dat deeltje en g de versnelling van de zwaartekracht. Op diezelfde locatie is $mu^2/2$ de kinetische energie. De totale energie E_1 van het deeltje voor de boeg van het schip komt daarmee op

$$E_1 = mg\zeta + \frac{1}{2}mu^2 \tag{3.64}$$

Op dezelfde manier kunnen we de totale energie E_2 van het deeltje in kaart brengen als het zich bevindt in de dwarsdoorsnede van de waterweg bij het grootspant van het schip:

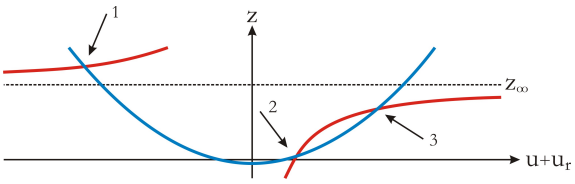
$$E_2 = mg(\zeta - z) + \frac{1}{2}m(u + u_r)^2 \tag{3.65}$$

en vanwege Bernouilli met gelden dat $E_1 = E_2$, zodat

$$mg\zeta + \frac{1}{2}mu^2 = mg(\zeta - z) + \frac{1}{2}m(u + u_r)^2 \tag{3.66}$$

Als de geometrie van het kanaal (samengevat in A_c en B), die van het schip (A_s) en de snelheid u van het water ten opzichte van het schip bekend zijn, zijn alleen de retourstroomsnelheid u_r en de spiegeldaling z onbekend. Om die beide onbekenden op te lossen zijn twee vergelijkingen nodig en in de methode van Schijf zijn dat de continuïteitsvergelijking (3.63) en behoud van energie volgens Bernouilli (3.66).

Omdat beide vergelijkingen niet-lineair in zowel u_r als z zijn, ligt de oplossing minder voor de hand dan het wellicht lijkt. Dat valt in te zien door de vergelijkingen te herschrijven in een vorm waarbij de spiegeldaling z afhankelijk is van de



Figuur 3.17: Spiegeldaling z als functie van de totale stroomsnelheid $u + u_r$ rondom een varend schip op basis van continuïteit (rood) en energiebehoud (blauw).

snelheid u_r van de retourstroom. Dit geeft

$$z = \frac{1}{B}\left(A_c - A_s - \frac{uA_c}{u+u_r}\right) \tag{3.67}$$

$$z = \frac{(u+u_r)^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} \tag{3.68}$$

Voor verdere uitwerking is het makkelijk om z niet te zien als een functie van u_r maar van $u+u_r$. Aangezien u bekend wordt verondersteld, komt dat op hetzelfde neer.

In grafische zin heeft de functie $z = z(u+u_r)$ op basis van continuïteit (3.67) de vorm van een hyperbool en voor energiebehoud (3.68) is dat een parabool. Dit is weergegeven in figuur 3.17. De horizontale streepjeslijn met de aanduiding z_∞ in deze figuur is de horizontale asymptoot die hoort bij (3.67): $z_\infty = (A_c - A_s)/B$.

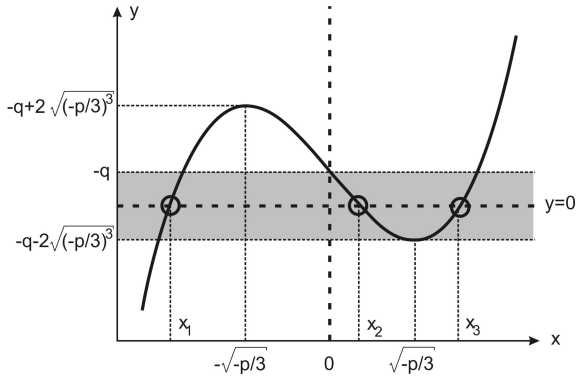
Kennelijk zijn er drie snijpunten waarvan er slechts één fysisch relevant kan zijn voor een varend schip (aangenomen dat de redenering van Schijf de werkelijkheid adequaat weergeeft). Bij snijpunt 1 is $u + u_r < 0$. Omdat we snelheid van het water naar het schip toe positief hebben gekozen, kan $u + u_r < 0$ alleen optreden als $u_r < 0$ en dat zou betekenen dat de richting van de retourstroom gelijk is aan de vaarrichting van het schip in plaats van daar tegenin. Snijpunt 1 komt zodoende wel overeen met een oplossing van (3.67) en (3.68), maar heeft voor het verschijnsel waar we naar kijken geen betekenis.

Interpretatie van de andere twee snijpunten ligt minder voor de hand. Het is in theorie zelfs mogelijk dat de snijpunten 2 en 3 zich niet voordoen. Dat treedt op als de hyperbool lager zou liggen dan die in figuur 3.17, dus voor voldoende kleine z_∞. Kleiner dan nul kan z_∞ overigens niet worden. Immers, $z_\infty = 0 \implies A_s = Ac$ en dat betekent dat het schip naadloos in de dwarsdoorsnede van de waterweg past.

Voor een interpretatie van de snijpunten 2 en 3 berekenen we $u+u_r$ door eliminatie van de spiegeldaling z uit (3.67) en (3.68). Dat levert

$$\frac{1}{B}\left(A_c - A_s - \frac{uA_c}{u+u_r}\right) = \frac{(u+u_r)^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} \tag{3.69}$$

Vermenigvuldigen met $(u+u_r)/\sqrt{gh_{\text{gem}}}$ (waarin $h_{\text{gem}} = A_c/B$) geeft, na herschik-



Figuur 3.18: Schets van het polynoom $y(x) = x^3 + px - q$

ken van termen,

$$\left(\frac{u+u_r}{\sqrt{gh_{\text{gem}}}}\right)^3 - 2\left(1 - \frac{A_s}{A_c} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{gh_{\text{gem}}}}\right)^2\right)\frac{u+u_r}{\sqrt{gh_{\text{gem}}}} + 2\frac{u}{\sqrt{gh_{\text{gem}}}} = 0 \quad (3.70)$$

Met

$$\begin{aligned} x &= \frac{u+u_r}{\sqrt{gh_{\text{gem}}}} \\ p &= -2\left(1 - \frac{A_s}{A_c} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{gh_{\text{gem}}}}\right)^2\right) \\ q &= -2\frac{u}{\sqrt{gh_{\text{gem}}}} \end{aligned} \quad (3.71)$$

kunnen we dit schrijven als

$$x^3 + px - q = 0 \quad (3.72)$$

waarin alleen x een onbekende is.

Het oplossen van deze vergelijking komt neer op het vinden van de wortels van het polynoom $y(x) = x^3 + px - q$. Dat polynoom is geschetst in figuur 3.18. De grijze strook in deze figuur geeft het gebied aan waarbinnen $y = 0$ tot oplossingen voor x leidt die fysisch relevant kunnen zijn voor het vraagstuk dat we willen oplossen. Aan de bovenkant is dit gebied begrensd door $-q$. Omdat we de snelheid u van het water naar het schip toe positief hebben gekozen, geldt dat $-q > 0$. Een horizontale lijn voor $y = 0$ kan niet hoger liggen, want dat zou betekenen dat $-q < 0$. Lager dan $-q - 2\sqrt{(-p/3)^3}$ kan ook niet, want dan blijft alleen x_1 (in figuur 3.18) als reële oplossing over en daarvoor hadden we al gesteld dat deze niet relevant is omdat daarbij hoort dat $u + u_r < 0$ (wat zou betekenen dat de retourstroom met het schip mee gaat in plaats van ertegen in).

We mogen hieruit afleiden dat fysisch relevante oplossingen mogelijk zijn voor waarden van de parameters p en q waarvoor geldt dat

$$-q > 0 \geq -q - 2\sqrt{(-p/3)^3} \quad \text{ofwel} \quad -\sqrt{(-p/3)^3} \leq q/2 < 0 \tag{3.73}$$

In bijlage I is een analytische oplossing gegeven voor derdegraads vergelijkingen. Daarin zijn drie gevallen onderscheiden, afhankelijk van de waarden van p en q. Een van die gevallen betreft het interval $-\sqrt{(-p/3)^3} < q/2 < \sqrt{(-p/3)^3}$ (zie (I.15)). De fysisch relevante oplossing waar (3.73) naar verwijst, valt daarbinnen[18]. De bijbehorende oplossingen luiden

$$x_k = 2\sqrt{-p/3}\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) \tag{3.74}$$

met

$$\cos\theta = \xi \quad ; \quad \sin\theta = \sqrt{1-\xi^2} \quad ; \quad \xi = \frac{q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}} \tag{3.75}$$

Aangezien $q < 0$ en ook $p < 0$, geldt dat $-1 \leq \xi = \cos\theta < 0$, zodat $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$. Echter, omdat ook $\sin\theta \geq 0$, moet $\pi/2 < \theta \leq \pi$.

Omdat de oplossing voor een of andere k identiek is aan die voor $k+3$, zijn er drie verschillende oplossingen. Voor $k = 1, 2, 3$ zijn die in figuur 3.18 aangegeven. Het gaat om:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{-p/3}\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) \quad ; \quad \frac{5\pi}{6} < \frac{\theta + 2\pi}{3} \leq \pi \\
x_2 &= 2\sqrt{-p/3}\cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) \quad ; \quad \frac{3\pi}{2} < \frac{\theta + 4\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3} \\
x_3 &= 2\sqrt{-p/3}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \quad ; \quad \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{3} \leq \frac{\pi}{3}
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Van deze drie oplossingen moeten we bepalen welke hoort bij de waterbeweging rond een varend schip. Al eerder is gesteld dat x_1 dat niet is omdat de retourstroom in dat geval met het schip mee is in plaats tegen de vaarrichting in. Om de oplossingen x_2 en x_3 van elkaar te onderscheiden, kijken we naar de uitersten van de grijze strook in figuur 3.18. Als $y = 0$ samenvalt met de bovenkant van deze strook, is $q = 0$ en dus ook $u = 0$. In dat geval ligt het schip stil ten opzichte van het water. Het andere uiterste doet zich voor als $-q - 2\sqrt{(-p/3)^2} = 0$ (en dan geldt tevens dat $x_2 = x_3$). De bijbehorende snelheid u van het water ten opzichte van het schip vinden we door $-q - 2\sqrt{(-p/3)^2} = 0$ uit te werken. Dit geeft

$$\mu^3 - 3\mu + 2\left(1 - \frac{A_s}{A_c}\right) = 0 \quad ; \quad \mu = \left(\frac{u}{\sqrt{g h_{\text{gem}}}}\right)^{2/3} \tag{3.77}$$

[18]Dat is niet helemaal juist, want $-\sqrt{(-p/3)^3} = q/2$ valt net buiten het interval dat in (I.15) is genoemd. De oplossing die voor dat interval in appendix I wordt afgeleid, geldt echter ook voor $-\sqrt{(-p/3)^3} = q/2$, zij het met $\xi = -1$ en $\theta = \pi$.

Deze derdegraads vergelijking kunnen we op dezelfde manier oplossen als we hiervoor hebben gedaan met (3.72). Het resultaat is

$$\mu = 2\cos\left(\frac{\phi + 4\pi}{3}\right) \quad ; \quad \cos\phi = -\left(1 - \frac{A_s}{A_c}\right) \quad ; \quad \sin\phi = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{A_s}{A_c}\right)^2} \tag{3.78}$$

In het theoretische geval dat het schip zo groot is dat het grootspant juist in de dwarsdoorsnede van de waterweg past (dus als $A_s = A_c$), is $\mu = 0$ en dus ook $u = 0$. Dat is conform verwachting. Een ander, al even theoretisch maar wel interessant geval doet zich voor als $A_s = 0$, dus als het schip geen afmetingen heeft. Daarbij hoort $\mu = 1$, ofwel $u = \sqrt{gh_{\text{gem}}}$.

De term $\sqrt{gh_{\text{gem}}}$ is de voortplantingssnelheid van een golf in de waterloop waarvan de lengte groot is ten opzichte van de waterdiepte en de amplitude klein ten opzichte van diezelfde diepte (zie appendix E waar de 1–dimensionale golfvergelijking wordt besproken). Daarmee is het quotiënt $u/\sqrt{gh_{\text{gem}}}$ te zien als het getal van Froude (Fr) en komt $u = \sqrt{gh_{\text{gem}}}$ overeen met Fr $= 1$, wat duidt op kritische stroming.

Zonder nadere uitleg stellen we dat ook voor andere waarden van A_s (tussen 0 en A_c), $\mu = 1$ wordt geassocieerd met kritische condities en de bijbehorende snelheid u wordt de grenssnelheid genoemd (genoteerd als u_{grens}). Overschrijding van deze snelheid gaat gepaard met het genereren van intense secundaire golven of zelfs planeren. Voor de binnenvaart is dat niet interessant omdat het in verhouding tot de tijdwinst die het oplevert, te veel energie kost. Motoren van zulke schepen zijn er ook niet geschikt voor. De fysisch relevante oplossing ligt zodoende bij een snelheid u waarvoor $\mu < 1$ (ofwel $u < u_{\text{grens}}$) en dat is x_2. Een economisch rendabele snelheid ligt doorgaans in de buurt van 85% van de grenssnelheid.

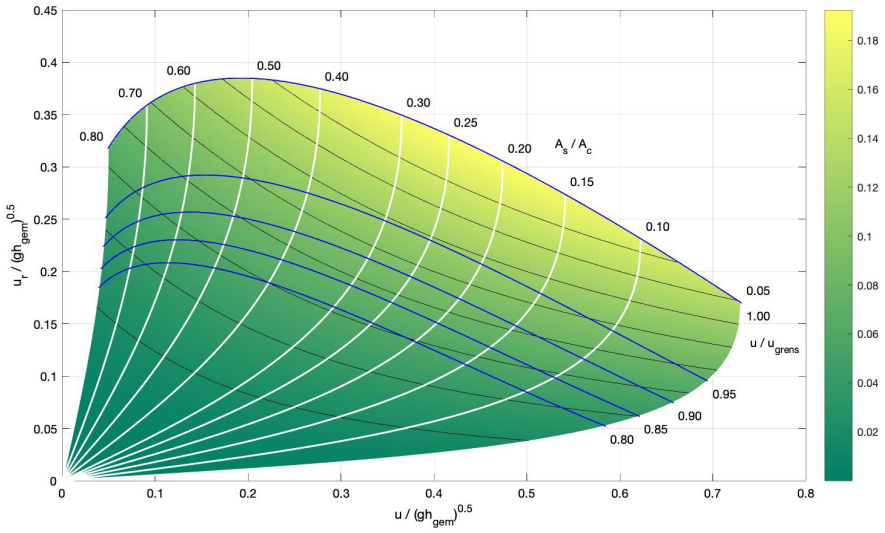
3.4.2 Diagram van Schijf

In de voorgaande paragraaf is de waterbeweging rond een varend (niet planerend) schip beschreven aan de hand van continuïteit en behoud van energie volgens de methode van Schijf (1949). Voor een voorgeschreven snelheid u van het schip ten opzichte van het water, volgt de snelheid van de retourstroom u_r uit

$$\frac{u + u_r}{\sqrt{gh_{\text{gem}}}} = 2\sqrt{-p/3}\cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) \tag{3.79}$$

met θ volgens (3.75) en p volgens (3.71). De bijbehorende spiegeldaling z volgt vervolgens uit (3.68).

Met moderne rekenmachines zijn de retourstroomsnelheid u_r en de spiegeldaling z eenvoudig te bepalen voor voorgeschreven condities (vaarsnelheid van het schip ten opzichte van het water, afmetingen van het grootspant van het schip en de geometrie van de vaarweg). En één en ander laat zich ook makkelijk programmeren. In de tijd dat Schijf zijn methode introduceerde, halverwege de 20$^{\text{e}}$ eeuw,



Figuur 3.19: Diagram van Schijf (1949) voor de waterbeweging rond een varend schip. De blauwe krommen hebben betrekking op u/u_{grens} en de witte op A_s/A_c. Met de verlopende kleur (groen naar geel) is de relatieve spiegeldaling z/h_{gem} aangegeven. De zwarte contouren horen daarbij (bij de onderste is $z/h_{\text{gem}} = 0,02$ en bij volgende contouren is dat steeds 0,02 groter).

lag dat anders. De rekenliniaal was in die tijd zo'n beetje het meest geavanceerde hulpmiddel voor het uitvoeren van complexe berekeningen en de basis voor dat instrument is circa drie eeuwen eerder gelegd. In die tijd was het gemeengoed om oplossingen van complexe rekenkundige systemen toegankelijk te maken met diagrammen waaruit oplossingen voor tal van praktisch relevante condities relatief eenvoudig kunnen worden afgelezen. Naar huidige maatstaven is dat wellicht niet heel nauwkeurig, maar het is zeker indicatief.

In deze context heeft ook Schijf een diagram ontworpen en gepubliceerd dat de relatie tussen de vaarsnelheid u, de retourstroomsnelheid u_r, de relatieve afmetingen van het schip A_s/A_c, de karakteristieke diepte van de vaarweg h_{gem} en de spiegeldaling z samen in beeld brengt. Dit staat bekend als het diagram van Schijf (zie figuur 3.19).

Uit dit diagram kan bijvoorbeeld worden afgelezen dat als

$$\frac{A_s}{A_c} = 0,4 \text{ en } \frac{z}{h_{\text{ghem}}} = 0,06$$

dan zijn

$$u_r \approx 0,20\sqrt{gh_{\text{gem}}} \quad ; \quad u \approx 0,22\sqrt{gh_{\text{gem}}} \quad ; \quad u \approx 0,8u_{\text{grens}}$$

Meer algemeen geldt dat als twee elementen in de set

$$\left\{A_s/A_c, u/\sqrt{gh_{\text{gem}}} \quad ; \quad u_r/\sqrt{gh_{\text{gem}}} \quad ; \quad u/\sqrt{gh_{\text{gem}}} \quad ; \quad z/h_{\text{gem}}\right\}$$

bekend zijn, de andere twee uit het diagram kunnen worden afgelezen (of met de theorie uit de vorige paragraaf kunnen worden berekend).

3.5 Grondwaterstroming

3.5.1 Wet van Darcy

Naast stroming in open en gesloten waterlopen speelt ook stroming in een poreus medium, zoals grond, een belangrijke rol in de waterbouwkunde. Denk daarbij aan stroming onder een waterkerende constructie door of juist er doorheen. Bij een waterkerende constructie die zelf ondoorlatend is, bijvoorbeeld, kan in de ondergrond stroming onder de constructie door optreden. En als de constructie wel doorlatend is, zoals bij een zandige dijk of dam, is ook sprake van stroming door de constructie heen. Inzicht in zulke stroming is van belang voor het ontwerp van de constructie vanwege de invloed op functionaliteit en stabiliteit.

De Franse ingenieur Henry Darcy (1803-1858) heeft langs empirische weg gevonden dat bij stationaire stroming door een poreus medium, het debiet evenredig is met de drukgradiënt die de stroming aandrijft. Dit verband, bekend als de wet van Darcy, is voor stroming in één richting (de x richting, bijvoorbeeld) te schrijven als

$$q_x = -k\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \quad ; \quad \phi = z + \frac{p}{\rho g} \tag{3.80}$$

waarin z de plaatshoogte, p de druk, ϕ de stijghoogte en k is een coëfficiënt die de doorlatendheid van het medium aangeeft. De dimensie van k is lengte per tijd.

Voorts is q_x het zogeheten specifieke debiet. Dat is het volume aan vloeistof dat per eenheid van tijd stroomt door een vlak loodrecht op de stroomrichting, gedeeld door de afmeting van dat vlak. In SI eenheden is dat $\mathrm{m}^3/\mathrm{s}/\mathrm{m}^2$. Hoewel dit overeenkomt met de dimensie van snelheid (m/s), is q_x niet de stroomsnelheid van de vloeistof door het medium. Die snelheid ligt hoger omdat de stroming beperkt is tot de poriën van het medium. Als u_x de gemiddelde stroomsnelheid in x-richting is door de poriën, dan geldt dat $u_x = q_x/n$, met n het poriëngehalte, ook wel porositeit genoemd ($0 < n < 1$).

De doorlatendheid k hangt af van eigenschappen van het medium, zoals het gehalte aan poriën en de afmetingen van individuele poriën (k neemt met beide toe), maar ook van de moleculaire viscositeit van de vloeistof. Hoe stroperiger de vloeistof, hoe kleiner de doorlatendheid.

Ter illustratie zijn in tabel 3.1 voor enkele grondsoorten ordes van grootte genoemd voor de doorlatendheid met betrekking tot water. De spreiding is groot. Er is dus niet zoiets als een typische k-waarde voor bijvoorbeeld klei of zand waarmee een redelijke schatting van grondwaterstroming kan worden gemaakt. Dat kan pas nadat voor de betreffende lokatie de doorlatendheid is vastgesteld aan de hand

grondsoort	doorlatendheid (meters per dag)
klei (zwaar tot matig zwaar)	10^{-4} à 10^{-2}
zand (fijn tot grof)	1 à 100
grind	10^{3} à 10^{4}

Tabel 3.1: Indicaties van waarden van de doorlatendheid k voor water in enkele grondsoorten.

van in situ metingen of laboratoriumonderzoek op basis van een grondmonster. Zo'n onderzoek is tamelijk eenvoudig uit te voeren.

Hoewel dat wellicht niet direct opvalt, komt de wet van Darcy overeen met de impulsbalans die we eerder hebben gebruikt om stroming in waterlopen te beschrijven:

$$u_x \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} - \frac{\tau_b}{\rho h} \tag{3.81}$$

(zie (2.29)). Bij 1–dimensionale, stationaire stroming in zo'n waterloop is de drukgradiënt $(-g\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}x)$ in balans met advectie $(u\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)$ en wrijving $(\tau_b/(\rho h))$. Bij grondwaterstroming is dat niet wezenlijk anders. Wrijving speelt echter een andere rol. Bij een open waterloop is die geconcentreerd aan de bodem terwijl die bij stroming door een poreus medium overal in het medium optreedt, dus in alle poriën waar de vloeistof stroomt.

Ook anders dan bij stroming in een open waterloop speelt wrijving bij grondwaterstroming een zoveel grotere rol dan advectie dat deze laatste kan worden verwaarloosd. Bij zeer goede benadering is zodoende sprake van een evenwicht tussen de drukgradiënt en wrijving:

$$0 = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} - \frac{\tau_b}{\rho h} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\tau_b}{\rho h} = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} \tag{3.82}$$

Bovendien blijven bij grondwaterstroming de stroomsnelheden vanwege die relatief grote wrijving doorgaans zo laag dat turbulentie niet tot ontwikkeling komt. De beperkte omvang van de poriën speelt daarbij ook een rol. Het gevolg is dat grondwaterstroming vrijwel zonder uitzondering laminair is. En in dat geval is wrijving evenredig met de stroomsnelheid (terwijl die evenredigheid bij turbulente stroming het kwadraat van de stroomsnelheid betreft). Voor bovenstaande balans kan zodoende worden geschreven dat

$$u_x \propto -\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} \tag{3.83}$$

In deze relatie is $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}x$ de drukgradiënt zoals we die kennen van stroming in open waterlopen, dus met een vrij oppervlak ζ. In de beschrijving van stroming in gesloten leidingen hebben we de drukgradiënt gerelateerd aan een ruimtelijke variatie van de stijghoogte ϕ. Dat laatste is welbeschouwd meer algemeen toepasbaar in de zin dat het geen onderscheid maakt tussen open en gesloten leidingen. Bij gesloten leidingen is er geen vrij oppervlak en is de druk gerelateerd aan de stijghoogte ϕ,

terwijl bij een open leiding het niveau ζ van de waterspiegel samenvalt met de stijghoogte. In die zin geldt dus ook dat

$$u_x \propto -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \tag{3.84}$$

En omdat $u_x = q_x/n$ geldt tevens dat

$$q_x \propto -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \tag{3.85}$$

Zo redenerend heeft de impulsbalans voor stationaire, 1–dimensionale grondwaterstroming de vorm van een evenwicht tussen enerzijds een drukgradiënt ($\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x$) en anderzijds wrijving die evenredig is met het specifieke debiet q_x). Precies dat is in (3.80) weergegeven.

Samen met continuïteit vormt de wet van Darcy een set van twee vergelijkingen waarmee voor vele praktisch relevante gevallen het verloop van het specifieke debiet en de stijghoogte kan worden bepaald.

In het algemeen wordt bij grondwaterstroming onderscheid gemaakt tussen drie elementaire situaties:

Volkomen spanningswater betreft een watervoerend pakket dat aan boven- en onderzijde is begrensd door een ondoorlatende laag. Het is in die zin vergelijkbaar met stroming in een gesloten waterloop dat er geen vrij oppervlak is. De stijghoogte ligt hoger dan de onderzijde van de bovenste ondoorlatende laag. Als een zandlaag in de ondergrond opgesloten ligt tussen twee dichte kleilagen, kan zich volkomen spanningswater in die zandlaag voordoen.

Onvolkomen spanningswater doet zich voor als tenminste één van de lagen die het watervoerende pakket omgeven, een beetje doorlatend is, maar wel significant minder dan het medium in pakket zelf. Een voorbeeld hiervan is een zandlaag die is afgedekt met een niet al te dikke en ten opzichte van het zand beperkt doorlatende laag (zandhoudende) klei. Afhankelijk van het stijghoogteverschil over die laag is er zijdelingse toestroming naar of afstroming uit de stroomvoerende laag.

Freatisch water wordt gekenmerkt door een vrije grondwaterspiegel (een vrij oppervlak, net zoals bij stroming in een open waterloop).

In de volgende twee paragrafen gaan we eerst in op de berekening van grondwaterstroming ingeval van volkomen spanningswater en freatisch water. Voor beide situaties beperken we ons tot stationaire stroming in één horizontale dimensie. Onvolkomen spanningswater komt daarna aan bod. Tot slot komt kunstmatige beïnvloeding van grondwaterstroming bij bouwkuipen kort aan bod.

3.5.2 Volkomen spanningswater

Kenmerkend voor volkomen spanningswater is dat de stroming in verticale zin volledig is ingesloten en dat de drukhoogte ($p/(\rho g)$) overal groter is dan nul, ofwel

de stijghoogte ϕ overal groter dan de plaatshoogte z. Er is dan geen vrij oppervlak en ook geen verticale toe- of afstroming. In die zin lijkt het op stroming in een gesloten leiding, met dat verschil dat die gesloten leiding is gevuld met een poreus medium.

Bij grondwaterstroming doet zich volkomen spanningswater voor in een watervoerend pakket dat aan de boven- en onderkant is afgesloten door een ondoorlatende laag en waarbij de stijghoogte overal groter is dan de plaatshoogte van de onderkant van de bovenste ondoorlatende laag.

Voor de berekening van stroming ingeval van volkomen spanningswater beperken we ons tot een 1–dimensionale situatie. Dwars op de stroomrichting is sprake van uniformiteit en dat betreft zowel het specifieke debiet q als de dikte h van de stroomvoerende laag. Als x de stroomrichting is, wordt continuïteit in die richting gegeven door

$$\frac{\mathrm{d}(hq_x)}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{3.86}$$

Gecombineerd met de wet van Darcy (3.80) levert dit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-kh\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \tag{3.87}$$

Voor praktische toepassingen waarbij het verloop $h(x)$ van de dikte van de watervoerende laag vooraf bekend is, is dit te herleiden tot

$$\phi(x) = \frac{hq_x}{k}\int\frac{\mathrm{d}x}{h(x)} \tag{3.88}$$

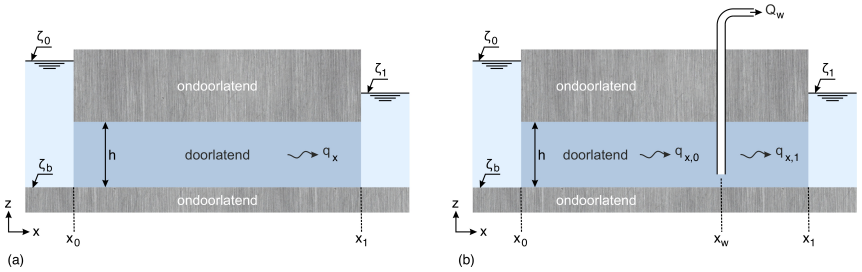
mits de doorlatendheid k van het pakket constant is[19].

Vanuit wiskundig perspectief moet worden bedacht dat uitdrukking (3.88) voor $\phi(x)$ twee onbekenden bevat, namelijk het specifieke debiet q_x en een integratieconstante die hoort bij de onbepaalde integraal in het rechter lid. Deze twee onbekenden volgen uit de randvoorwaarden aan de stijghoogte ϕ die ook van toepassing zijn op de tweede orde differentiaalvergelijking (3.87).

In het navolgende passen we (3.88) toe op twee voorbeelden. In beide gevallen gaat het om een watervoerend pakket van constante dikte dat in de verticaal omsloten is door ondoorlatende lagen en in horizontale richting een verbinding vormt tussen twee open waterlopen waarin de waterstand constant is. Bovendien ligt de waterstand in die waterlopen hoger dan de onderkant van de bovenste ondoorlatende laag die het pakket afsluit. Als dat niet zo zou zijn, zou geen sprake zijn van volkomen spanningswater.

Het verschil tussen beide voorbeelden is dat in het ene geval vrije stroming optreedt door het watervoerende pakket van de ene waterloop naar de andere (zie de schets

[19] Bedenk dat in dit geval hq_x constant is. Vermenigvuldiging van de wet van Darcy (3.80) met h resulteert dan in $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x \propto 1/h$.



Figuur 3.20: Langsdoorsnede van een doorlatende laag in de ondergrond die aan boven- en onderzijde is afgesloten en aan weerszijden is begrensd door open waterlopen met een vaste waterstand. In de linker situatie (a) wordt de stroming aangedreven door het verschil in de waterstanden ζ_0 en ζ_1. In de rechter situatie (b) komt daar het effect van de bron (met afvoer q_x per strekkende meter loodrecht op het vlak van tekening) bij.

in figuur 3.20a), terwijl in het andere voorbeeld ergens tussen de beide waterlopen kunstmatig water wordt onttrokken aan de watervoerende laag (zie figuur 3.20b).

In het eerste voorbeeld van stroming door een watervoerend pakket dat aan boven- en onderzijde is afgesloten door ondoorlatende lagen (figuur 3.20a), is de stroming in x-richting uniform. Dat volgt direct uit continuïteit (3.86) en het gegeven dat de dikte h van het watervoerende pakket constant is. Met datzelfde gegeven en aangenomen dat ook de doorlatendheid k constant is, reduceert (3.87) tot

$$-\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{3.89}$$

waaruit volgt dat de stijghoogte ϕ in stroomrichting lineair variëert:

$$\phi(x) = a_1 x + a_0 \tag{3.90}$$

De integratieconstanten a_0 en a_1 volgen uit randvoorwaarden aan ϕ. In het geval dat is geschetst in figuur 3.20a, gaat het om de voorgeschreven waterstanden in de open waterlopen aan beide uiteinden van de watervoerende laag ($\phi = \zeta_0$ op $x = x_0$ en $\phi = \zeta_1$ op $x = x_1$). Hiermee is

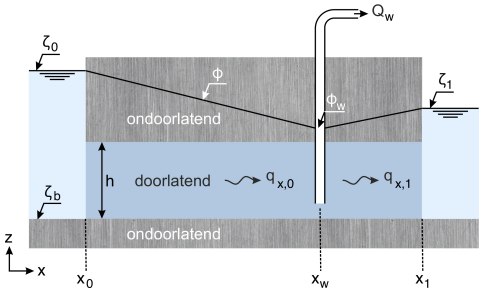
$$\phi(x) = \zeta_0 + (\zeta_1 - \zeta_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad ; \quad x_0 \le x \le x_1 \tag{3.91}$$

en voor het specifieke debiet q_x vinden we

$$q_x = -k\frac{\zeta_1 - \zeta_0}{x_1 - x_0} \tag{3.92}$$

Gebruik van uitdrukking (3.87) levert (natuurlijk) het zelfde resultaat op. Voor een constante dikte h van het watervoerende pakket. Na integratie volgt uit deze uitdrukking

$$\phi(x) = -\frac{q_x}{k}x + I_c \tag{3.93}$$



Figuur 3.21: Verloop van de stijghoogte ϕ voor de situatie die in figuur 3.20b is geschetst.

waarin I_c een integratieconstante is. Met de eerder genoemde randvoorwaarden ($\phi(x_0) = \zeta_0$ en $\phi(x_1) = \zeta_1$) geeft

$$I_c = \zeta_0 + \frac{q_x}{k} x_0 \tag{3.94}$$

en q_x volgens (3.92).

Tot zover het eerste voorbeeld van volkomen spanningswater. In het tweede voorbeeld bouwen we hierop voort door er een lokale, kunstmatige onttrekking aan toe te voegen. Zo'n onttrekking wordt een bron genoemd en als daar een pomp voor wordt ingezet, spreekt men van bronbemaling[20].

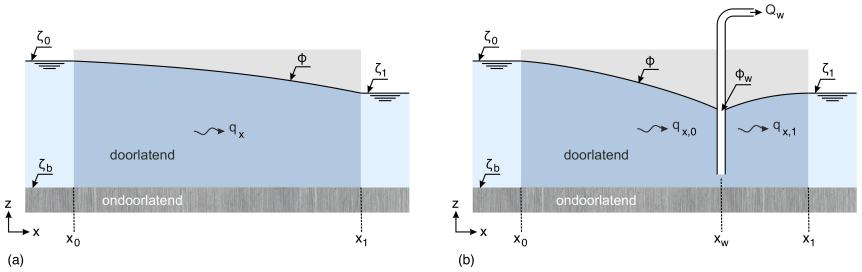
In de praktijk is zo'n bron te zien als een punt waar de stijghoogte kunstmatig wordt verlaagd zodat water uit alle richtingen ernaar toe stroomt en wordt afgevoerd. Om dat te passen op de 1–dimensionale situatie waartoe we ons in dit hoofdstuk beperken, gaan we uit van een reeks van in één lijn geplaatste, identieke bronnen. We schematiseren dat als een lijnvormige bron en kijken naar de stroming daar loodrecht op Een schets van deze situatie is gegeven in figuur 3.21. Gebaseerd op wat we hebben gevonden in het eerste voorbeeld, kunnen we ervan uitgaan dat de stijghoogte ϕ in de doorlatende laag lineair verloopt met de plaats x. Dat is in de figuur aangegeven.

Stel dat de lijnvormige bron zich bevindt op $x = x_w$ en een debiet Q_w (per eenheid van breedte) levert. De stijghoogte ter plaatse van de bron gelijk is ϕ_w. Het specifieke debiet $q_{x,0}$ aan de linker kant van de bron (in figuur 3.21), dus voor $x_0 \leq x \leq x_w$, kunnen we op dezelfde manier berekenen als we in het eerste voorbeeld hebben gedaan, zij het met de randvoorwaarden $\phi(x_0) = \zeta_0$ en $\phi(x_w) = \zeta_w$. Het resultaat luidt

$$q_{x,0} = -k \frac{\phi_w - \zeta_0}{x_w - x_0} \quad ; \quad x_0 \leq x \leq x_w \tag{3.95}$$

Langs overeenkomstige weg vinden we voor het specifieke debiet $q_{x,1}$ aan de rech-

[20] In de waterbouwkunde wordt *malen* veelvuldig gebruikt als het om *pompen* gaat. Zo verwijst *gemaal* bijvoorbeeld naar een pomp die wordt gebruikt om een (grond)waterstand te beheersen. Het werkwoord *malen* heeft diverse betekenissen en *pompen* is daar één van.



Figuur 3.22: Schematische weergave van stroming door een doorlatend pakket dat alleen aan de onderkant is afgesloten door een ondoorlatende laag. De stijghoogte valt samen met het vrije oppervlak (freatisch vlak). In beide figuren (a) en (b) is het doorlatende pakket aan weerszijden begrensd door een open waterloop. In de rechter figuur (b) is het effect van een bron op het freatisch vlak aangegeven.

terkant van de bron dat

$$q_{x,1} = -k\frac{\zeta_1 - \phi_w}{x_1 - x_w} \quad ; \quad x_w \leq x \leq x_1 \tag{3.96}$$

Voorts volgt uit toepassing van continuïteit op de lokatie van de bron dat

$$Q_w = q_{x,0} - q_{x,1} \tag{3.97}$$

(bedenk dat q_x naar rechts positief wordt gerekend). Eliminatie van $q_{x,0}$ en $q_{x,1}$ uit de laatste drie vergelijkingen resulteert in een verband tussen het debiet Q_w van de bron en de stijghoogte $\phi(x_w) = \phi_w$ aldaar. Bij het ontwerp van een bronbemaling is zodoende één van beide te kiezen en de andere ligt dan vast. In de waterbouwkunde wordt vaak door variatie van het debiet gestuurd op handhaving van een gewenste stijghoogte. Dat speelt bijvoorbeeld bij het drooghouden van bouwkuipen.

3.5.3 Freatisch water

Als zich in de grond een vrij wateroppervlak kan instellen, spreekt men van freatisch water. Het wateroppervlak wordt het freatisch vlak genoemd.

Net als in de vorige paragraaf over volkomen spanningswater, bekijken we dit nader voor een 1–dimensionale stroming door een doorlatend pakket dat aan twee zijden wordt begrensd door open waterlopen met een vaste waterstand. Het verschil is dat dit doorlatende pakket alleen aan de onderzijde wordt afgesloten door een dichte laag (zie figuur 3.22a). De bovenkant van die dichte laag is vlak en horizontaal en ligt op $z = \zeta_b$.

De stroming in geval van freatisch water kan ook worden beschreven aan de hand van continuïteit en de wet van Darcy. Voor de 1–dimensionale stroming waartoe we ons in deze paragraaf beperken, wordt continuïteit gegeven door

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((\phi - \zeta_b)q_x\right) = 0 \tag{3.98}$$

waarin $\phi - \zeta_b$ de afstand is tussen het vrije wateroppervlak en de onderkant van de doorlatende laag.

En volgens Darcy geldt dat

$$q_x = -k\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \tag{3.99}$$

(zie (3.80)). Omdat de onderkant van het doorlatende pakket vlak en horizontaal is ($\mathrm{d}\zeta_b/\mathrm{d}x = 0$), kunnen we dit schrijven als

$$q_x = -k\frac{\mathrm{d}(\phi - \zeta_b)}{\mathrm{d}x} \tag{3.100}$$

Combinatie met continuïteit leidt tot

$$-k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((\phi - \zeta_b)\frac{\mathrm{d}(\phi - \zeta_b)}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \tag{3.101}$$

aangenomen dat de doorlatendheid k constant is. De algemene oplossing hiervan is

$$(\phi(x) - \zeta_b)^2 = b_1 x + b_0 \tag{3.102}$$

waarin b_0 en b_1 integratieconstanten zijn die volgen uit de randvoorwaarden $\phi(x_0) = \zeta_0$ en $\phi(x_1) = \zeta_1$. Deze voorwaarden verbeelden de aansluiting op de waterlopen met vaste waterstand, zoals aangegeven in figuur 3.22. Met deze voorwaarden vinden we

$$(\phi(x) - \zeta_b)^2 = (\zeta_0 - \zeta_b)^2 + \left((\zeta_1 - \zeta_b)^2 - (\zeta_0 - \zeta_b)^2\right)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{3.103}$$

en ook

$$q_x = -k\frac{(\zeta_1 - \zeta_b)^2 - (\zeta_0 - \zeta_b)^2}{2(x_1 - x_0)}\frac{1}{\phi(x) - \zeta_b} \tag{3.104}$$

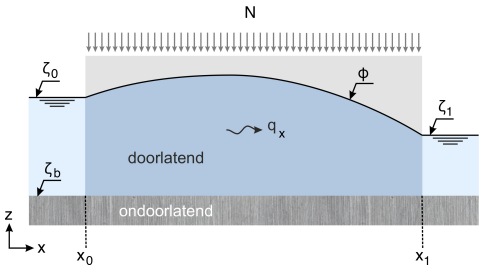
In veel praktisch relevante situaties wordt de grondwaterstroming en de ligging van het freatisch vlak niet alleen bepaald door waterstanden in nabijgelegen open waterlopen, maar ook door infiltratie, bijvoorbeeld als gevolg van neerslag. In de berekening van grondwaterstroming wordt dit weergegeven met een zogeheten bronterm in de continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((\phi - \zeta_b)q_x\right) - N = 0 \tag{3.105}$$

waarin de bronterm N de (stationaire) infiltratie per eenheid van horizontaal oppervlak is (zie figuur 3.23). Deze N heeft de dimensie van specifiek debiet.

Als de infiltratie stationair is en ook uniform verdeeld over het oppervlak van het doorlatende pakket, dan volgt voor het verloop ϕ van het freatisch vlak dat

$$(\phi(x) - \zeta_b)^2 = \frac{1}{k}Nx^2 + c_1 x + c_0 \tag{3.106}$$



Figuur 3.23: Schets van het verloop van de stijghoogte ϕ in een doorlatend pakket waarbij ook sprake is van infiltratie (N).

(vergelijk met (3.102)), waarin c_0 en c_1 integratieconstanten zijn die (in het voorbeeld van figuur 3.23) volgen uit de randvoorwaarden $\phi(x_0) = \zeta_0$ en $\phi(x_1) = \zeta_1$. Bedenk dat het geïnfiltreerde water uiteindelijk afstroomt naar de twee waterlopen aan weerszijden van het doorlatende pakket. Vandaar de bolle vorm van het freatisch vlak met een hoogste punt dat hoger ligt dan de waterstanden in die waterlopen.

Net als in de vorige paragraaf, kunnen we ons ook voor freatisch water afvragen wat het effect is van een lijnvormige bron waarmee water aan de doorlatende laag wordt onttrokken. Een schets hiervan is te vinden in figuur 3.22b. Als ϕ_w de stijghoogte ter plaatse van de bron is en $q_{x,0}$ en $q_{x,1}$ de specifieke debieten aan weerszijden daarvan, dan volgt in afwezigheid van infiltratie ($N = 0$) dat

$$\begin{aligned} (\phi(x)-\zeta_b)^2 &= (\zeta_0-\zeta_b)^2 + \left((\phi_w-\zeta_b)^2-(\zeta_0-\zeta_b)^2\right)\frac{x-x_0}{x_w-x_0} \\ q_{x,0} &= -k\frac{(\phi_w-\zeta_b)^2-(\zeta_0-\zeta_b)^2}{2(x_w-x_0)}\frac{1}{\phi(x)-\zeta_b} \end{aligned} \quad ; \quad x_0 \le x \le x_w \tag{3.107}$$

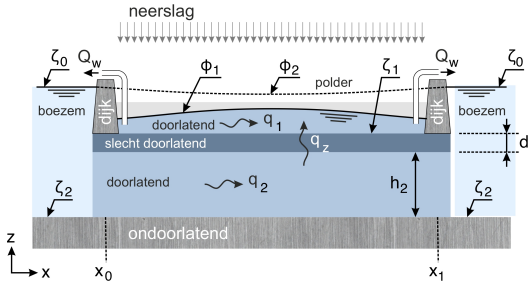
en

$$\begin{aligned} (\phi(x)-\zeta_b)^2 &= (\phi_w-\zeta_b)^2 + \left((\zeta_1-\zeta_b)^2-(\phi_w-\zeta_b)^2\right)\frac{x-x_w}{x_1-x_w} \\ q_{x,1} &= -k\frac{(\zeta_1-\zeta_b)^2-(\phi_w-\zeta_b)^2}{2(x_1-x_w)}\frac{1}{\phi(x)-\zeta_b} \end{aligned} \quad ; \quad x_w \le x \le x_1 \tag{3.108}$$

Dit resultaat wordt verkregen door de redenering die we in het eerste deel van deze paragraaf hebben toegepast op de situatie zonder bron en met voorgeschreven stijghoogten aan de beide uiteinden van het doorlatende pakket, toe te passen op elk van de delen van dat pakket aan weerszijden van de bron en aan te nemen dat de stijghoogte ϕ_w bekend is. Die stijghoogte hangt direct samen met het debiet Q_w van de bron (net zoals bij volkomen spanningswater):

$$Q_w = q_{x,0} - q_{x,1} \tag{3.109}$$

Dus ook hier geldt dat met een keuze voor het debiet Q_w de stijghoogte ϕ_w vast ligt en omgekeerd.



Figuur 3.24: Voorbeeld van het verloop van de stijghoogte ϕ in twee watervoerende lagen die van elkaar zijn gescheiden door een relatief slecht doorlatende laag. In dit voorbeeld is de stijghoogte ϕ_2 in de onderste laag groter dan die in de bovenste laag (ϕ_1). Als gevolg daarvan treedt door de scheidende, slecht doorlatende laag een opwaartse stroming op.

3.5.4 Onvolkomen spanningswater

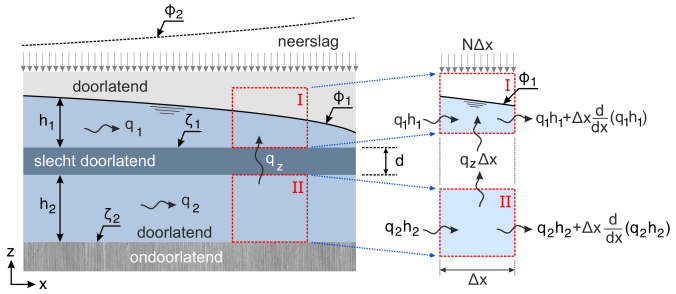
Stroming in een watervoerend pakket dat wordt omsloten door relatief slecht doorlatende (maar niet ondoorlatende) lagen en waarbij geen sprake is van een vrij oppervlak (zoals bij freatisch water), wordt aangeduid met de term onvolkomen spanningswater. Deze vorm van grondwaterstroming zit tussen freatisch water en volkomen spanningswater in. Het is niet freatisch omdat er geen vrij oppervlak is. Tegelijkertijd gaat het niet om volkomen spanningswater omdat de omsluitende lagen niet volledig ondoorlatend zijn. Anders dan bij volkomen spanningswater is wel sprake van enige uitwisseling met omliggende watervoerende pakketten via de relatief slecht doorlatende lagen die deze pakketten van elkaar scheiden.

De berekening van de stroming in het geval van onvolkomen spanningswater is niet principieel anders dan bij volkomen spanningswater. Het verschil is dat in de volumebalans (de continuïteitsvergelijking) rekening moet worden gehouden met een zogenaamde bronterm die de uitwisseling van water met omliggende watervoerende pakketten verbeeldt. Bij de beschrijving van freatisch water hebben we zo'n bronterm al geïntroduceerd in relatie tot verticale instroming als gevolg van neerslag (de N in vergelijking (3.105)).

Hoe zijdelingse instroming in de volumebalans moet worden gerepresenteerd, leggen we uit aan de hand van een voorbeeld dat is geschetst in figuur 3.24. Bij dit voorbeeld kan gedacht worden aan een polder waarbij de onderste watervoerende laag in directe verbinding staat met de boezem rondom de polder, terwijl de bovenste laag daarvan gescheiden is door een ondoorlatende ringdijk.

In dit voorbeeld is de waterstand ζ_0 in de boezem constant en hoger dan de stijghoogte ϕ_1 in de polder. Omdat de onderste watervoerende laag in verbinding staat met de boezem, is de stijghoogte ϕ_2 in die laag ter hoogte van de ringdijk aan weerszijden van de polder gelijk aan ζ_0. Hoe ϕ_2 daar tussenin verloopt, hangt af van de uitwisseling via de slecht doorlatende laag die de twee doorlatende lagen van elkaar scheidt. In figuur 3.24 is deze uitwisseling aangegeven met q_z. Dat is het specifieke debiet dat zich in verticale richting voordoet als gevolg van het verschil in stijghoogte tussen de beide doorlatende lagen en voorts afhankelijk is van de (relatief geringe) doorlatendheid van die scheidende laag.

De uitwisseling q_z is van invloed op het verloop van de stijghoogte ϕ_1 in de bovenste laag, net als de neerslag in de polder die we in dit voorbeeld veronderstellen



Figuur 3.25: Keuze van twee controlevolumes I en II voor de beschrijving van de grondwaterstroming in de twee watervoerende lagen die zijn geschetst in figuur 3.24. Rechts in de figuur zijn voor de beide volumes de in– en uitgaande debieten aangegeven,

(zie figuur 3.24). Als gevolg van die neerslag stijgt ϕ_1 en dat reduceert het stijghoogteverschil $\phi_2 - \phi_1$ en dus ook de uitwisseling q_z. In de berekening van de stroming in de beide watervoerende lagen moet met deze koppeling rekening gehouden worden.

Voor die berekening passen we de wet van Darcy (3.80) in combinatie met continuïteit (3.86) toe. Daarbij kijken we naar de doorsnede van de polder zoals die is geschetst in figuur 3.24 en we veronderstellen gemakshalve dat die doorsnede dwars op het vlak van tekening niet (wezenlijk) varieert. Voor een beschrijving van het principe van de stromingsberekening volstaat dat. In veel praktisch relevante situaties zal dat principe moeten worden uitgebreid naar meer gecompliceerde geometrieën van polders.

Overigens beperken we ons in de stromingsberekening tot de stationaire situatie die zich voordoet als het boezempeil en de neerslag lange tijd constant zijn en met behulp van gemalen een constant debiet vanuit de bovenste watervoerende laag op de boezem wordt geloosd. Dat debiet is gelijk aan de som van de neerslag en de uitwisseling via de slecht doorlatende laag tussen de twee watervoerende lagen. We gaan uit van twee gemalen, één aan elke kant van de doorsnede van de polder (in figuur 3.24 aangegeven met een spuidebiet Q_w per eenheid van breedte dwars op het vlak van tekening). Die gemalen worden verondersteld te zorgen voor een constante, voorgeschreven stijghoogte ϕ_p ter plaatse van de ringdijk. Op die locaties ($x = x_0$ en $x = x_1$ in figuur 3.24)) geldt dus dat $\phi_1 = \phi_p$.

Voor de berekening van de stroming kijken we achtereenvolgens naar de twee controlevolumes I en II die zijn geschetst in figuur 3.25. Het linker deel van deze figuur is een fragment uit figuur 3.24. De twee controlevolumes zijn precies boven elkaar gekozen zodat de uitwisseling via de slecht doorlatende laag voor beide volumes gelijk is, zij het dat bij het ene volume sprake is van uitstroming en bij het andere van instroming. De hoeveelheid water die in de slecht doorlatende laag is geborgen, verandert niet met de tijd.

Bovenste watervoerende laag

Voor controlevolume I wordt continuïteit gegeven door

$$q_1 h_1 + q_z \Delta x + N\Delta x - \left(q_1 h_1 + \Delta x \frac{\mathrm{d}(q_1 h_1)}{\mathrm{d}x} \right) = 0 \tag{3.110}$$

wat te herleiden is tot

$$-\frac{\mathrm{d}(q_1 h_1)}{\mathrm{d}x} + q_z + N = 0 \tag{3.111}$$

Hierin is N het specifieke debiet (neerwaarts positief) dat hoort bij de neerslag in de polder[21].

Voor het specifieke debiet q_z door de slecht doorlatende laag geldt volgens Darcy dat

$$q_z = -k\frac{\mathrm{d}\phi_z}{\mathrm{d}z} \tag{3.112}$$

waarin k de doorlatendheid van de laag en $\phi_z(z)$ is het verticale verloop van de stijghoogte daarin. Aan de onderkant van de laag is $\phi_z = \phi_2$ en aan de bovenkant is $\phi_z = \phi_1$. Met de veronderstelling dat de laag homogeen van samenstelling is, varieert ϕ_z lineair met z, zodat in dit geval

$$\frac{\mathrm{d}\phi_z}{\mathrm{d}z} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{d} \quad \rightarrow \quad q_z = \frac{\phi_2 - \phi_1}{d/k} \tag{3.113}$$

met d de dikte van de slecht doorlatende laag. Invullen in de continuïteitsvergelijking (3.111) geeft

$$-\frac{\mathrm{d}(q_1 h_1)}{\mathrm{d}x} + \frac{\phi_2 - \phi_1}{d/k} = -N \tag{3.114}$$

Voor het freatisch water in de bovenste watervoerende laag geldt bovendien dat

$$\frac{\mathrm{d}(q_1 h_1)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-(\phi_1 - \zeta_1)k_1\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x}\right) \tag{3.115}$$

met k_1 de doorlatendheid van de laag en ζ_1 de hoogte van de onderkant van de laag. Samengevoegd leidt dit tot

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((\phi_1 - \zeta_1)k_1\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{\phi_2 - \phi_1}{d/k} = -N \tag{3.116}$$

Onderste watervoerende laag

De continuïteitsvergelijking voor het onvolkomen spanningswater in de onderste watervoerende laag (controlevolume II) wordt gegeven door

$$q_2 h_2 - q_z \Delta x - \left(q_2 h_2 + \Delta x\frac{\mathrm{d}(q_2 h_2)}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \tag{3.117}$$

ofwel

$$-\frac{\mathrm{d}(q_2 h_2)}{\mathrm{d}x} - \frac{\phi_2 - \phi_1}{d/k} = 0 \tag{3.118}$$

[21] Deze N is het specifieke debiet van de neerwaartse grondwaterstroming die zich in geval van neerslag voordoet. Dat is niet hetzelfde als het aantal milimeters neerslag dat zich per eenheid van tijd aan op maaiveld optreedt. N is ook afhankelijk van hoeveel van die neerslag in de bodem doordringt en van de porositeit.

met q_z volgens (3.113).

Met, volgens Darcy, $q_2 = -k_2 \mathrm{d}\phi_2/\mathrm{d}x$ (k_2 is de doorlatendeheid van de onderste watervoerende laag), wordt dit

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-k_2 h_2 \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{\phi_2 - \phi_1}{d/k} = 0 \tag{3.119}$$

Beide lagen samen

Voor de berekening van de grondwaterstroming in het beschouwde systeem van twee watervoerende lagen zoals geschetst in figuren 3.24 en 3.25, hebben we twee vergelijkingen (3.116) en (3.119) gevonden:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((\phi_1 - \zeta_1)k_1 \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{\phi_2 - \phi_1}{d/k} &= -N \\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-k_2 h_2 \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{\phi_2 - \phi_1}{d/k} &= 0 \end{aligned} \tag{3.120}$$

Bijbehorende randvoorwaarden voor ϕ_1 en ϕ_2 zijn (althans in dit geval)

$$\phi_1(x_0) = \phi_1(x_1) = \zeta_0 \quad ; \quad \phi_2(x_0) = \phi_2(x_1) = \zeta_p \tag{3.121}$$

Voor bekende (cq. voorgeschreven) ζ_0, ζ_p, ζ_1, h_2, d en doorlatendheden k, k_1 en k_2 kan hieruit het verloop van de stijghoogten ϕ_1 en ϕ_2 worden bepaald. Met dat resultaat en de wet van Darcy kunnen vervolgens de specifieke debieten q_1, q_2 en q_z worden bepaald.

Het netto debiet Q (de som van de beide Q_w in figuur 3.24) dat door de gemalen aan weerszijden van de polder gezamenlijk moet worden geleverd in de stationaire situatie die we hebben aangenomen, tenslotte, volgt uit

$$\begin{aligned} Q &= -q_1(x_0)h_1(x_0) + q_1(x_1)h_1(x_1) \\ &= (\phi_1(x_0) - \zeta_1)k_1 \left.\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} - (\phi_1(x_1) - \zeta_1)k_1 \left.\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_1} \end{aligned} \tag{3.122}$$

(waarbij we impliciet hebben aangenomen dat k_1 en ζ_1 niet variëren met x).

Bedenk dat Q inderdaad een netto debiet is. In het gehanteerde voorbeeld (figuur 3.24) ligt het voor de hand om te veronderstellen dat het nodig is om doorlopend water uit de polder naar de boezem te pompen om een stationaire situatie te handhaven. Uitdrukking (3.122) laat echter ook toe dat aan één of beide kanten daarvoor juist water moet worden ingelaten. Of dat zo is, hangt in voorkomende gevallen af van het teken van q_1 (en dus ook dat van $\mathrm{d}\phi_1/\mathrm{d}x$) op de randen.

3.5.5 Bronbemaling bij bouwkuipen

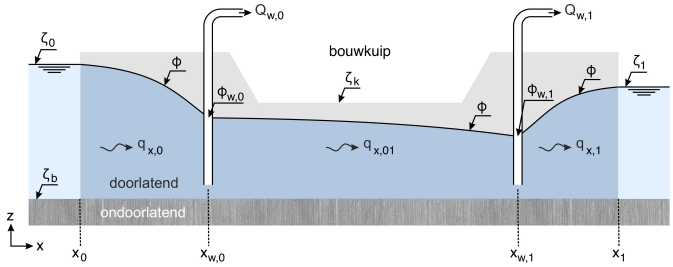
Inzicht in grondwaterstroming en stijghoogten is vaak van belang voor het ontwerp van waterbouwkundige constructies en de realisatie daarvan. Maar ook bij de bouw van een woonhuis met een kelder of souterrain waarvan de vloer zich onder de lokale grondwaterstand bevindt, is zulk inzicht nodig. Een kelder wordt doorgaans aangelegd in een bouwkuip en het is voor de bouw heel prettig als daar geen water in staat. Lokale verlaging van de grondwaterstand is één manier om dat te bereiken. Na realisatie zal de bouwkuip rond de kelder worden aangevuld met grond en kan de oorspronkelijke grondwaterstand worden hersteld. De kelder is dan te zien als een ingegraven, holle bak die zich deels in het grondwater bevindt en dus bloot staat aan hydraulische belastingen op wanden (horizontaal) en vloer (opwaarts). Bij de dimensionering van wanden en vloer moet daarmee rekeningen worden gehouden. Bovendien moet worden voorkomen dat de resultante opwaartse druk leidt tot opdrijven van de constructie. Bij meer complexe constructies speelt het zelfde mechanisme.

De bouwkuip zelf is overigens ook een waterbouwkundige constructie. Bij de functionaliteit en stabiliteit daarvan speelt grondwater vaak een wezenlijke rol. In deze paragraaf belichten we enkele aspecten daarvan aan de hand van een voorbeeld van een bouwkuip met een vlakke, horizontale bodem en rondom taluds voor de overgang naar maaiveld. We bekijken een doorsnede van deze bouwkuip en veronderstellen gemakshalve dat de bouwkuip zich loodrecht op deze doorsnede oneindig ver uitstrekt. In werkelijkheid is dat natuurlijk nooit zo, maar voor deze elementaire beschouwing laat het toe dat de grondwaterstroming als 1–dimensionaal kan worden gezien. In de voorgaande twee paragrafen over volkomen spanningswater en freatisch water hebben we hetzelfde gedaan. Ook in navolging van die twee voorgaande paragrafen wordt het terrein waar de bouwkuip zich bevindt aan twee kanten begrensd door open waterlopen waarin de waterstand bekend en constant is.

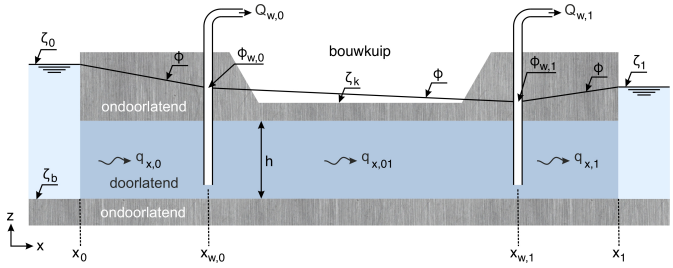
In eerste instantie kijken we naar een bouwkuip die is aangelegd in een doorlatend pakket bovenop een ondoorlatende laag. Een schets van deze situatie is te vinden in figuur 3.26. Volgens deze schets wordt net buiten de bouwkuip en aan weerszijden daarvan bronbemaling toegepast. Bij beide bronnen wordt zodanig water aan het doorlatende pakket onttrokken dat het freatisch vlak ter plaatse van de bouwkuip op een gewenst niveau blijft.

Wat dat gewenste niveau is, hangt mede af van de beoogde bouwactiviteiten in de bouwkuip. In het algemeen moet voorkomen worden dat de stijghoogte hoger is dan de onderkant van de bouwkuip. Bij de taluds zou dat leiden tot uittredend water (grondwater dat uit het talud stroomt) en zo bodemmateriaal meevoert waardoor het talud aan stabiliteit verliest. Daarnaast zal ernaar worden gestreefd om het freatisch vlak over de gehele bodem van de bouwkuip onder het niveau van die bodem te houden. Een bouwkuip met een drassige bodem is immers geen prettig werkterrein.

De keerzijde hiervan is dat verlaging van het freatisch vlak kosten met zich mee-



Figuur 3.26: Schets van de doorsnede van een bouwkuip in een doorlatend pakket op een ondoorlatende laag. De bouwkuip is omgeven door (lijnvormige) bronnen waarmee het freatisch vlak bij de bouwkuip wordt gecontroleerd. Het geschetste verloop van dat vlak (ϕ) is indicatief.



Figuur 3.27: Schets van de doorsnede van een bouwkuip in een ondoorlatende toplaag op een doorlatend pakket met volkomen spanningswater. De bouwkuip is omgeven door (lijnvormige) bronnen waarmee de stijghoogte ϕ vlak bij de bouwkuip wordt gecontroleerd. Het geschetste verloop daarvan is indicatief.

brengt. Hoe groter de verlaging, hoe groter de kosten. Meestal speelt dit op de totale kosten van een project echter geen doorslaggevende rol. Dat kan anders zijn voor het effect van bronbemaling op de grondwaterstand in de omgeving van de bouwkuip. Ook die zal (tijdelijk) worden verlaagd en dat kan gevolgen hebben voor bijvoorbeeld vegetatie, bebouwing en constructies. Dat kan worden gemitigeerd door het water dat bij de bouwkuip aan de ondergrond wordt onttrokken, op enige afstand weer in de bodem te injecteren. Dat heeft iets weg van dweilen met de kraan open, maar is wel een realistische optie omdat grondwater langzaam stroomt.

Ook als de bouwkuip wordt aangelegd in een ondoorlatende toplaag, kan het zinvol zijn om de stijghoogte van het volkomen spanningswater in een dieper gelegen doorlatende laag te reduceren. Een voorbeeld van zo'n situatie is geschetst in figuur 3.27. Daarin bevindt zich onder de bouwkuip een doorlatende laag met volkomen spanningswater. Door de aanleg van de bouwkuip is de dikte van de ondoorlatende toplaag plaatselijk teruggebracht tot $\zeta_k - \zeta_b - h$. Als dat niet toereikend is om de druk van het water vanuit de doorlatende laag te weerstaan, zal de bodem van de bouwkuip opbarsten.

Een schatting van de minimaal benodigde dikte kan worden verkregen uit verticaal evenwicht. Aan de onderkant van de ondoorlatende toplaag is de opwaartse druk gelijk aan $\rho g(\phi - \zeta_b - h)$ en voor evenwicht moet dat gelijk zijn aan het eigen

gewicht van de ondoorlatende laag per eenheid van horizontaal oppervlak:

$$\rho g(\phi - \zeta_b - h) = \rho_g g(\zeta_k - \zeta_b - h) \tag{3.123}$$

waarin ρ_g de dichtheid van het ondoorlatende materiaal.

Bij het ontwerp van een bouwkuip is het niveau ζ_k van de bodem doorgaans een randvoorwaarde. Daarmee moet worden bepaald of de resterende dikte $\zeta_k - \zeta_b - h$ van de ondoorlatende toplaag voldoende is om opbarsten te voorkomen. Als dat niet zo blijkt te zijn, kan ervoor worden gekozen om de stijghoogte ϕ kunstmatig te verlagen. Bovenstaande uitdrukking levert een schatting van de minimaal benodigde verlaging. In de praktijk wordt ter wille van veiligheid een grotere verlaging toegepast.

De berekening van de onttrekkingen $Q_{w,0}$ en $Q_{w,1}$ (in figuren 3.26 en 3.27)) om een gewenst verloop ϕ van de stijghoogte te bewerkstelligen, gaat op dezelfde manier als omschreven in de voorgaande paragrafen.

3.6 Circulaties in een verticaal vlak

3.6.1 Inleiding

Bij de beschrijving van stroming in open en gesloten waterlopen hebben we in de voorgaande paragrafen gekeken naar wat zich gemiddeld of geïntegreerd over een waterkolom voordoet. In veel gevallen volstaat dat, maar soms is het nodig om (ook) inzicht te hebben in wat zich in de waterkolom afspeelt, hoe de stroomsnelheid varieert met de hoogte boven de bodem. In dit hoofdstuk over toepassingen van stationaire stroming noemen we daarvan twee voorbeelden: windopzet en bochtstroming.

Windopzet is de verhoging van de waterstand onder invloed van wind. Langs de Nederlandse kust kan zich dat voordoen bij een krachtige, aanhoudende wind uit het noordwesten. Omdat de wind een schuifspanning uitoefent op het wateroppervlak, wordt water naar de zuidelijke Noordzee gedreven, waar het moeilijk weg kan vanwege de beperkte breedte van het Kanaal. Dat leidt in die zuidelijke Noordzee tot een verhoging van de waterstand. Inzicht in die verhoging is onder meer van wezenlijk belang voor het onderhouden van de waterveiligheid in omliggende kustgebieden.

Het andere voorbeeld waar we naar kijken, gaat over stroming in de bocht van een waterloop. Het pad dat een waterdeeltje door zo'n bocht volgt, is niet parallel aan de as van die bocht, maar heeft de vorm van een spiraal rond die as. Dat heeft te maken met het centrifugaal–effect. Deze zogeheten spiraalstroom speelt een cruciale rol in de natuurlijke neiging van rivieren om te meanderen. Inzicht in dit verschijnsel is zodoende van belang voor bijvoorbeeld riviermorfologie.

Voor de beschrijving van de verticale circulaties die aan de basis van beide voorbeelden liggen, gaan we uit van continuïteit en behoud van impuls. Echter, omdat

het om verticale circulaties gaat, willen we zichtbaar kunnen maken hoe de stroomsnelheid varieert over de waterkolom. Met een diepte gemiddelde of geïntegreerde balans komen we dan niet ver. De impulsbalans waarin die verticale variabiliteit expliciet aan bod komt, is afgeleid in appendix C.

Die afleiding gaat uit van horizontaal uniforme stroming. Dat volstaat om het principe van de verticale circulaties te duiden, maar vooral in de buurt van gesloten randen (zoals de kust in het geval van windopzet of oevers van de rivier bij spiraalstroming) schiet dat tekort. De impulsbalans voor dit type stroming wordt gegeven door

$$0 = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z} \quad ; \quad \frac{\tau}{\rho} = \nu_t \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} \tag{3.124}$$

met twee bijpassende randvoorwaarden. In de voorbeelden in dit hoofdstuk is één daarvan dat de stroomsnelheid nabij de bodem gelijk is aan nul:

$$u(z_0 + b) = 0 \tag{3.125}$$

waarin b het bodemniveau is en z_0 is een hoogte boven de bodem (een verticaal gemeten afstand, geen coördinaat) die afhangt van de ruwheid van de bodem en, daarmee samenhangend, de mate van turbulentie. Er is een relatie tussen deze z_0 en de eerder geïntroduceerde wrijvingscoëfficiënt c_f (zie (2.37) en appendix C). De andere randvoorwaarde betreft de schuifspanning aan het wateroppervlak. Voorts is τ in deze balans de horizontale schuifspanning in de waterkolom en ν_t is de zogeheten turbulentie-viscositeit. In stroming gaat het water zich stroperiger gedragen naarmate de turbulentie toeneemt en daarbij nemen ook de interne schuifspanningen toe. Dit effect van turbulentie is in waterbouwkundige toepassingen doorgaans veel sterker dan moleculaire viscositeit en daarom wordt die laatste verwaarloosd.

Voor een zuiver verhang–gedreven stroming volgt uit deze impulsbalans dat de horizontale stroomsnelheid u logaritmisch varieert met de hoogte boven de bodem. Dit staat bekend als het logaritmisch snelheidsprofiel en is karakteristiek voor 1–dimensionale stroming met weinig variatie in stroomrichting (zoals bijvoorbeeld bij getij en in rechte rivieren). In de voorbeelden over windopzet en bochtstroming komt dit type profiel aan bod.

Overigens zijn windopzet en bochtstroming niet de enige situaties waarbij inzicht in de verticale structuur van de stroming van belang is. Het speelt ook bij de morfologische ontwikkeling van getijgeulen in estuaria, het gedrag van zoetwaterpluimen rond de monding van rivieren, effecten van verschillen in temperatuur, invloed van rotatie van de aarde op stroming[22] en nog veel meer. Voor zulke specialistische thema's wordt verwezen naar de literatuur.

[22]Dit verwijst naar het zogeheten Coriolis–effect (waarover meer in hoofdstuk 5) dat mede verantwoordelijk is voor een variatie in stroomrichting over de waterkolom.

3.6.2 Windopzet

Inleiding

Wanneer wind over een wateroppervlak strijkt, wordt op dat water een schuifspanning uitgeoefend. Het gevolg is dat het water in de richting van de wind gaat bewegen. Een belemmering van deze beweging kan leiden tot een verandering van de waterstand. We illustreren dat aan de hand van het voorbeeld van een lange, rechte kust met een loodrecht invallende, aanlandige wind. De kust vormt in dit verband een obstakel voor de stroming die door de wind wordt aangedreven. Aangezien de wind water naar de kust blijft stuwen, zal het water zich daar ophopen. Het resultaat is dat de waterstand vlakbij de kust hoger wordt dan verder zeewaarts. Door dit verschil in waterstand (verhang) ontstaat een kustafwaarts gerichte stroming.

We hebben zodoende te maken met twee tegengestelde stromingen: een windgedreven stroming naar de kust toe en een verhang-gedreven stroming van de kust af. Als de wind lang genoeg aanhoudt, ontstaat uiteindelijk een stationaire situatie waarbij beide stromingen, geïntegreerd over de diepte, elkaar juist compenseren. De opwaaiing neemt dan niet meer toe. We gaan na hoe deze uiterste toestand afhangt van de windsnelheid. Voor bijvoorbeeld beschouwingen over veiligheid tegen overstromen is die uiterste toestand van groot belang.

De stroomsnelheden die bij deze wind- en verhang-gedreven stromingen horen, zijn verschillend verdeeld over de waterkolom. Bovenin is de wind-gedreven kustwaartse stroming sterker dan de verhang–gedreven stroming van de kust af, en onderin is dat juist andersom. In de buurt van het wateroppervlak is er dus een netto stroming met de wind mee (kustwaarts) terwijl bij de bodem de stroming tegen de wind in gericht is (zeewaarts). Het water dat bovenin de waterkolom naar de kust wordt gestuwd, wordt onderlangs weer afgevoerd naar zee. Er is sprake van een verticale circulatie.

Om het verloop van de waterstand in windrichting in beeld te brengen, kijken we eerst naar de verticale circulatie waarbij er netto geen stroming meer is in horizontale richting. Dat doen we voor een willekeurige lokatie in het horizontale vlak. Dat geeft inzicht in het verhang dat op die locatie nodig is om het effect van de wind te compenseren. Vervolgens passen we dat inzicht toe op het traject waarover de wind een schuifspanning op het water uitoefent. Daarmee kunnen we het verloop van de waterstand langs dat traject construeren.

Verticale circulatie

Een goed beeld van deze circulatie krijgen we door de situatie waarin deze zich voordoet enigszins te schematiseren zonder de essentie geweld aan te doen. Daartoe kijken we naar een verticaal vlak dat in horizontale richting samenvalt met de richting van de wind. De kust staat loodrecht op dit vlak. Voorts veronderstellen we dat het verhang en de bodemhelling zo klein zijn dat de stroming over korte afstand bij benadering horizontaal uniform is. De horizontale coördinaat x kiezen

we in de richting van de wind (naar de kust toe).

Zoals omschreven in appendix C, wordt de verticale verdeling van de horizontale stroomsnelheid bij stationaire, horizontaal uniforme, verhang-gedreven stroming beschreven door

$$0 = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\nu_t \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) \tag{3.126}$$

(zie uitdrukking (C.23) in appendix C) met randvoorwaarden

$$u(z_0 + b) = 0 \quad ; \quad \nu_t \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\zeta} = 0 \tag{3.127}$$

voor achtereenvolgens de snelheid nabij de bodem en de schuifspanning aan het oppervlak.

Ook voor een stationaire stroming die wordt aangedreven door een combinatie van een windschuifspanning aan het oppervlak en een verhang geldt de impulsbalans (3.126), zij het dat de verticale verdeling van de turbulentie viscositeit ν_t enigszins afwijkt van het parabolische profiel (C.31). Bovendien is de bodemschuifspanning bij een deels wind–gedreven stroming niet de enige generator van turbulentie. Ook de windschuifspanning speelt daarbij en rol, met als gevolg dat de omvang van de turbulentie viscositeit niet uitsluitend van de schuifspanningssnelheid u_* afhangt, maar voor een deel ook van de windschuifspanning. In ons geschematiseerde beeld van de verticale circulatie gaan we daaraan echter voorbij. We nemen aan dat bij windopzet de turbulentie viscositeit parabolisch verloopt over de waterkolom op dezelfde manier als bij een uitsluitend verhang–gedreven stroming. Echter, omdat ook de windschuifspanning een rol speelt bij het genereren van turbulentie, relateren we de diepte–gemiddelde viscositeit niet louter aan u_*. In plaats daarvan gaan we uit van een diepte–gemiddelde $\nu_{t,\mathrm{gem}}$ waarvan we de waarde niet kennen en we laten zien dat deze waarde voor het karakter van de verticale circulatie niet relevant is. Kortom, we gaan uit van een turbulentie viscositeit volgens

$$\nu_t(z) = \nu_{t,\mathrm{gem}} \frac{(\zeta - z)(z - b)}{h^2} \tag{3.128}$$

Vanwege het lineaire karakter van de impulsbalans (3.126) kunnen we het totale snelheidsprofiel $u(z)$ schrijven als de superpositie van een verhang-gedreven component $u_p(z)$ en een wind–gedreven component $u_w(z)$. De verhang–gedreven component staat geheel los van de windschuifspanning aan het oppervlak. Deze wordt beschreven door de impulsbalans (3.126) met randvoorwaarden (3.127). In combinatie met het verloop (3.128) van de turbulentie viscositeit over de waterkolom vinden we voor het snelheidsprofiel $u_p(z)$ dat

$$u_p(z) = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\frac{h^2}{\nu_{t,\mathrm{gem}}} \ln\frac{z - b}{z_0} \tag{3.129}$$

wat, zoals te verwachten, op een schaalfactor na identiek is aan het logaritmisch snelheidsprofiel.

Op overeenkomstige manier staat de wind–gedreven component los van het verhang. Anders dan bij de verhang–gedreven component geldt aan het wateroppervlak de voorwaarde dat de schuifspanning gelijk moet zijn aan die van de wind. De impulsbalans voor deze component luidt zodoende

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\nu_t \frac{\mathrm{d}u_w}{\mathrm{d}z}\right) \tag{3.130}$$

en de bijbehorende randvoorwaarden zijn

$$u_w(z_0 + b) = 0 \quad ; \quad \nu_t \left.\frac{\mathrm{d}u_w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\zeta} = \frac{\tau_s}{\rho} \tag{3.131}$$

waarin τ_s de windschuifspanning is. Deze is gerelateerd aan de windsnelheid. Een redelijke benadering van het onderlinge verband is

$$\tau_s \approx (0,0505W)^2 \rho_a \tag{3.132}$$

waarin W de windsnelheid is op 10m boven het wateroppervlak en ρ_a is de massadichtheid van lucht (op zeeniveau circa 1,2kg/m^3). Deze benadering is ontleend aan Garratt (1977).

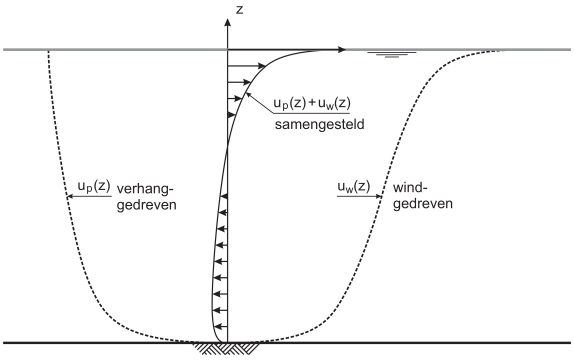
Integratie van (3.130) met randvoorwaarden (3.131) levert

$$u_w(z) = \frac{\tau_s}{\rho} \frac{h}{\nu_{t,\mathrm{gem}}} \ln\left(\frac{z-b}{z_0} \cdot \frac{\zeta - (z_0+b)}{\zeta - z}\right) \tag{3.133}$$

voor het snelheidsprofiel voor wind–gedreven stroming. Bij een voorgeschreven windsnelheid ligt dit profiel volledig vast. Voor de verhang–gedreven component geldt dat niet omdat de omvang van het verhang niet op voorhand bekend is. Echter, in de uiteindelijke stationaire situatie compenseren de verhang- en wind–gedreven componenten elkaar in diepte–geïntegreerde zin. De wind–gedreven stroming naar de kust toe wordt dan precies gecompenseerd door een even grote maar tegengestelde stroming die wordt aangedreven door het verhang dat is ontstaan door de opstuwing. Naar de kust toe neemt de waterstand toe en dus is de bijbehorende verhang–gedreven stroming van de kust af. Zodra beide stromingen elkaar in diepte–gemiddelde zin compenseren, is de stroming stationair en is het verhang dwars op de kust maximaal. In dat geval geldt

$$\int_{z_0+b}^{\zeta} u_p \mathrm{d}z + \int_{z_0+b}^{\zeta} u_w \mathrm{d}z = 0 \tag{3.134}$$

De omvang van het maximale verhang kan uit deze voorwaarde worden bepaald en dan ligt het volledige snelheidsprofiel $u(z) = u_p(z) + u_w(z)$ vast. Een schets van dit snelheidsprofiel en de beide componenten waaruit het is opgebouwd, is gegeven in figuur 3.28.



Figuur 3.28: Opbouw van het snelheidsprofiel van een stationaire stroming die wordt aangedreven door een superpositie van een windschuifspanning (naar rechts) en een verhang en waarbij de diepte-gemiddelde stroming gelijk is aan nul.

Door substitutie van (3.129) en (3.133) in de voorwaarde (3.134) vinden we, met gebruik van (3.132), dat

$$gh\frac{d\zeta}{dx} = (0,0505W)^2\frac{\rho_a}{\rho}\frac{\int_{z_0+b}^{\zeta}\ln\left(\frac{z-b}{z_0}\frac{\zeta-(z_0+b)}{\zeta-z}\right)}{\int_{z_0+b}^{\zeta}\ln\frac{z-b}{z_0}} \tag{3.135}$$

Mogelijk lijkt dit een tamelijk ingewikkelde uitdrukking, maar dat valt wel mee. Beide integralen schalen met de waterdiepte $\zeta - b$ en in het quotiënt vallen die schalen tegen elkaar weg. Dat quotiënt is daardoor alleen afhankelijk van de bodemruwheid gerepresenteerd door z_0. In plaats van (3.135) kunnen we daardoor schrijven dat

$$gh\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} = W^2 c_W \quad \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} = c_W\frac{W^2}{gh} \tag{3.136}$$

waarbij de dimensieloze coëfficiënt c_W afhangt van z_0. Voor praktisch relevante waarden van deze parameter geldt dat $c_W \approx 3,5\times10^{-6}$. Met deze waarde is (3.136) een vuistregel voor het uiteindelijke (maximale) verhang dat zich instelt bij een wind–gedreven stroming loodrecht op een gesloten rand (kust), aangenomen dat de stroming bij benadering horizontaal uniform is.

Het volledige snelheidsprofiel wordt met (3.133) en (3.129)

$$u(z) = W^2\frac{h}{\nu_{t,\mathrm{gem}}}\left(\frac{\tau_s}{\rho}\ln\left(\frac{z-b}{z_0}\frac{\zeta-(z_0+b)}{\zeta-z}\right) - gh\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\ln\frac{z-b}{z_0}\right) \tag{3.137}$$

ofwel, met (3.132) en (3.136)

$$u(z) = W^2\frac{h}{\nu_{t,\mathrm{gem}}}\left(\frac{0,0505^2\rho_a}{\rho}\ln\left(\frac{z-b}{z_0}\frac{\zeta-(z_0+b)}{\zeta-z}\right) - c_W\ln\frac{z-b}{z_0}\right) \tag{3.138}$$

De term tussen de buitenste haken in het rechter lid van bovenstaande uitdrukking beschrijft de vorm van het snelheidsprofiel dat zich uiteindelijk instelt als de wind– en verhang–gedreven componenten die in diepte-gemiddelde zin met elkaar in evenwicht zijn. De windsnelheid W heeft blijkbaar geen invloed op die vorm.

Dat komt omdat we de turbulentie viscositeit hebben voorgeschreven, onafhankelijk van de wind. Los daarvan heeft de windsnelheid wel invloed op de schaal van het snelheidsprofiel. Dat geldt kennelijk ook voor de diepte–gemiddelde turbulentie viscositeit. Deze is, net zoals de vorm, mede afhankelijk van de ruwheid van de bodem die in (3.138) wordt gerepresenteerd door z_0.

Verloop van de waterstand

Als de aanlandige wind uit de vorige paragraaf lang genoeg aanhoudt, zal zich een evenwicht instellen waarbij de windgedreven stroming naar de kust toe precies wordt gecompenseerd door een tegengesteld gerichte stroming die het gevolg is van een verhang dat is ontstaan door opstuwing. Voor die evenwichtstoestand hebben we in de vorige paragraaf een verband afgeleid tussen de windsnelheid en het verhang. Het resultaat is gegeven in (3.136). Met deze uitdrukking kunnen we het verloop van de waterstand in windrichting bepalen. Immers, over de volle lengte waarover de wind een schuifspanning op het water uitoefent, zal zich een verhang instellen. Die lengte wordt de strijklengte genoemd, meestal aangeduid met het symbool F (het Engelse woord voor strijklengte is *fetch*, vandaar).

Een veel voorkomende waterbouwkundige toepassing is het schatten van de verhoging van de waterstand bij een kust. Dat is bijvoorbeeld van belang voor het ontwerp van maatregelen ter bescherming tegen hoogwater.

Voor het bepalen van het verloop van de waterstand uit (3.136) moeten we ons bedenken dat de waterdiepte h in windrichting mede als gevolg van het verhang verandert. Daarnaast hebben eventuele variaties in bodemniveau invloed op de waterdiepte. Om (3.136) op te kunnen lossen hebben we dus ook een verband nodig tussen de waterstand ζ en de waterdiepte h en dat is $h = \zeta - b$, met b het bodemniveau. Door de afgeleide van deze relatie in de richting van de wind te bepalen (dus door te differentiëren naar x), kunnen we het verhang schrijven als een verandering van de waterdiepte, aangenomen dat het bodemprofiel $b(x)$ bekend is:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} \tag{3.139}$$

en daarmee wordt (3.136)

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = c_W \frac{W^2}{g}\frac{1}{h} - \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} \tag{3.140}$$

Om deze differentiaalvergelijking te kunnen integreren, hebben we een randvoorwaarde nodig. Een voor de hand liggende is de waterdiepte op één of andere locatie, bijvoorbeeld $h(x_0) = h_0$, met x_0 en h_0 voorgeschreven.

Voor een willekeurig bodemprofiel $b(x)$ is er geen analytische oplossing voor (3.140), maar kan deze wel langs numerieke weg worden benaderd. Voor een vlakke, horizontale bodem ($\mathrm{d}b/\mathrm{d}x = 0$) is wel een analytische oplossing mogelijk. Met schei-

ding van variabelen vinden we dat

$$h \cdot \mathrm{d}h = c_W \frac{W^2}{g} \cdot \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}h^2 = c_W \frac{W^2}{g} x + I \tag{3.141}$$

waarin I een integratieconstante is. Deze bepalen we uit de randvoorwaarde $h(x_0) = h_0$ met als resultaat

$$h(x) = \sqrt{2c_W \frac{W^2}{g}(x - x_0) + h_0^2} \tag{3.142}$$

In de meeste praktische toepassingen is de verandering in de waterstand klein ten opzichte van de waterdiepte. In dat geval is het verhang in windrichting vrijwel constant en kan worden volstaan met de benadering

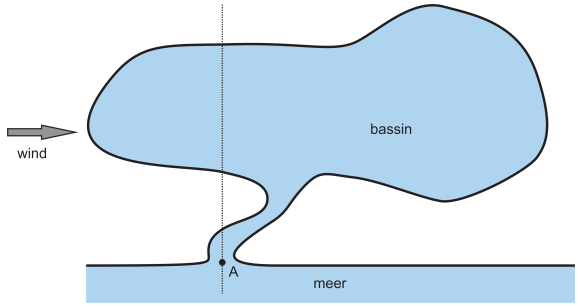
$$h(x) \approx c_W \frac{W^2}{g h_{\mathrm{rep}}}(x - x_0) + h_0 \tag{3.143}$$

waarin h_{rep} een representatieve waterdiepte is in de zin dat het daarbij behorende verhang representatief is voor het hele traject waarover de wind een schuifspanning uitoefent op het wateroppervlak. Vaak wordt $h_{\mathrm{rep}} = h_0$ gekozen of de waterdiepte zoals die was voordat het is gaan waaien. Als het gaat om opwaaiing in een bassin, kan voor h_{rep} ook de over dat bassin gemiddelde waterdiepte worden gekozen die optreedt nadat zich een stationaire toestand heeft ingesteld. Wat een verstandige keuze is, is casus specifiek.

Deze benadering (3.143) komt erop neer dat in de uiteindelijke, stationaire situatie sprake is van een vlakke, maar hellende waterspiegel. De richting van de helling is gelijk aan die van de wind. Loodrecht op de windrichting varieert de waterstand niet.

Een passende randvoorwaarde $h(x_0) = h_0$ ligt niet altijd voor het oprapen. We bekijken twee voorbeelden. Het eerste voorbeeld betreft een bassin met een vlakke, horizontale bodem. Het staat in open verbinding met een groot meer. Een bovenaanzicht van dit bassin is geschetst in figuur 3.29. Als het niet waait, is de waterstand in het bassin gelijk aan die op het meer. We gaan er in dit voorbeeld vanuit dat de waterstand op het meer constant is en niet wordt beïnvloed door wind rond het bassin. Die wind is er echter wel en zorgt in het bassin voor opstuwing aan de benedenwindse oever.

Omdat de bodem van het meer vlak en horizontaal is in combinatie met de verwachting dat de opstuwing klein is ten opzichte van de waterdiepte, kunnen we gebruik maken van de benadering (3.143). Volgens deze benadering zal zich in het bassin uiteindelijk een vlakke, hellende waterspiegel instellen. Vanwege de open verbinding met het meer moet de waterstand in het bassin ter hoogte van de aansluiting op het meer gelijk zijn aan de waterstand op het meer. Dat is de randvoorwaarde die we nodig hebben om het verloop van de waterstand op het meer te kunnen bepalen. Omdat de waterstand loodrecht op de windrichting niet



Figuur 3.29: Bovenaanzicht van een fictief bassin dat in open verbinding staat met een groot meer. Rond het bassin heerst een constante wind. De windrichting is in de schets aan gegeven met een pijl.

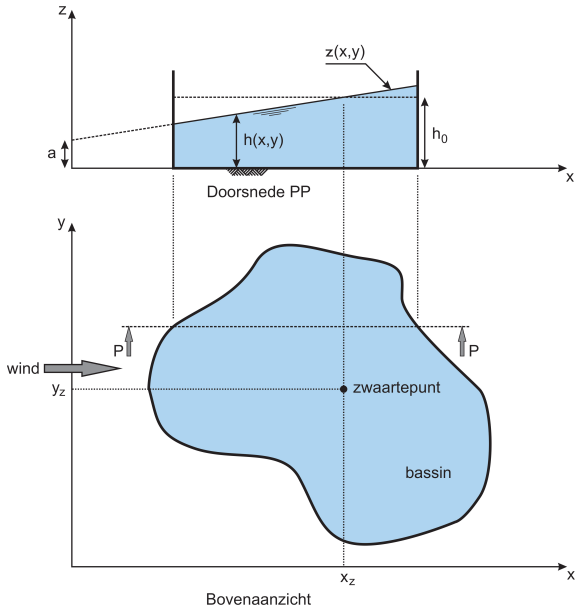
varieert, kunnen we stellen dat langs een lijn die dwars op de wind staat en door de aansluiting met het meer gaat (punt A in figuur 3.29), de waterstand overal gelijk is aan die op het meer. Bovenwinds van die lijn is de waterstand in het bassin lager dan die op het meer en benedenwinds daarvan is het juist andersom.

Het bassin dat we in dit voorbeeld gebruiken, kunnen we opgesplitst denken in twee delen. De scheiding tussen de beide delen is de lijn door punt A die loodrecht staat op de windrichting. Op deze manier krijgen we een bovenwinds deel van het bassin (links van de lijn door A in figuur 3.29) en een benedenwinds deel (rechts van de lijn door A in figuur 3.29). Door de wind stijgt de waterstand in het benedenwindse deel en daardoor neemt het volume water in dat deel van het bassin toe. In het bovenwindse deel gebeurt juist het omgekeerde. Daar daalt de waterstand en neemt het volume af. Het netto effect van deze twee veranderingen wordt gecompenseerd door uitwisseling van water met het meer.

Het tweede voorbeeld gaat ook over een bassin met een vlakke, horizontale bodem. Echter, in dit geval is het bassin rondom gesloten. Er is geen verbinding met een meer of ander bekken waaruit we de waterstand op één of ander punt in het bassin kunnen afleiden. Het is zodoende niet mogelijk om een randvoorwaarde van de vorm $h(x_0) = h_0$ op te stellen. Er is echter wel een andere voorwaarde waaraan moet worden voldaan. Omdat het bassin rondom gesloten is, kan het totale volume water in het bassin door de wind niet veranderen, afgezien van eventuele spetters die over de rand worden geblazen. Ook dit gesloten bassin kan in een bovenwinds en een benedenwinds deel worden opgesplitst en de scheiding tussen deze beide delen ligt zodanig dat de afname van het volume in het bovenwindse deel de toename in het benedenwindse deel precies compenseert. Dit werken we uit op basis van de benadering (3.143) waarbij we voor h_{rep} de waterdiepte kiezen zoals die was voordat het is gaan waaien. Daarmee ligt het uiteindelijke verhang in het bassin vast.

Het bassin waar het in dit voorbeeld over gaat, is geschetst in figuur 3.30. In de doorsnede bovenin figuur 3.30 is de oorspronkelijke waterdiepte aangegeven met h_0. Zoals gesteld gebruiken we die waterdiepte om het uiteindelijke verhang te schatten.

Nadat zich dat verhang heeft ingesteld, varieert de waterdiepte over het bassin.



Figuur 3.30: Bovenaanzicht van een rondom gesloten bassin. Rond het bassin heerst een constante wind. De windrichting is in de schets aan gegeven met een pijl. Als gevolg van die wind stelt zich uiteindelijk een bij benadering vlakke, hellende waterspiegel in.

We geven dit aan met $h(x, y)$, waarbij x en y horizontale coördinaten zijn. De wind waait in positieve x-richting. Daardoor zal de waterdiepte h wel met x variëren, maar niet met y.

Het totale volume V in het bassin volgt door integratie van de waterdiepte h over het horizontale oppervlak B van het bassin:

$$V = \iint_B h \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.144}$$

Omdat we een vlakke waterspiegel veronderstellen die helt in de richting van de wind (de x-richting), wordt de waterdiepte h gegeven door

$$h(x, y) = a + \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} x \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} = c_W \frac{W^2}{g h_{\mathrm{rep}}} \tag{3.145}$$

waarin $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}x$ het verhang is (zie (3.136)) en a is een fictieve waterdiepte. Het is de waterdiepte die gevonden wordt bij de y–as als we de waterspiegel in het bassin tot die as zouden doortrekken. In feite is uitdrukking (3.145) voor h niets anders dan de benadering (3.143) waar we vanuit zijn gegaan.

Substitutie van (3.145) in (3.144) geeft

$$V = \iint_B a + \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = a \iint_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{d\zeta}{dx} \iint_B x \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.146}$$

De linker dubbele integraal in het rechter lid van deze uitdrukking is niets anders

dan de horizontale oppervlakte van het bassin. Deze oppervlakte noteren we als A.

Het totale volume dat uit (3.146) volgt, moet gelijk zijn aan het volume dat in het bassin aanwezig was voordat het is gaan waaien. Dat oorspronkelijke volume is $h_0 A$. We vullen dit in (3.146) in en delen vervolgens door A. Dit leidt tot

$$h_0 = a + \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\frac{1}{A}\iint_B x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.147}$$

De dubbele integraal in het rechter lid van dit resultaat is het zogeheten eerste orde moment van het oppervlak van het bassin. Gedeeld door het oppervlak A levert dit de x–coördinaat x_z van het zwaartepunt van het oppervlak van het bassin:

$$x_z = \frac{1}{A}\iint_B x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.148}$$

Door combinatie met (3.147) vinden we

$$a = h_0 - x_z\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} \tag{3.149}$$

Hiermee hebben we de fictieve waterdiepte uitgedrukt in de oorspronkelijke waterdiepte h_0 in het bassin, de geometrie van het bassin en een schatting van het verhang dat zich uiteindelijk zal instellen. Het verloop van de waterdiepte in het bassin vinden we door deze uitdrukking voor a in te vullen in (3.145):

$$h(x,y) = h_0 + \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}(x - x_z) \tag{3.150}$$

Dit resultaat laat zien dat langs de lijn $x = x_z$ de waterdiepte in het bassin gelijk is aan de oorspronkelijke waterdiepte h_0. Deze lijn staat loodrecht op de windrichting. Benedenwinds van de lijn is de uiteindelijke waterdiepte groter dan de oorspronkelijke en bovenwinds is de waterdiepte kleiner. Kortom, als we, net als in het eerste voorbeeld, ook het gesloten bassin in gedachten verdelen in een bovenwinds en een benedenwinds deel, dan ligt de scheiding tussen beide delen op een lijn die loodrecht staat op de windrichting en door het zwaartepunt van het horizontale oppervlak van het bassin gaat.

Bij half open systemen zoals een kust langs een uitgestrekte zee, is het moeilijk om een passende randvoorwaarde te vinden voor het schatten van windopzet op de manier die in deze paragraaf aan de orde is. Doorgaans neemt de waterdiepte toe met de afstand uit de kust en daarmee neemt ook het verhang in die richting af. Dat wekt de indruk dat aangenomen kan worden dat op enige afstand uit de wind een nog slechts verwaarloosbare invloed heeft op de waterstand en dat daaruit een randvoorwaarde kan worden afgeleid. Dat is echter tamelijk dubieus. Tenzij de betreffende kust vlakbij de rand van een continentaal plat ligt waar voorbij de waterdiepte snel toeneemt tot orde een kilometer of meer, kan het verhang tot

op grote afstand uit de kust significant blijven. Het is lang niet altijd realistisch om te veronderstellen dat de wind over zulke afstanden constant is. Bovendien gaat ook de duur van de wind een rol spelen. Naarmate de afstand waarover opzet wordt gegenereerd toeneemt, duurt het steeds langer voordat een stationaire toestand wordt bereikt. De methode die in deze paragraaf is gepresenteerd is daarom beperkt bruikbaar. Het geeft een schatting van de opwaaiing (of afwaaiing) die maximaal verwacht mag worden in bassins waarvan de horizontale afmetingen niet groot zijn ten opzichte van die van het windveld.

3.6.3 Bochtstroming

Ook in een open waterloop heeft stroming een 3–dimensionaal karakter. De dominante component van de stroming is gericht langs de as van de waterloop en alles wat zich dwars daarop afspeelt, is doorgaans secundair. Daarmee is niet gezegd dat die secundaire componenten altijd van ondergeschikt belang zijn. Indien persistent kunnen zulke relatief kleine componenten na verloop van tijd een wezenlijk effect sorteren. Dat doet zich bijvoorbeeld voor bij een gekromde waterloop.

Door het centrifugaaleffect lijkt het alsof de stroming in een gekromde waterloop naar de buitenbocht wordt gedrukt. Men spreekt dan van een centrifugaalkracht, maar eigenlijk is dat niet juist. Er is een naar de binnenbocht gerichte kracht nodig om de stroming de as van de waterloop te laten volgen. Het ontbreken van die kracht uit zich als de neiging om uit de bocht te vliegen. Die centrifugaalkracht is zodoende een schijnkracht. Daarom is het beter om van het centrifugaaleffect te spreken dan van een centrifugaalkracht.

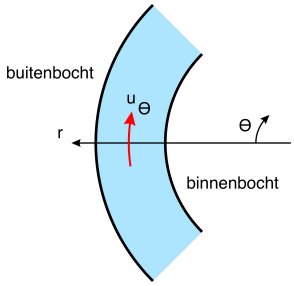
Dat centrifugaaleffect is persistent. Het is altijd naar de buitenbocht gericht, onafhankelijk van de richting van de primaire stroming in de waterloop. Precies die eigenschap zorgt ervoor dat dit effect op termijn een wezenlijke invloed kan hebben op de morfologie van de waterloop.

In deze paragraaf gaan we in op de secundaire stroming die door dit effect wordt gegenereerd. Vervolgens kijken we naar de invloed die deze stroming heeft op de morfologische ontwikkeling van de rivier.

Voor het beschrijven van de stroming maken we gebruik van continuïteit en de impulsbalans voor horizontaal uniforme stroming, net zoals we dat in de voorgaande paragraaf voor windgedreven stroming hebben gedaan. Die impulsbalans passen twee keer toe: eerst voor de component van de stroming langs de as van de waterloop en daarna voor de component daar loodrecht op.

Ter wille van de eenvoud gaan we ervan uit dat de as van de waterloop in de bocht cirkelvormig is. Het ligt dan voor de hand om de stroming te beschrijven ten opzicht van cilinder coördinaten (r, θ), met r de radiale coördinaat en θ de tangentiële. De snelheidscomponenten in deze twee richtigen noteren we achtereenvolgens met u_r en u_θ (zie figuur 3.31)

Een volgende vereenvoudiging is dat we aannemen dat de tangentiële (primaire) component van de stroming wel invloed heeft op de radiale (secundaire), maar niet



Figuur 3.31: Schematisch bovenaanzicht van een stukje gekromde waterloop en de (r, θ) coördinaten ten opzichte waarvan bochtstroming in deze paragraaf wordt beschreven.

omgekeerd. Voor een beschrijving van het karakter van de secundaire stroming is dat een acceptabele benadering. Bovendien laat het toe dat we eerst de primaire component van de stroming beschrijven en daarna de secundaire.

Met deze benadering is de tangentiële component van de stroming gelijk aan wat je in een rechte waterloop zou vinden. Deze stroming wordt aangedreven door een drukgradiënt die gericht is langs de as van de waterloop. Als we uitgaan van stationaire condities, is de bijbehorende impulsbalans

$$0 = -\frac{g}{r}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\nu_t \frac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}z}\right) \quad ; \quad u_\theta(z_0 + b) = \left.\frac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\zeta} = 0 \tag{3.151}$$

waarin b het niveau van de bodem is.

De factor $1/r$ in de eerste term van het rechter lid van deze balans komt voort uit het gebruik van cylinder coördinaten. Deze term staat voor de drukgradiënt langs de as van de waterloop, ofte wel het verhang dat de primaire stroming aandrijft. De grootte hiervan veronderstellen we bekend.

Als we uitgaan van een parabolisch verloop van de turbulentie viscositeit ν_t, volgt dat (zie appendix C)

$$u_\theta(z) = -\frac{g}{r}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\theta}\frac{h^2}{\nu_{t,\mathrm{gem}}} \ln\frac{z-b}{z_0} \tag{3.152}$$

De secundaire stroming, dus de stroming in de dwarsdoorsnede van de waterloop, wordt bepaald door de balans tussen het centrifugaal–effect en een verhang dat zich in de dwarsdoorsnede instelt. Door dat centrifugaaleffect ondervindt het water een (schijnbare) versnelling naar de buitenbocht. Als die buitenbocht een gesloten rand is, zal het water daartegen worden opgestuwd. Het resultaat is dat de waterstand langs de buitenbocht hoger is dan die langs de binnenbocht. Dwars op de as van de waterloop ontstaat op deze manier een verhang. De versnelling die daarbij hoort is gericht naar de binnenbocht.

In een stationaire toestand heffen de stromingen die door beide versnellingen worden gegenereerd elkaar in diepte-geïntegreerde zin op. Dat wil echter niet zeggen dat de secundaire stromingscomponent overal gelijk is aan nul. Bovenin de waterkolom is het centrifugaaleffect sterker dan de drukgradiënt (het verhang), met als gevolg dat daar een stroming in de richting van de buitenbocht optreedt. Onderin

de waterkolom is dat juist andersom. Daar is sprake van een stroming naar de binnenbocht. De combinatie van beide is een verticale circulatie in de dwarsdoorsnede van de waterloop. Dat is vergelijkbaar met de windgedreven circulatie die in de voorgaande paragraaf is beschreven.

Voor de beschrijving van deze circulatie zien we de radiale snelheidscomponent u_r als de superpositie van een deel dat kan worden toegeschreven aan het centrifugaal–effect ($u_{r,c}$) en een deel dat hoort bij de drukgradiënt ($u_{r,p}$):

$$u_r(z) = u_{r,c}(z) + u_{r,p}(z) \tag{3.153}$$

En in een stationaire situatie waarbij de waterloop netjes binnen de oevers blijft, geldt dat

$$\int_{z_0+b}^{\zeta} u_{r,c}(z) + u_{r,p}(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{3.154}$$

Het deel $u_{r,p}$ hoort bij het verhang $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}r$ dat zich in dwarsrichting instelt en kan worden berekend uit

$$0 = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\nu_t \frac{\mathrm{d}u_{r,p}}{\mathrm{d}z}\right) \quad ; \quad u_{r,p}(z_0+b) = \left.\frac{\mathrm{d}u_{r,p}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\zeta} = 0 \tag{3.155}$$

De grootte van het verhang in dwarsrichting is niet op voorhand bekend, maar kan worden bepaald uit de voorwaarde (3.154) als we ook het andere deel $u_{r,c}$ van de radiale snelheidscomponent hebben bepaald.

Ook daarvoor gaan we uit van de impulsbalans voor horizontaal uniforme stroming. Met inbegrip van de versnelling u_θ^2/r die hoort bij het centrifugaaleffect kan deze worden geschreven als

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\nu_t \frac{\mathrm{d}u_{r,c}}{\mathrm{d}z}\right) + \frac{1}{r}u_\theta^2 \quad ; \quad u_{r,c}(z_0+b) = \left.\frac{\mathrm{d}u_{r,c}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\zeta} = 0 \tag{3.156}$$

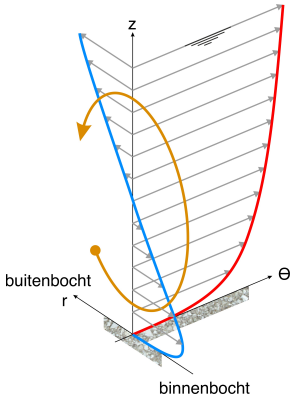
De oplossing hiervan is

$$u_{r,c}(z) = \int_{z_0+b}^{z} -\frac{1}{\nu_t}\int_{z'}^{\zeta} \frac{u_\theta^2}{r}\mathrm{d}z''\mathrm{d}z' \tag{3.157}$$

met u_θ volgens (3.152).

Bovenstaande uitdrukking voor $u_{r,c}$ werken we niet verder uit, maar volstaan met een grafische voorstelling van de primaire en secundaire snelheidscomponenten (figuur 3.32).

De combinatie van de verticale circulatie in de dwarsdoorsnede en de primaire component van de stroming in langsrichting, staat bekend als spiraalstroming. Een waterdeeltje doorloopt de circulatie terwijl het deel uitmaakt van de langsstroming en dat leidt tot een spiraalvormige baan.



Figuur 3.32: 3D-impressie van de profielen van de primaire en secundaire snelsheidscomponenten.

Onderdeel van de verticale circulatie is een stroming langs de bodem van de waterloop van de buitenbocht naar de binnenbocht. Bij een erodeerbare bodem gaat dat gepaard met transport van sediment in dezelfde richting. Als het bodemmateriaal te zwaar is om met de opwaartse stroming bij de binnenbocht te worden meegevoerd, blijft het materiaal daar achter. Op deze manier sedimenteert de binnenbocht. Tegelijkertijd erodeert de buitenbocht om dat steeds bodemmateriaal door de stroming naar de binnenbocht wordt opgepakt.

Het lange–termijn gevolg hiervan is dat de bocht in de waterloop zich naar buiten toe uitbouwt en steeds ruimer wordt. Dit proces ligt aan de basis van de vorming van meanders. In het hoofdstuk over riviermorfologie gaan we daar nader op in (paragraaf 6.3).

4

Golven

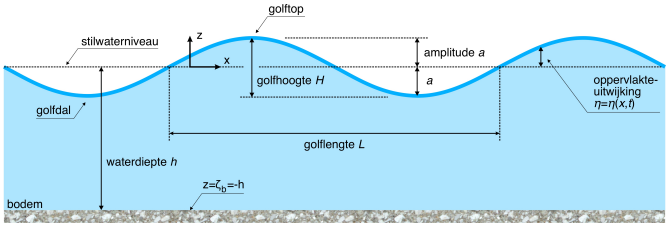
4.1 Inleiding

De term 'golf' heeft, ook in de waterbouwkunde, meerdere betekenissen. Vaak gaat het om een verstoring van het vrije oppervlak van een watermassa. Maar de term kan ook verwijzen naar bodemvormen die zich in een rivier of zee voordoen. Op de bodem van de Noordzee voor de Hollandse kust, bijvoorbeeld, komen zandgolven voor met een lengte in de orde van kilometers en een hoogte in de orde van meters. Daarnaast kan 'golf' betrekking hebben op ondulaties van het grensvlak tussen lagen in een watermassa met verschillende dichtheid. Daarbij kan worden gedacht aan zout water dat vanuit zee een riviermond binnendringt. Vanwege het verschil in dichtheid ontstaat een systeem van twee lagen met het zoute zeewater onderin en het zoete rivierwater bovenin. Afhankelijk van lokale omstandigheden kan zich langs het grensvlak van beide lagen een golfbeweging ontwikkelen. Voorts merken we op dat 'golf' ook de betekenis kan hebben van baai.

In dit hoofdstuk over golven beperken we ons tot periodieke verstoringen van het vrije oppervlak van een watermassa. We hebben het over golven die je kunt zien vanaf het strand of vanaf een schip op zee, golven die veelal ergens door wind zijn gegenereerd. Hoe ze zich vanaf die plaats voortplanten en hoe hun eigenschappen zich daarbij ontwikkelen, komt in dit hoofdstuk aan bod. Dat is onder meer van belang voor kustmorfologie (paragraaf 6.4) en het ontwerp van beschermingsconstructies (zie hoofdstuk 7).

Bij de beschrijving van golven en hun eigenschappen, hanteren we de benaming van afmetingen en kenmerken die is aangegeven in figuur 4.1.

Het getij, alhoewel dat ook een periodieke verstoring van het wateroppervlak is, laten we in dit hoofdstuk buiten beschouwing. Dat is het onderwerp van paragraaf 5.3. Niet–periodieke verstoringen, zoals translatiegolven en tsunami's komen in dit hoofdstuk ook niet aan de orde. Voor translatiegolven wordt verwezen naar appendix F.



Figuur 4.1: Overzicht van enkele begrippen die worden gebruikt bij de beschrijving van golven.

4.2 Lineaire golftheorie

Het vrije oppervlak van een watermassa zal onder invloed van alleen zwaartekracht de vorm aannemen van een ruimtelijk gekromd oppervlak waar de zogeheten zwaartekracht—potentiaal dezelfde waarde heeft. Dat wil zeggen dat op elk punt in dat oppervlak evenveel energie nodig is om een waterdeeltje met een voorgeschreven massa vanuit dat oppervlak over een voorgeschreven afstand in een voorgeschreven richting te verplaatsen. Dit is niets anders dan het horizontale oppervlak dat we zien bij stilstaand water in een glas, een badkuip, een vijver, een meer en ga zo maar door.

Zo'n horizontaal vrij oppervlak is een evenwichtssituatie die door de zwaartekracht in stand wordt gehouden[23]. Een verstoring van dat evenwicht manifesteert zich als een lopende golf. In de Engelstalige literatuur wordt dat een *surface gravity wave* genoemd.

Er zijn diverse theorieën die het gedrag van zulke golven beschrijven. Een bekende, veel gebruikte en breed toepasbare is de Lineaire Golftheorie, met name in de Engelstalige literatuur ook wel de Airy Golftheorie genoemd, naar George Biddell Airy die deze theorie halverwege de 19^{e} eeuw heeft afgeleid en gepubliceerd. Airy ging uit van een homogene, onsamendrukbare, niet–viskeuze vloeistof die niet onderhevig is aan windschuifspanning en luchtdrukvariaties aan het oppervlak, ook niet aan het Coriolis–effect (zie paragraaf 5.2) en waarin de stroming rotatie–vrij[24] is. Bovendien veronderstelde Airy een vlakke, horizontale bodem en verstoringen van het wateroppervlak die klein zijn ten opzichte van de waterdiepte in ongestoorde toestand.

Met deze uitgangspunten heeft Airy de continuïteitsvergelijking en de impulsbalans uitgewerkt tot een lineaire vergelijking[25] waarmee vrije oppervlaktegolven kunnen worden beschreven, vandaar de naam lineaire golftheorie. Voor deze uitwerking wordt verwezen naar de literatuur (bijvoorbeeld Holthuijsen (2007)). Wij gebruiken de oplossing van deze vergelijking die een harmonische, lopende golf voorstelt

[23]Naast zwaartekracht speelt bijvoorbeeld ook de oppervlaktespanning van de vloeistof een rol bij het in stand houden van het evenwicht. Voor de waterbouwkundige praktijk is veelal de zwaartekracht dominant en daarom beperken we ons in dit boek daartoe.

[24]In wiskundige zin betekent rotatie–vrij dat $\nabla \vec{u} = \vec{0}$, waarbij de ∇ operator is gedefinieerd als $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$.

[25]Het gaat hierbij om de Laplace vergelijking met randvoorwaarden die zijn gerelateerd aan vermelde uitgangspunten.

die zich voortplant in positieve x-richting:

$$\eta(x,t) = a\sin(\omega t - kx) \tag{4.1}$$

waarin η de verticale uitwijking van het oppervlak is (afhankelijk van plaats x en tijd t), a de amplitude van de golf, ω de hoekfrequentie en k het golfgetal. De hoeksnelheid ω is gerelateerd aan de golfperiode T en het golfgetal k aan de golflengte L volgens

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad k = \frac{2\pi}{L} \tag{4.2}$$

De snelheid waarmee deze golf zich in x–richting voortplant, kunnen we afleiden door in gedachten met die golf mee te reizen, bijvoorbeeld op de golftop. Onze snelheid is dan per definite gelijk aan die van de golf. Bovendien is voor onze plaats op de golf de fase $\omega t - kx$ constant. Daar geldt zodoende dat

$$\frac{\partial(\omega t - kx)}{\partial t} = 0 \tag{4.3}$$

zodat

$$\frac{\partial(\omega t)}{\partial t} - \frac{\partial(kx)}{\partial t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega - k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.4}$$

Hierin staat x voor onze positie op de golf en dan is $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ onze snelheid in x–richting en dus ook de snelheid waarmee een punt waar de fase van de golf constant is, zich verplaatst. Dit wordt de fasesnelheid genoemd, doorgaans aangegeven met het symbool c:

$$c = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T} \tag{4.5}$$

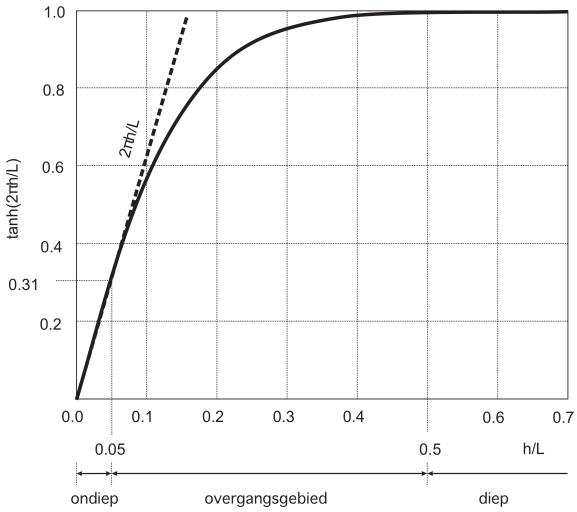
Andere eigenschappen van golven die uit de lineaire golftheorie naar voren komen, zoals met betrekking tot de relatie tussen golflengte en –periode, de waterbeweging onder golven alsmede de energie en impuls die daarin aanwezig zijn en hoe die worden doorgegeven als golven zich voortplanten, komen aan bod in de volgende paragrafen.

4.3 Golflengte en -periode

Volgens de lineaire golftheorie bestaat er voor de harmonische golf (4.1) een directe relatie tussen de hoeksnelheid ω, het golfgetal k en de golf–gemiddelde waterdiepte h (dat is de waterdiepte in ongestoorde toestand, dus de waterdiepte die er zou zijn in afwezigheid van golven). Deze relatie wordt gegeven door

$$\omega^2 = gk\tanh(kh) \tag{4.6}$$

en staat bekend als de dispersie relatie. Voor het bewijs hiervan wordt wederom verwezen naar de literatuur.



Figuur 4.2: Verloop van $\tanh(2\pi h/L)$ met de verhouding h/L van waterdiepte en golflengte. Ingeval van *ondiep water* ($h/L \leq 1/20$) is $\tanh(2\pi h/L) \approx 2\pi h/L$. Bij *diep water* ($h/L \geq 1/2$), daarentegen, is $\tanh(2\pi h/L) \approx 1$. Het interval $1/20 < h/L < 1/2$ wordt overgangsgebied genoemd.

In termen van de golfperiode T en de golflengte L kan deze relatie worden geschreven als

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \tag{4.7}$$

In figuur 4.2 is de term $\tanh(2\pi h/L)$ uit de dispersie relatie getekend als functie van h/L. Deze tekening laat zien dat voor h/L in de buurt van 0, $\tanh(2\pi h/L) \approx 2\pi h/L$, terwijl $\tanh(2\pi h/L)$ voor toenemende h/L asymptotisch nadert tot 1.

Dat wil zeggen dat voor $h/L \ll 1$ de dispersierelatie kan worden benaderd met

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \approx \frac{gT^2}{2\pi} \frac{2\pi h}{L} = \frac{gT^2 h}{L} \tag{4.8}$$

waaruit valt af te leiden dat

$$\frac{L^2}{T^2} = gh \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{gh} \tag{4.9}$$

Hieruit blijkt dat als de golflengte veel groter is dan de waterdiepte, zowel de lengte als de fasesnelheid van de golven alleen afhankelijk zijn van de waterdiepte en niet van de golfperiode. Golven waarvoor dit geldt, worden *ondiep water* golven genoemd. Dat heeft dus niets te maken met de waterdiepte in absolute zin, maar alles met de verhouding van de waterdiepte en de golflengte. In de praktijk wordt deze benadering toegepast voor $h/L \leq 1/20$.

Een voorbeeld van een golf in *ondiep water* is het getij. In bijvoorbeeld het zuidelijke deel van de Noordzee, met een waterdiepte in de orde van 40m, is de lengte van de getijgolf zo'n 900km. Met deze afmetingen is $h/L \approx 0,45 \times 10^{-5} \leq 1/20$.

Voor betrekkelijk grote h/L, daarentegen, is $\tanh(2\pi h/L) \approx 1$. Daarmee reduceert de dispersie relatie tot

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tag{4.10}$$

en met $c = L/T$ vinden we voor de bijbehorende fasesnelheid

$$c = \frac{gT}{2\pi} \tag{4.11}$$

In tegenstelling tot *ondiep water* zijn de lengte en de fasesnelheid van golven voor grote h/L blijkbaar alleen afhankelijk van de golfperiode en niet van de waterdiepte. In dit geval spreekt men van *diep water*. De golflengte en fasesnelheid die zich hierbij voordoen, worden doorgaans genoteerd als, achtereenvolgens, L_0 en c_0, waarin het subscript 0 verwijst naar *diep water*. Per definitie geldt zodoende voor *diep water* dat

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} \quad ; \quad c_0 = \frac{gT}{2\pi} \tag{4.12}$$

In het algemeen wordt $h/L = 1/2$ gehanteerd als ondergrens voor *diep water*[26].

Het interval $1/20 < h/L < 1/2$ tussen *ondiep* en *diep* water in, wordt het overgangsgebied genoemd. De golflengte is in dat interval niet bij goede benadering afhankelijk van alleen de waterdiepte (zoals bij *ondiep water*) of alleen de golfperiode (zoals bij *diep water*), maar afhankelijk van zowel h als T.

Voor veel waterbouwkundige toepassingen biedt de dispersie relatie een verband tussen de golflengte en –periode bij een voorgeschreven waterdiepte. Dat verband is expliciet in de periode T maar impliciet in de lengte L. Dat wil zeggen dat de golfperiode wel direct kan worden bepaald als de golflengte bekend is, maar omgekeerd kan dat niet. Als de golfperiode en de waterdiepte voorgeschreven zijn, kan de golflengte L wel langs numerieke weg worden bepaald. In appendix H worden daarvoor twee methoden gegeven. De eerste is makkelijker te programmeren dan de tweede, maar vergt voor gelijke nauwkeurigheid van de uitkomst meestal iets meer rekentijd.

Dat de dispersie relatie impliciet is in de golflengte L suggereert dat bij voorgeschreven waterdiepte en golfperiode pas kan worden vastgesteld of sprake is van *ondiep water*, *diep water* of overgangsgebied nadat L uit de dispersie relatie is opgelost. Dat is echter niet het geval. De grenzen tussen de drie gebieden kunnen ook worden geformuleerd in termen van h/L_0 en die verhouding is bij bekende h en T wel direct te bepalen. Dat gaat als volgt.

[26]Het is goed om te bedenken dat de aanduiding *ondiep water* ook wordt gebruikt voor de beschrijving van stroming. De ondiep–water vergelijkingen waar het in paragraaf 2.4 over gaat, hebben betrekking op situaties waarbij het drukverloop over de waterkolom bij goede benadering hydrostatisch is. Onder golven is dat niet het geval, maar naarmate de golflengte toeneemt ten opzichte van de waterdiepte nadert de drukverdeling steeds meer naar de hydrostatische verdeling. Echter, wat bij de beschrijving van stroming 'ondiep' wordt genoemd gaat over veel grotere verhoudingen tussen golflengte en waterdiepte dan bij de beschrijving van golven.

Stel dat in een of andere situatie de waterdiepte h en de golfperiode T bekend zijn, maar de golflengte L niet. Die golflengte staat voor die situatie echter wel vast, alleen kennen we die nog niet. Daarom is h/L een onbekende en die noemen we (bijvoorbeeld) ξ, dus $\xi = h/L$. Combinatie met de dispersie relatie (4.7) geeft

$$\xi = \frac{h}{L} = \frac{h}{L_0}\,\frac{L_0}{L} = \frac{h}{L_0}\,\frac{1}{\tanh(2\pi h/L)} = \frac{h}{L_0}\,\frac{1}{\tanh(2\pi\xi)} \tag{4.13}$$

ofte wel

$$\frac{h}{L_0} = \xi\tanh(2\pi\xi) = \frac{h}{L}\tanh\left(2\pi\frac{h}{L}\right) \tag{4.14}$$

Hieruit volgt dat $h/L \leq 1/20$ overeenkomt met $h/L_0 \leq 0,015$. Op dezelfde manier komt $h/L \geq 1/2$ overeen met $h/L_0 \geq 0,498 \approx 1/2$. Dat de ondergrens van diep water ($h/L_0 = 0,498$) dicht in de buurt ligt van $1/2$, is niet verrassend. In geval van *diep water* geldt immers dat $L = L_0$ en dan is ook $h/L = h/L_0$. Op dezelfde manier spreekt het voor zich dat bij de bovengrens van *ondiep water* h/L en h/L_0 sterk van elkaar verschillen.

4.4 Orbitaalbeweging

De golven waar het in dit hoofdstuk over gaat, gaan gepaard met een tijdsafhankelijke afwijking van de hydrostatische drukverdeling die er (ten opzichte van stilwaterniveau) zou zijn in afwezigheid van die golven. Onder een golftop is de waterdruk groter dan die hydrostatische druk en onder een golfdal kleiner. Volgens de lineaire golftheorie wordt deze afwijking p_{golf} als functie van de lokatie z in de waterkolom en de fase $\omega t - kx$ van de golf, gegeven door

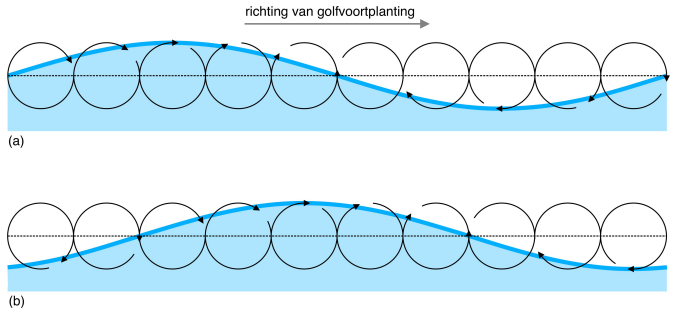
$$p_{\text{golf}} = \rho g a\frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)}\sin(\omega t - kx) \tag{4.15}$$

(zie bijvoorbeeld Holthuijsen (2007) voor een gedetailleerde uitleg).

Het verband met de fase van de golf laat zien dat sprake is van een drukgolf die zich meebeweegt met de verstoring van het wateroppervlak. Op elke lokatie in de waterkolom is zodoende sprake van een met de tijd variërende drukgradiënt. Als gevolg hiervan ondervinden waterdeeltjes onder een lopende golf een continu variërende kracht en dus ook een versnelling.

Volgens uitdrukking (4.15) is die versnelling net zo periodiek als de drukvariatie. De horizontale component van die versnelling is immers gerelateerd aan de horizontale drukgradiënt $\partial p_{\text{golf}}/\partial x$ en de vertikale component aan verticale gradiënt $\partial p_{\text{golf}}/\partial z$. Beide gradiënten variëren op dezelfde manier met de tijd als de verstoring van het wateroppervlak, namelijk volgens $\sin(\omega t - kx)$.

Een waterdeeltje ondervindt dus tegelijk en in fase een periodieke verticale versnelling en een horizontale versnelling. Door deze combinatie doorloopt dat waterdeeltje een ellipsvormige baan. Dat wordt de orbitaalbeweging genoemd.



Figuur 4.3: Impressie van de orbitaalbeweging aan het wateroppervlak bij golven op *diep water*. Waterdeeltjes doorlopen een cirkelvormige baan. De golf beweegt zich van links naar rechts. Figuur (b) gaat over dezelfde golf als die in (a), maar dan $0{,}2T$ later.

Bij *diep water* (dus als de waterdiepte groot is ten opzichte van de golflengte) is de ellips die door een waterdeeltje wordt doorlopen vrijwel identiek aan een cirkel. Naarmate de verhouding tussen waterdiepte en golflengte afneemt (ofte wel naarmate de golflengte toeneemt ten opzichte van de waterdiepte), wordt die ellips steeds platter, in de zin dat de horizontale as steeds groter wordt in verhouding tot de verticale.

Voor *diep water* is de orbitaalbeweging van waterdeeltjes aan het wateroppervlak geïllustreerd in figuur 4.3, waarin de positie van een waterdeeltje aan het opperlak wordt gevolgd in de tijd. Dat deeltje bevindt zich ter hoogte van de pijlpunt in de reeks van 10 cirkels die naast elkaar zijn weergegeven, elk met het middelpunt op het niveau van de golf-gemiddelde (ongestoorde) waterstand (stilwaterniveau).

In deze figuur beweegt de golf zich van links naar rechts. Als we aan de hand van deze figuur de positie van een individueel waterdeeltje aan het wateroppervlak willen volgen tijdens de passage van de golf, dan moeten we de cirkels in deze figuur in omgekeerde richting, dus van rechts naar links interpreteren. Op die manier zien we dat als de golf zich van links naar recht voortplant, roteert een waterdeeltje aan het oppervlak met de klok mee (rechtsom). Dat is ook te zien door figuren 4.3(a) en 4.3(b) met elkaar te vergelijken. Beide figuren gaan over dezelfde golf, maar gezien op twee verschillende momenten. Het tijdverschil tussen beide is $0,2\ T$ (T is de golfperiode). De cirkels die in figuur 4.3(b) zijn weergegeven, zijn (gezien van links naar rechts) $0,2 \times 2\pi$ rechtsom gedraaid ten opzichte van die in figuur 4.3(a).

Met deze figuur 4.3 is niet aangetoond dat de baan van het gevolgde deeltje daadwerkelijk cirkelvormig is. Bij het tekenen van de figuur is dat op voorhand aangenomen. Volgens de lineaire golftheorie wordt voor de orbitaalbeweging de snelheid van een waterdeeltje gegeven door

$$u_x = a\omega \frac{\cosh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx) \tag{4.16}$$

$$u_z = a\omega \frac{\sinh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) \tag{4.17}$$

waarin u_x de horizontale component van de snelheid en u_z de verticale component

(zie bijvoorbeeld Holthuijsen (2007)). Voor de orbitaalbeweging rond een vaste positie x, variëren beide snelheidscomponenten sinusvormig met de tijd, zij het $T/4 = \pi/(2\omega)$ uit fase. Bovendien hebben ze, afhankelijk van de locatie z in de waterkolom, verschillende amplituden. Waterdeeltjes doorlopen daarmee een ellipsvormige baan.

Ingeval van *diep water*, waar $h/L > 1/2$ en dus ook $kh \gg 1$, is $\sinh(kh) \approx (1/2)e^{kh}$, zodat voor de factor $\cosh(k(h+z))/\sinh(kh)$ in de amplitude van de snelheidscomponent u_x kan worden benaderd met

$$kh \gg 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\cosh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \approx \frac{e^{kh}\, e^{kz} + e^{-kh}\, e^{-kz}}{e^{kh}} = e^{kz} + e^{-2kh}\, e^{-kz} \approx e^{kz} \tag{4.18}$$

Bedenk hierbij dat $z = 0$ bij het stil water niveau en $z = -h$ bij de bodem. Voor deze en tussenliggende waarden van z is steeds $e^{-2kh}\, e^{-kz} \ll e^{kz}$.

Op dezelfde manier geldt voor de factor $\sinh(k(h+z))/\sinh(kh)$ in de amplitude van de snelheidscomponent u_z dat

$$kh \gg 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\sinh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \approx \frac{e^{kh}\, e^{kz} - e^{-kh}\, e^{-kz}}{e^{kh}} = e^{kz} - e^{-2kh}\, e^{-kz} \approx e^{kz} \tag{4.19}$$

zodat

$$kh \gg 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u_x \approx a\omega e^{kz} \sin(\omega t - kx) \\ u_z \approx a\omega e^{kz} \cos(\omega t - kx) \end{cases} \tag{4.20}$$

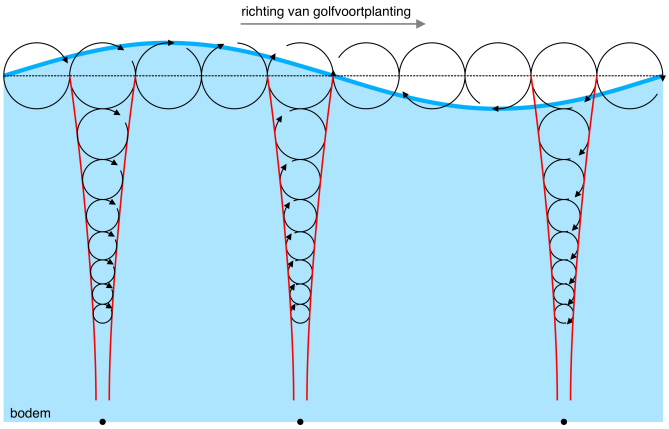
Dit laat zien dat bij *diep water*, de orbitaalbeweging cirkelvormig is. Beide snelheidscomponenten hebben immers dezelfde amplitude en zijn een kwart periode uit fase. Bovendien neemt de snelheidsamplitude exponentieel af met de afstand onder het stil water niveau. Op een afstand van 1 keer de golflengte onder dat niveau, bijvoorbeeld, is die amplitude ongeveer 0,2% van die aan het oppervlak. Een illustratie van de orbitaalbeweging bij *diep water* is gegeven in figuur 4.4.

Bij *ondiep water*, daarentegen, is $kh \ll 1$ en nadert $\sinh(kh)$ tot kh, $\sinh(k(h+z))$ tot $k(h+z)$ en geldt voor alle $z \in [-h, 0]$ dat $\cosh(k(h+z)) \approx 1$. Met deze benaderingen vinden we

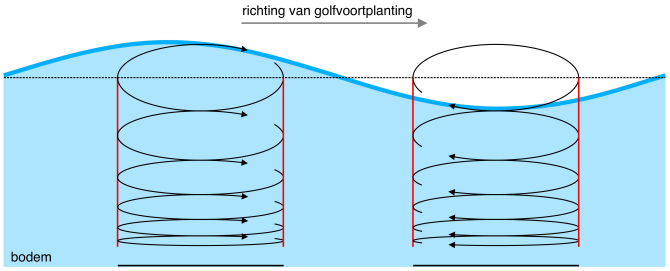
$$kh \ll 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u_x \approx \dfrac{a\omega}{kh} \sin(\omega t - kx) \\ u_z \approx a\omega \left(1 + \dfrac{z}{h}\right) \cos(\omega t - kx) \end{cases} \tag{4.21}$$

waaruit blijkt dat de amplitude van de horizontale snelheidscomponent onafhankelijk is van de positie z in de waterkolom[27] en dat de amplitude van de verticale component afneemt van $a\omega$ bij het stil water niveau tot 0 bij de bodem. Als sprake

[27] Die volledige onafhankelijkheid gaat alleen op in de limiet $kh \rightarrow 0$. Bij toenemende kh neemt de amplitude van de horizontale snelheidscomponent steeds meer af in de richting van de bodem.



Figuur 4.4: Illustratie van de orbitaalbeweging bij golven op *diep water*. Waterdeeltje doorlopen een cirkelvormige baan. Ter hoogte van het stilwater niveau is de straal van de cirkel gelijk aan de amplitude van de golf. Naar de bodem toe neemt die straal exponentieel af met de afstand tot het stilwaterniveau.



Figuur 4.5: Illustratie van de orbitaalbeweging bij golven op *ondiep water*. Waterdeeltje doorlopen een ellipsvormige baan. Ter hoogte van het stilwater niveau is de lengte van de korte as (vertikaal) gelijk aan de golfhoogte. Naar de bodem toe neemt deze lengte af tot nul. De lengte van de lange as (horizontaal) neemt nauwelijks af.

is van *ondiep water*, heeft de orbitaalbeweging zodoende de vorm van een ellips die naar de bodem toe steeds platter wordt. Dit is geïllustreerd in figuur 4.5.

Voor de volledigheid merken we op dat de horizontale en verticale verplaatsingen van deeltjes in de orbitaalbeweging, worden gevonden door integratie van de snelheden (4.16) en (4.17) naar de tijd. Voor de horizontale verplaatsing D_x geeft dit

$$D_x = \int a\omega \frac{\cosh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx)\mathrm{d}t = -a\frac{\cosh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) + I_x \tag{4.22}$$

waarin I_x een integratieconstante is die afhangt van het tijdstip ten opzichte waarvan D_x wordt gemeten. In dit verband is de verplaatsing immers het effect van de snelheid over een bepaald tijdsinterval. De tijd t in het meest rechter lid van (4.22) markeert het einde van dat interval. Het begin zit in de integratieconstante.

In het interval voor kh dat we in paragraaf 4.3 hebben getypeerd als *ondiep water* ($kh \leq 1/20$), is het relatieve verschil tussen die amplituden bij het stil water niveau en de bodem niet groter dan ongeveer 1/800. Voor wat we *ondiep water* noemen, is het in de praktijk daarom redelijk om van een constante amplitude uit te gaan.

Op overeenkomstige manier vinden we voor de verticale verplaatsing D_z dat

$$D_z = a\frac{\sinh(k(h+z))}{\sinh(kh)}\sin(\omega t - kx) + I_z \tag{4.23}$$

De verplaatsingen D_x en D_z zijn vermoedelijk minder interessant dan de amplitudes van die verplaatsingen, $\hat{D}_x$ en $\hat{D}_z$, gegeven door

$$\hat{D}_x = a\frac{\cosh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \quad ; \quad \hat{D}_z = a\frac{\sinh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \tag{4.24}$$

Achtereenvolgens geven deze amplitudes de maximale horizontale en verticale verplaatsing van een deeltje in de orbitaalbeweging.

Met de uitgangspunten van de lineaire golftheorie zijn niet-lineaire effecten in de impulsbalans, zoals advectie, steeds klein ten opzichte van de lineaire effecten. Door die niet-lineaire effecten te verwaarlozen, is de harmonische golf gevonden waarvoor we in deze paragraaf de bijbehorende orbitaalbeweging hebben bekeken. Voor *diep water* hebben we gezien dat waterdeeltjes een cirkelvormige baan doorlopen waarvan de straal exponentieel afneemt met de afstand onder het stil water niveau. Bij *ondiep water* is dat een elliptische baan die naar de bodem toe steeds platter wordt, terwijl de lengte van de horizontale as vrijwel gelijk blijft (namelijk $a/(kh)$, zie (4.22) in combinatie met dezelfde benaderingen die in (4.21) zijn gebruikt voor de snelheidscomponenten). In het overgangsgebied, waar $1/20 < kh = 2\pi h/L < 1/2$, nadert de baan van een waterdeeltje met toenemende $kh \propto h/L$ steeds meer tot een cirkel en neemt de amplitude van de horizontale snelheidscomponent in steeds sterkere mate af met de afstand onder het stil water niveau. In dat overgangsgebied doet zich, afhankelijk van kh een geleidelijke overgang voor tussen *ondiep* en *diep*, niet alleen voor wat betreft de golflengte en de fasesnelheid (zie paragraaf 4.3), maar ook met betrekking tot de orbitaalbeweging.

Een consequentie van de linearisering die ten grondslag ligt aan de lineaire golftheorie, is dat waterdeeltjes volgens deze theorie bij de passage van golven geen netto verplaatsing ondergaan. In werkelijkheid is dat echter wel zo. De orbitaalbeweging is geen perfect gesloten cirkel of ellips. Bij elke keer dat een waterdeeltje een volledige cyclus in de orbitaalbeweging heeft doorlopen, is dat deeltje een beetje opgeschoven in de richting waarin de golf zich voortplant. Dit verschijnsel wordt *Stokes' drift* genoemd, naar de Ierse wis– en natuurkundige George Gabriel Stokes (1819-1903) die daarover halverwege de 19$^{\text{e}}$ eeuw heeft gepubliceerd.

4.5 Golfvoortplanting

4.5.1 Golfenergie

Stel dat ergens in een uitgestrekte watermassa met een vrij oppervlak een kortdurende, plaatselijke verstoring optreedt waardoor een op zichzelf staande reeks

van enkele golven wordt opgewekt. Die reeks plant zich vanaf de plaats van de verstoring voort door de watermassa. We nemen aan dat buiten deze golfbeweging de watermassa in rust is en volgen een waterdeeltje dat zich op het moment van de verstoring op enige afstand van de locatie daarvan bevindt.

Dat deeltje is dus in rust als de verstoring zich voordoet. Enige tijd later passeert de reeks golven de plaats van dat deeltje. Daardoor wordt dat deeltje in beweging gezet en wordt het ook verplaatst. Dat is de orbitaalbeweging die in de vorige paragraaf is omschreven. Nog enige tijd later is de reeks golven voorbij en is het deeltje weer in rust en terug op de oorspronkelijke positie (althans volgens de lineaire golftheorie, dus exclusief *Stoke's drift*).

Omdat het waterdeeltje tijdens de passage van de reeks golven onderdeel is van de orbitaalbeweging, zijn zowel de kinetische als de potentiële energie ervan veranderd ten opzichte van wat die waren voordat de reeks golven zich aandiende. En zodra de golven gepasseerd zijn en het deeltje weer in rust is, zijn beide vormen van energie terug op hun oorspronkelijke niveau.

Die verandering van kinetische en potentiële energie, gesommeerd over alle deeltjes die in de golfbeweging zijn berokken, is de energie die in de golven besloten ligt. Die energie wordt doorgegeven in de richting waarin de golven zich voortplanten. Voor een berekening van deze hoeveelheid energie en het transport daarvan, gaan we uit van de lineaire golftheorie en met name de daaruit volgende beschrijving van de orbitaalbeweging (zie uitdrukkingen (4.16) en (4.17)).

Hoeveelheid energie

Omdat de golfbeweging tijdsafhankelijk is, zijn de bijbehorende potentiële en kinetische energie dat ook. Dat verloop met de tijd is voor de meeste praktische toepassingen minder interessant dan de energie gemiddeld over de golfperiode. Voor de potentiële energie wordt dat gemiddelde (genoteerd als E_{pot}) gegeven door

$$E_{\text{pot}} = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \int_{-h}^{\eta(t)} \rho g z \mathrm{d}z\mathrm{d}t - \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \int_{-h}^{0} \rho g z \mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{4.25}$$

Het product $\rho g z$ in deze uitdrukking verwijst naar de potentiële energie op niveau z ten opzichte van die op $z = 0$. Voorts is $(2\pi/\omega) \int_{-\omega/\pi}^{\omega/\pi} \cdot \mathrm{d}t$ de middeling over de golfperiode. Hiermee geeft de linker term in het rechter lid van bovenstaande uitdrukking de over de golfperiode gemiddelde, en over de waterkolom geïntegreerde potentiële energie in aanwezigheid van golven. De rechter term in dat rechter lid verbeeldt de potentiële energie, op dezelfde manier gemiddeld en geïntegreerd, van de watermassa in rust (dus in afwezigheid van golven). Het verschil van die beide termen is de potentiële energie die kan worden toegeschreven aan de golfbeweging.

Met inbegrip van de golfbeweging heeft integratie van de potentiële energie $\rho g z$ over de waterkom $\eta(t)$ als bovengrens (de linker term in het rechter lid van (4.25)). Deze $\eta(t)$ is de variatie van het wateroppervlak met de tijd voor een vaste lokatie

x. Omdat we uitgaan van een harmonische golf, een vlakke, horizontale bodem en middelen over de golfperiode, geldt (4.25) voor elke lokatie x.

Uitwerken van (4.25) geeft

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{4}\rho g a^2 = \frac{1}{16}\rho g H^2 \tag{4.26}$$

Voor de kinetische energie E_{kin} kijken we naar het kwadraat van de snelheid van waterdeeltjes in de orbitaalbeweging (E_{kin} is evenredig met dat kwadraat), integreren dat over de waterkolom en middelen het resultaat over de golfperiode:

$$E_{\text{kin}} = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\int_{-h}^{\eta(t)} \frac{1}{2}\rho\left(u_x^2 + u_z^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{4.27}$$

Net als bij de potentiële energie moeten we ook voor de kinetische energie alleen het aandeel van de golfbeweging in rekening brengen en dus de kinetische energie in rust in mindering brengen. Die laatste is echter gelijk aan nul en daarmee is (4.27) de kinetische energie die hoort bij de golfbeweging.

Uitwerken hiervan geeft (ook)

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{4}\rho g a^2 = \frac{1}{16}\rho g H^2 \tag{4.28}$$

waarmee de totale golfenergie uitkomt op

$$E_{\text{golf}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\rho g a^2 = \frac{1}{8}\rho g H^2 \tag{4.29}$$

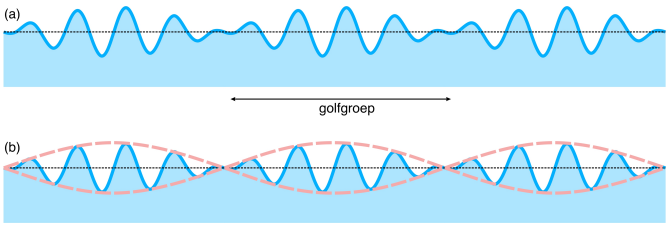
De dimensie van deze E_{golf} is die van $\rho g H^2$. In SI eenheden is dat [kg/m^3]×[N/kg]×[m^2], wat overeenkomt met [Nm/m^2]=[J/m^2] (waarin J staat voor Joule). Het gaat zodoende om de energie per eenheid van horizontaal oppervlak.

Transport van energie

Als golven zich voortplanten, wordt de golfenergie E_{golf} getransporteerd in de richting waarin de golven zich bewegen. De snelheid waarmee dat gebeurt, is afhankelijk van de fasesnelheid van de golven, maar is daar niet altijd aan gelijk. Een natuurlijk golfveld bestaat uit golven met verschillende golflengte en –periode en die dragen allemaal bij aan het totale transport van energie. De interactie van die golven is bepalend voor de snelheid van het transport van golfenergie. We lichten dat toe aan de hand van een geschematiseerd golfveld waarin twee golven voorkomen met dezelfde amplitude en net verschillende periode. Beide golven planten zich in dezelfde richting voort (de x-richting).

Voor dit geschematiseerde golfveld kunnen we de uitwijking η van het wateroppervlak schrijven als

$$\eta(x,t) = a\sin(\omega_1 t - k_1 x) + a\sin(\omega_2 t - k_2 x) \tag{4.30}$$



Figuur 4.6: Voorbeeld van golfgroepen die ontstaan bij de interferentie van twee harmonische golven met enigszins verschillende golflengte of –periode (figuur a). De onderste figuur (b) toont dezelfde groepen inclusief de omhullende (rode streeplijn).

Vanwege het verschil in periode en lengte, zullen er plaatsen in het golfveld zijn waar de beide golven elkaar versterken of dempen. Dat is afhankelijk van het faseverschil $(\omega_1 t - k_1 x) - (\omega_2 t - k_2 x)$. Versterking doet zich voor op plaatsen waar het faseverschil klein is. Waar de golven in tegenfase zijn (daar is het faseverschil maximaal), is de demping het sterkst.

Dit patroon van versterken en dempen vertoont regelmaat. Het herhaalt zich in plaats en tijd. Voor het geschematiseerde golfveld is dit geschetst in figuur 4.6(a).

Dat patroon dat zich herhaalt, wordt een golfgroep genoemd en is te zien als een amplitude–modulatie. In het voorbeeld van de twee interacterende golven (uitdrukking (4.30)) kan de uitwijking van het wateroppervlak ook geschreven worden als

$$\eta(x,t) = \eta(x,t) = a\,\eta_{\mathrm{mod}} \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x\right) \tag{4.31}$$

Hierin is η_{mod} de amplitude–modulatie, gegeven door

$$\eta_{\mathrm{mod}}(x,t) = 2\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{k_1-k_2}{2}x\right) \tag{4.32}$$

Dit is een lopende golf met frequentie $\omega_{\mathrm{mod}} = (\omega_1 - \omega_2)/2$ en golfgetal $k_{\mathrm{mod}} = (k_1 - k_2)/2$. De combinatie van η_{mod} en $-\eta_{\mathrm{mod}}$ (de verticaal gespiegelde van η_{mod}) omhult de golfgroepen, zoals geïllustreerd in figuur 4.6(b) met de rode streeplijnen.

Golfgroepen bewegen in dezelfde richting als de golven, maar met een eigen snelheid die afwijkt van die van de individuele golven in de groep. Als we een golfgroep in de tijd volgen, dan zien we dat de golven daarbinnen zich ieder met een eigen fasesnelheid voortplanten. Het is dus niet zo dat het wateroppervlak binnen een golfgroep vormvast is. Echter, de totale golfenergie binnen een groep is constant (wrijvingsverliezen buiten beschouwing gelaten). Dat wil zeggen dat de golfenergie E_{golf} wordt getransporteerd met de snelheid van de golfgroepen. Die wordt de groepsnelheid genoemd, genoteerd als c_g.

Voortbouwend op het voorbeeld van twee interacterende golven, is die snelheid c_g

gelijk aan de voortplantingssnelheid van de modulatie η_{mod}:

$$c_g = \frac{\omega_{\text{mod}}}{k_{\text{mod}}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \tag{4.33}$$

Met andere woorden, de groepsnelheid is gelijk aan het quotiënt van het verschil van de hoekfrequenties en het verschil van de golfgetallen. Als die verschillen klein zijn, nadert het quotiënt daarvan tot de afgeleide

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{4.34}$$

In de context van de lineaire golftheorie geldt dit verband in algemene zin. Bij een golfveld dat is opgebouwd uit veel meer dan twee harmonische golven, wordt de groepsnelheid berekend door bovenstaande uitdrukking te evalueren voor karakteristieke waarden van de hoekfrequentie en het golfgetal. In paragraaf 4.6 komen die karakteristieke waarden aan bod.

Met de dispersie relatie (4.6) kunnen we (4.34) schrijven als

$$c_g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\sqrt{gk\tanh(kh)} \tag{4.35}$$

Uitwerking van de afgeleide in het rechter lid van deze uitdrukking wordt aan de lezer overgelaten (dat is bewerkelijk, maar niet ingewikkeld). Het resultaat luidt

$$c_g = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right)\frac{\omega}{k} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right)c \tag{4.36}$$

In de literatuur wordt dit doorgaans afgekort tot $c_g = nc$, met

$$n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right) \tag{4.37}$$

Met dit resultaat vinden we voor het transport F_{golf} van golfenergie, ook wel de energieflux genoemd (vandaar het symbool F),

$$F_{\text{golf}} = c_g E_{\text{golf}} = ncE_{\text{golf}} \tag{4.38}$$

Deze flux heeft de dimensie van vermogen per eenheid van lengte. In de voorgaande paragraaf hebben we gevonden dat, in SI eenheden, de golfenergie de dimensie heeft van [J/m^2]. Vermenigvuldigd met de dimensie van snelheid [m/s] is dat [J/s/m]=[W/m] (waarin de W staat voor Watt). Dat betekent dat F_{golf} staat voor een vermogen (energie per eenheid van tijd) dat per eenheid van lengte wordt doorgegeven.

Die eenheid van lengte wordt gemeten in het horizontale vlak en dwars op de richting van voortplanting. In de beschouwingen over de orbitaalbeweging, de

golfenergie en de flux, hebben we steeds gekeken naar een verticale doorsnede van de watermassa waarin golven zich voortplanten (zie de figuren 4.4, 4.5 en 4.6, bijvoorbeeld). De richting waarin de golven zich voortplanten, ligt daarbij steeds in die doorsnede. Impliciet hebben we gesteld dat parallelle doorsneden hetzelfde beeld opleveren, ofte wel dat het golfbeeld loodrecht op het vlak van tekening in die figuren niet verandert. Dat geldt dan ook voor het transport van energie (dat ligt steeds in het vlak van tekening). De eenheid van lengte waar F_{golf} betrekking op heeft, staat dus loodrecht op de richting van golfvoortplanting.

Dat er loodrecht op het vlak van tekening in de figuren 4.4, 4.5 en 4.6 niets verandert, is consistent met het uitgangspunt van de lineaire golftheorie dat de bodem vlak en horizontaal is. In natuurlijke omstandigheden komt dat niet vaak voor.

Echter, in veel praktisch relevante omstandigheden is de lengteschaal van ruimtelijke variaties in bodemniveau klein ten opzichte van de golflengte. De lineaire golftheorie is ook in zulke omstandigheden toepasbaar. In de volgende paragraaf gebruiken we dit om na te gaan hoe voortplanting van golven wordt beïnvloed door veranderingen in waterdiepte, zoals bij golven die invallen op een kust. In de volgende paragraaf gaan we in op de implicaties hiervan voor de voortplanting van golven.

4.5.2 *Shoaling* en refractie

Als de golflengte groter is dan circa twee maal de waterdiepte (dus ingeval van overgangsgebied of *ondiep water*, zie paragraaf 4.3), is de fasesnelheid afhankelijk van de waterdiepte en dat geldt dan ook voor de groepsnelheid. Deze afhankelijk maakt dat als golven zich voortplanten in een gebied waarin de bodem niet vlak en horizontaal is, die snelheden zullen veranderen. De invloed daarvan op de voortplanting van golven brengen we in beeld vanuit de veronderstelling dat verlies van energie door wrijving van ondergeschikt belang is. Zodoende kunnen we uitgaan van een constante energieflux F_{golf}. Bovendien nemen we aan dat de lengteschaal van ruimtelijke variaties in bodemniveau zo groot zijn ten opzichte van de golflengte dat we de lineaire golftheorie in alle redelijkheid kunnen toepassen[28].

Met (4.29), (4.36) en (4.38) leidt de aanname van een constante energieflux tot

$$F_{\text{golf}} = c_g E_{\text{golf}} = ncE_{\text{golf}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right)\frac{\omega}{k}\frac{1}{8}\rho g H^2 = \text{constant} \qquad (4.39)$$

[28] In veel waterbouwkundig relevante omstandigheden wordt die redelijkheid beantwoord. Als voorbeeld noemen we de zuidelijke Noordzee. Net zoals elders in de wereld, planten de golven die in deze zee door wind worden gegenereerd, zich primair voort in de richting waarin de wind waait. Voor veel voorkomende windrichtingen stevenen de golven af op een kust. Dat kan de Engelse of Schotse zijn, maar bijvoorbeeld ook de Belgische, Nederlandse of Deense kust. In al die gevallen ondervinden de golven bij hun nadering van een kust een steeds geringere waterdiepte. Echter, vlak bij de kust waar de bodemhelling toeneemt en de waterdiepte afneemt, levert de lineaire golftheorie een steeds minder goede benadering van de werkelijke golfbeweging. Voor een gedetailleerde beschrijving van die beweging kan dan beter gebruik worden gemaakt van bijvoorbeeld de Cnoïdale golftheorie, gebaseerd op de Korteweg–de Vries vergelijking. Voor meer informatie hieromtrent wordt verwezen naar de literatuur.

Zonder daar bewijs voor aan te voeren, stellen we dat ruimtelijke variabiliteit in bodemniveau geen invloed heeft op de golfperiode, mits golven niet breken. Dat wil zeggen dat de golfperiode T (of de hoekfrequentie ω) gelijk blijft als de waterdiepte verandert in de richting waarin golven zich voortplanten.

Dit betekent dat voor een voorgeschreven golfperiode, met uitdrukking (4.39) een verband is gelegd tussen de waterdiepte h, de golflengte $L = 2\pi/k$ en de golfhoogte H.

We passen dit verband toe om te kijken hoe de golfhoogte en ook de golflengte veranderen als golven zich voortplanten in een richting waarin de waterdiepte varieert. Daarbij gaan we uit van golven die invallen op een vlakke, hellende bodem (dus met rechte, evenwijdige dieptelijnen). In eerste instantie kijken we naar golven die loodrecht op die dieptelijnen invallen. In zo'n situatie heeft variatie van de diepte alleen invloed op de golfhoogte en –lengte. Dat effect wordt *shoaling* genoemd. Daarna breiden we uit naar golven die niet loodrecht op de dieptelijnen invallen. Dan is er ook een effect op de richting waarin golven zich voortplanten en dat heet refractie.

Shoaling

We kunnen (4.39) verder uitwerken door gebruik te maken van de dispersie relatie (4.6). Voor een voorgeschreven golfperiode is deze relatie te zien als een verband tussen de waterdiepte h en de golflengte (die in (4.6) zit in het golfgetal $k = 2\pi/L$).

Bij elkaar genomen hebben we te maken met twee vergelijkingen

$$\begin{aligned} c_g \frac{1}{8}\rho g H^2 &= \text{constant} \quad ; \quad c_g = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right)\frac{\omega}{k} \\ \omega^2 &= gk\tanh(kh) \end{aligned} \tag{4.40}$$

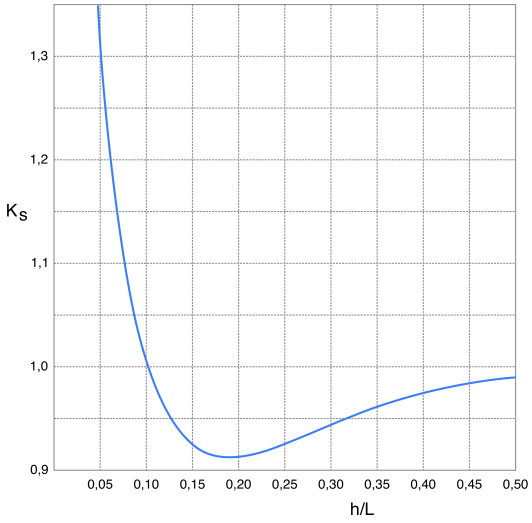
met, althans voor een voorgeschreven golfperiode ($T = 2\pi/\omega$), drie variabelen, te weten de golfhoogte H, het golfgetal $k = 2\pi/L$ en de waterdiepte h.

Dit laat zien dat als de waterdiepte in de richting waarin golven zich voortplanten varieert, de golfhoogte en –lengte zich conform aanpassen (althans bij gelijkblijvende periode). Immers, als de waterdiepte op een bekende manier varieert in de voortplantingsrichting van de golven, is (4.40) een set van drie vergelijkingen met drie onbekenden c_g, $k = 2\pi/L$ en H.

Dit kennelijke effect van een variërende waterdiepte op golfparameters wordt *shoaling* genoemd (Engels voor verondieping).

Als de variatie in waterdiepte bekend is, valt het effect op golfhoogte en –richting met bovenstaande set (4.40) te berekenen[29]. Voor wat betreft het effect op de

[29]Bedenk dat uit die set het golfgetal k (en daarmee de golflengte $L = 2\pi/k$) in principe geëlimineerd kan worden. In dit verband is de toevoeging "in principe" best van belang. De set van vergelijkingen in (4.40) is tamelijk niet-lineair in k. Die grootheid kan niet langs analytische



Figuur 4.7: Relatie tussen de *shoaling* coëfficiënt K_s en de relatieve waterdiepte h/L.

golfhoogte, is het gebruikelijk om de constante in (4.40) te relateren aan *diep water* waar de golfhoogte H_0 is en de groepsnelheid $c_{g,0}$ (waarbij het subscript 0 verwijst naar *diep water*). Met (4.39) en de veronderstelling dat ρg niet afhankelijk is van de waterdiepte, levert dat

$$c_g H^2 = c_{g,0} H_0^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{c_{g,0}}{c_g}} \tag{4.41}$$

De verhouding H/H_0 wordt de *shoaling* coëfficiënt genoemd, vaak genoteerd als K_s:

$$K_s = \sqrt{\frac{c_{g,0}}{c_g}} \tag{4.42}$$

Het verloop van K_s met de verhouding h/L tussen waterdiepte en golflengte is geschetst in figuur 4.7. Als golven vanuit *diep water* (helemaal rechts in de figuur) in steeds ondieper water terechtkomen (van rechts naar links in de figuur), neemt de golfhoogte eerst af en daarna toe. Dit proces gaat door totdat de golven breken. In paragraaf 4.7 over breking komen we daarop terug.

Refractie

Als golven zich over een variabele bodem voortplanten, verandert niet alleen de golfhoogte maar ook de golflengte en de fasesnelheid. Deze laatste is gelijk aan $c = L/T$ en met de aanname dat de periode T gelijk blijft, verandert de fasesnelheid in gelijke mate als de golflengte. Die verandering van de fasesnelheid is van invloed op de golfrichting. We laten dat zien aan de hand van een vrij theoretisch voorbeeld waarin golven scheef invallen op een sprong in de bodem.

weg worden geëlimineerd. Bij de berekening van het effect van variërende diepte op de golfhoogte zal dus ook altijd het effect op de golflengte moeten worden bepaald.

Daarvoor is het nodig dat we onze voorstelling van golven, die in het voorgaande beperkt was tot een verticale doorsnede (2–dimensionaal) van de watermassa waarin golven zich voordoen, uitbreiden naar drie dimensies. Voor een vlakke, horizontale bodem, kunnen we zo'n ruimtelijk beeld in gedachten creëren door de verticale doorsnede die in figuur 4.1 is geschetst, loodrecht op het vlak van tekening identiek te herhalen. De golftop, die in een enkele verticale doorsnede een punt is, wordt in de expansie naar drie dimensies een lijn, de zogeheten golfkam.

In een bovenaanzicht van een golfveld dat zich voortplant over een vlakke, horizontale bodem, leveren die golfkammen een patroon van rechte, evenwijdige lijnen op, waarbij de onderlinge afstand gelijk is aan de golflengte. Dat patroon verplaatst zich met de fasesnelheid in de golfrichting. Omdat die fasesnelheid afhankelijk is van de waterdiepte (althans in *ondiep water* en overgangsgebied), wordt dat patroon van rechte, evenwijdige lijnen verstoord ingeval van een variabele bodem. Het theoretische voorbeeld van golven die scheef invallen op een sprong in de bodem gebruiken we om het effect van die verstoring op de voortplantingsrichting en de golfhoogte in beeld te brengen.

In figuur 4.8 is het patroon van golfkammen geschetst dat past bij golven die scheef invallen op een sprong in de bodem. Het is een momentopname. De bovenste afbeelding in deze figuur is een bovenaanzicht van dat patroon. De locatie van de sprong is aangegeven met de (gestippelde) dieptelijn. Links van de sprong is de waterdiepte groter dan rechts daarvan. In het relatief diepe deel (links) is de golflengte ($L = cT$) groter dan in het relatief ondiepe deel (rechts). In de figuur is dat terug te vinden in de onderlinge afstand van de golfkammen. Die is links groter dan rechts.

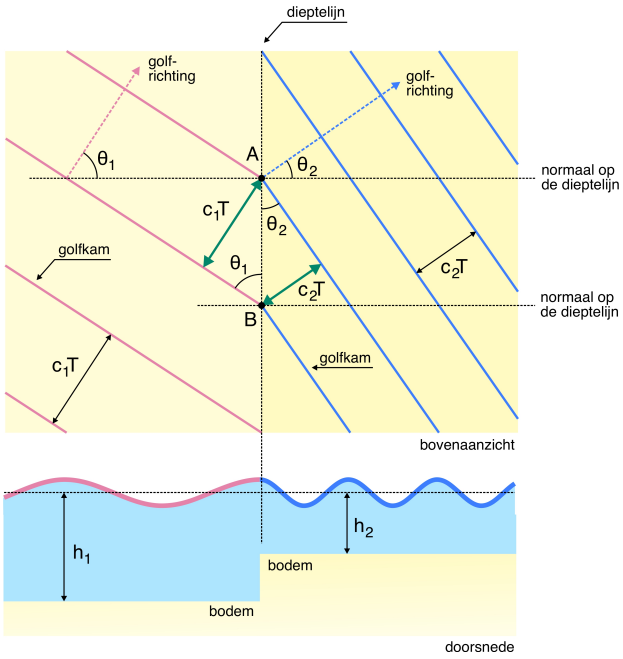
De golven planten zich loodrecht op de golfkammen voort. Bij de passage van de sprong in de bodem blijft een golfkam een golfkam. Die wordt niet onderbroken. Maar de onderlinge afstand van de golfkammen (de golflengte) wordt wel anders. Dat is alleen mogelijk als ook de golfrichting verandert. Dit verschijnsel wordt refractie genoemd. De mate waarin de golfrichting verandert is direct gerelateerd aan de verandering van de waterdiepte. We laten dat zien aan de hand van figuur 4.8.

We meten de golfrichting ten opzichte van de normaal[30] op de dieptelijn en noteren die met θ. Als index 1 naar het relatief diepe deel verwijst en index 2 naar het relatief ondiepe deel, dan is θ_1 de golfrichting links van de sprong en θ_2 de richting rechts daarvan. De hoek θ_1 is dan ook de hoek tussen de golfkammen in het relatief diepe deel en de dieptelijn. Overeenkomstig is θ_2 ook de hoek tussen de golfkammen in het relatief ondiepe deel en de dieptelijn.

We maken hiervan gebruik om de afstand tussen de punten A en B in figuur 4.8 (dat is de afstand tussen opeenvolgende golfkammen, gemeten langs de dieptelijn) uit te drukken in golflengte en –richting aan weerszijden van de sprong.

Aan de diepe zijde van de sprong is de golflengte $L_1 = c_1 T$. Dat is de loodrechte

[30] De 'normaal' staat ergens loodrecht op.



Figuur 4.8: Schematische weergave van het patroon van golfkammen voor golven die scheef invallen op een sprong in de bodem. De onderste afbeelding is een verticale doorsnede dwars op de sprong. De bovenste afbeelding is een bovenaanzicht waarin de rode lijnen de golfkammen voorstellen aan de diepe kant (links) van de sprong. De golfkammen aan de ondiepe kant (rechts) van de sprong zijn met blauwe lijnen aangegeven.

afstand tussen twee opeenvolgende golfkammen. Met d_{AB} de afstand tussen de punten A en B geldt dat $L_1 = c_1 T = d_{AB} \sin\theta_1$. Op dezelfde manier, maar dan gezien vanaf de ondiepe zijde van de sprong, is $L_2 = c_2 T = d_{AB} \sin\theta_2$. Eliminatie van d_{AB} en T geeft

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2} \tag{4.43}$$

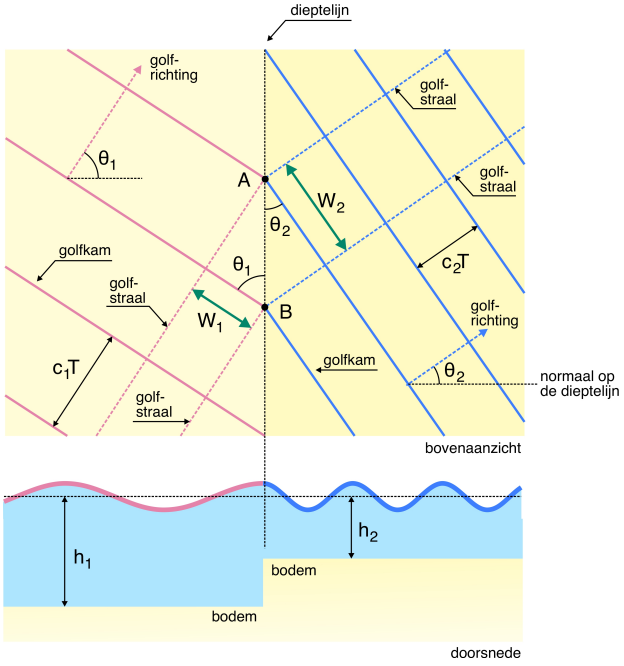
of, in meer algemene vorm,

$$\frac{\sin\theta}{c} = \text{constant} \tag{4.44}$$

Dit staat bekend als de wet van Snellius, genoemd naar de wis– en sterrenkundige Willebrord Snel van Royen (1580-1626) die deze wet heeft afgeleid bij zijn onderzoek naar de breking van licht.

Refractie gaat ook gepaard met een verandering van de golfhoogte. Voor een deel heeft dat te maken met *shoaling*, maar ook de verandering van richting speelt een rol. Om dat in te zien, kijken we nogmaals naar de energieflux F_{golf}. Dat is de energie die per eenheid van tijd en per eenheid van lengte wordt doorgegeven in de richting waarin golven zich voortplanten. Die eenheid van lengte wordt dwars op die richting gemeten, dus langs de golfkam (zie paragraaf 4.5.1).

Als we, net als bij *shoaling*, aannemen dat energieverliezen verwaarloosbaar zijn, betekent dit dat het totale vermogen dat wordt doorgegeven tussen twee golfstralen (dat zijn lijnen in het horizontale vlak waarlangs golven zich voortplanten) niet verandert in de golfrichting. Dat geldt ook als golven refracteren. Echter, als



Figuur 4.9: Schematische weergave van het patroon van golfkammen en –stralen voor golven die scheef invallen op een sprong in de bodem. De onderste afbeelding is een verticale doorsnede dwars op de sprong. De bovenste afbeelding is een bovenaanzicht waarin de getrokken lijnen de golfkammen voorstellen en met streeplijnen zijn twee golfstralen aangegeven (rood aan de diepe kant van de sprong en blauw aan de ondiepe kant).

de golven van richting veranderen, wijzigt de afstand tussen golfstralen. Dat is van invloed op de hoeveelheid energie die per eenheid van lengte van de golfkam wordt doorgegeven. Met andere woorden, de energieflux verandert en daarmee de golfhoogte.

Om te illustreren wat er met de afstand tussen golfstralen (en daarmee de energieflux) gebeurt bij een verandering van de waterdiepte, kijken we nogmaals naar het theoretische voorbeeld van een sprong in de bodem. In figuur 4.9 is dat voorbeeld herhaald en zijn in het bovenaanzicht twee golfstralen getekend. In de figuur is gekozen voor golfstralen die aansluiten bij de gegeven illustratie van de wet van Snellius, maar het principe geldt voor een willekeurige set van golfstralen.

Ter hoogte van de sprong in de bodem vertonen die golfstralen een knik omdat daar de golven van richting veranderen. In het relatief diepe deel is W_1 de afstand tussen de twee golfstalen en in het relatief ondiepe deel is dat W_2. Omdat de totale energie die tussen de beide golfstralen wordt doorgegeven constant is, moet gelden dat $W_1 F_{\text{golf},1} = W_2 F_{\text{golf},2}$. Tegelijkertijd geldt voor de afstand d_{AB} tussen de punten A en B dat $d_{AB} = W_1/\cos\theta_1 = W_2/\cos\theta_2$. Eliminatie van d_{AB}, W_1 en W_2 uit deze drie gelijkheden levert

$$F_{\text{golf},2} = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} F_{\text{golf},1} \tag{4.45}$$

Met $F_{\text{golf}} = c_g E_{\text{golf}} = c_g \rho g H^2/8$ kunnen we dit schrijven als (na delen door

$\rho g/8$)

$$c_{g,2}H_2^2 = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}c_{g,1}H_1^2 \tag{4.46}$$

wat te herleiden is tot

$$\frac{H_2}{H_1} = \sqrt{\frac{c_{g,1}}{c_{g,2}}}\sqrt{\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}} \tag{4.47}$$

De eerste term in het rechter lid van bovenstaande uitdrukking geeft het effect van een veranderende waterdiepte op de golfhoogte. Daarbij gaat het uitsluitend om *shoaling*. Dat de verandering van golfrichting ook invloed op de golfhoogte heeft, is daar niet in begrepen. Dat effect wordt met de tweede term tot uitdrukking gebracht.

Als we dit resultaat toepassen op een vergelijking van *diep water* (index 0) en een willekeurige andere waterdiepte, dan is

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{c_{g,0}}{c_g}}\sqrt{\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}} = K_s K_r \tag{4.48}$$

waarin K_s de *shoaling* coëfficiënt is (zie (4.42)) en K_r de refractie coëfficiënt:

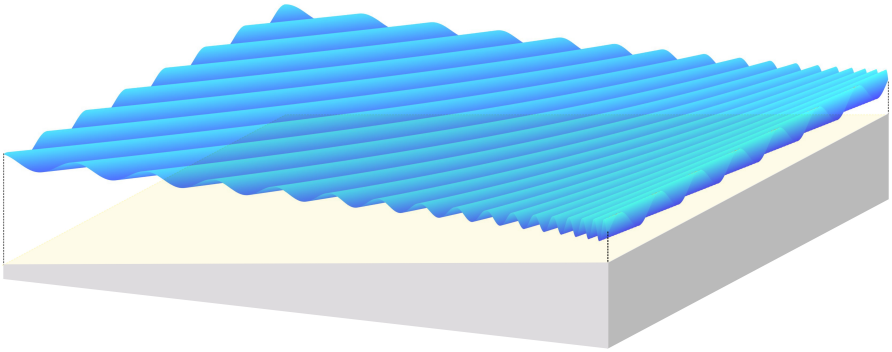
$$K_r = \sqrt{\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}} \tag{4.49}$$

De combinatie van *shoaling* en refractie laat zich bijvoorbeeld zien bij golven die invallen op een lange, rechte kust met een vlakke, hellende bodem (rechte, evenwijdige dieptelijnen). Dwars op die kust verandert de waterdiepte geleidelijk. Er zijn geen abrupte variaties in het bodemniveau zoals is het theoretische voorbeeld dat we in deze paragraaf hebben gebruikt om refractie te illustreren. Dat geeft een patroon van golven waarvan de richting, hoogte en lengte geleidelijk mee veranderen met de waterdiepte (figuur 4.10).

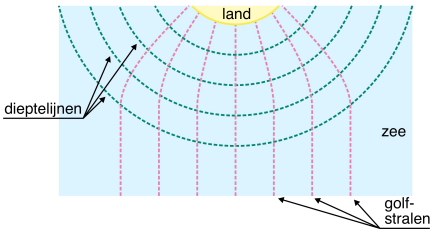
Naarmate de golven dichter bij de waterlijn komen, neemt hun hoogte zover toe en hun lengte zover af dat breking optreedt. In paragraaf 4.7 komen we daarop terug.

Tot slot van deze paragraaf merken we op dat de gegeven beschrijving van refractie gebaseerd is op een vlakke, hellende bodem met rechte, evenwijdige dieptelijnen. Dat geeft een goed beeld van het fysisch mechanisme, maar in de natuur zijn dieptelijnen lang niet altijd recht en evenwijdig. Ook voor andere bodemvormen zijn de genoemde principes toepasbaar, maar is de uitwerking meer complex. Ter illustratie noemen we twee voorbeelden. Een daarvan betreft een zogeheten bolle kust. Dat is een kust waarbij de dieptelijnen gekromd zijn, maar nog wel min of meer evenwijdig. Denk daarbij aan de kop van een eiland of een uitstulping zoals de Zandmotor of de Maasvlakte.

Bij zo'n bolle kust leidt refractie ertoe dat golfstralen convergeren. Dit is geschetst in figuur 4.11. Door de bolle, concentrische dieptelijnen werkt het betreffende stuk



Figuur 4.10: Schematische weergave van golven die zich in een kustgebied met een vlakke, hellende bodem voortplanten richting strand (van links naar rechts in de afbeelding). Door *shoaling* en refractie veranderen de golfhoogte, –lengte en –richting naarmate golven in steeds minder *diep water* komen. Deze afbeelding is het resultaat van een simulatie gebaseerd op (4.48), toegepast op golven die scheef invallen op een vlakke, hellende bodem. De waterdiepte (ten opzichte van stilwaterniveau) verloopt van 40 tot 5 meter. Aan de rand van het weergegeven gebied waar de waterdiepte 40m bedraagt (links in de figuur) vallen golven in onder een hoek van 30° met de normaal op de dieptelijnen. De golfperiode is 10 seconden. Het afgebeelde gebied heeft een lengte (gemeten langs de dieptelijnen) van 1000m en een breedte van 1200m.



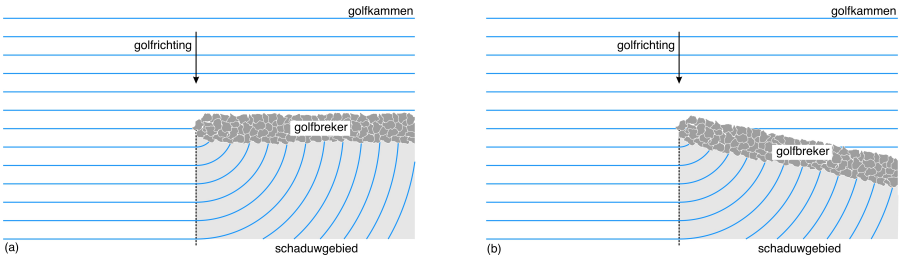
Figuur 4.11: Schematische weergave van de convergentie van golfstralen als golven invallen op een kust met gekromde dieptelijnen (waarvan de bolle kant zeewaarts is gericht).

kust als een lens op de invallende golven. Dat resulteert in convergentie van de golfstralen en daardoor neemt de golfhoogte van de invallende golven bij nadering van de waterlijn meer toe dan op grond van alleen *shoaling* verwacht mag worden. Het gevolg daarvan is dat op grotere afstand van de waterlijn al breken optreedt dan bij een strikt rechte kust (zie ook paragraaf 4.7 over golfbreking).

Bij een holle kust, daarentegen, treedt juist divergentie van golfstralen op. In dat geval leidt refractie tot een afname van de hoogte van golven die de waterlijn naderen. Shoaling leidt ook dan tot een toename, maar anders dan bij een bolle kust sorteert refractie bij een holle kust een tegengesteld effect op de golfhoogte.

4.5.3 Diffractie

Golven die invallen op een golfbreker (zie paragraaf 7.3), een landtong of een overeenkomstig obstakel, zullen zich daar in enige mate omheen voortplanten. Dit



Figuur 4.12: Patroon van golfkammen bij diffractie rond de tip van een golfbreker voor loodrecht (a) en scheef (b) invallende golven. Het geschetste patroon betreft regelmatige golven die zich voortplanten over een vlakke, horizontale bodem.

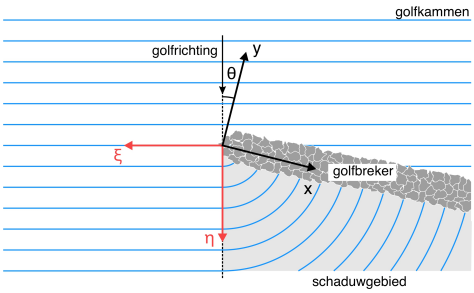
kan worden verklaard vanuit het principe van Huygens[31] dat zegt dat een punt dat in trilling wordt gebracht, zelf trillingen gaat uitzenden in alle richtingen. Golven die de tip van de golfbreker of de landtong passeren, zullen voorbij die tip punten in trilling brengen. Die punten zenden vervolgens zelf in alle richting trillingen uit waarvan een deel de lijzijde van de golfbreker kan bereiken. Invallende golven kunnen zich zodoende tot achter de golfbreker voortplanten. Dit verschijnsel wordt diffractie genoemd. Het principe daarvan brengen we in beeld voor regelmatige golven die zich voortplanten over een vlakke, horizontale bodem met ergens een obstakel in de vorm van een golfbreker.

In figuur 4.12 is het patroon van golfkammen geschetst voor diffractie rond een golfbreker bij loodrecht (figuur 4.12(a)) en scheef (figuur 4.12(b)) invallende golven. Alles wat zich, gezien in de golfrichting, achter de golfbreker bevindt, is het schaduwgebied genoemd. De golven die zich daar voordoen, zijn primair het resultaat van trillingen die door punten buiten dat gebied worden uitgezonden (en secundair door trillingen die vervolgens door punten in het gebied zelf worden uitgezonden). De golfkammen zijn daar cirkelvormig met de tip van de golfbreker als middelpunt.

Omdat de golfbreker het transport van energie in de golfrichting blokkeert, is de golfenergie in het schaduwgebied kleiner dan die zou zijn zonder de golfbreker. Als gevolg daarvan is de golfhoogte in het schaduwgebied lager dan die van de invallende golf.

De invloed van de golfbreker is niet beperkt tot het schaduwgebied. Zonder de golfbreker zou de invallende golf zich ongehinderd kunnen voortplanten en zou het patroon van rechte, evenwijdige golfkammen (zoals geschetst in figuur 4.12) zich hebben voortgezet. En ook dat patroon wordt verklaard door het principe van Huygens. Alle punten op een lijn evenwijdig aan de golfkammen worden gelijktijdig in trilling gebracht en zenden daardoor in fase trillingen uit in alle richtingen. Interferentie van al die uitgezonden trillingen resulteert in evenwijdige voortplanting van golven (althans bij een vlakke, horizontale bodem).

[31] Dit principe is genoemd naar de 17^{e} eeuwse wis– natuur– en sterrenkundige Christiaan Huygens (1629-1695) die daarover in 1690 publiceerde.



Figuur 4.13: Definitie van de assenstelsels xy en $\xi\eta$ die worden gebruikt voor de beschrijving van diffractie rond het uiteinden van een lijnvormig, half–oneindig obstakel (bijvoorbeeld de tip van een golfbreker). De oorsprong van beide stelsels valt samen met die tip. De oriëntatie van het xy–stelsel is zo gekozen dat het lijnvormig obstakel langs de positieve x–as ligt. Het $\xi\eta$–stelsel is gekoppeld aan de richting van golfvoortplanting, met de positieve η-as in die richting.

Dat wordt verstoord door de golfbreker. Ter plaatse van de golfbreker worden geen trillingen uitgezonden. Dat is van invloed op het golfpatroon in het gebied dat, gezien in golfrichting, voorbij de golfbreker ligt en is niet beperkt tot het schaduwgebied.

Voor de berekening van diffractie van golven rond een obstakel, kan gebruik worden gemaakt van de lineaire golftheorie. In veel praktisch interessante gevallen is er geen analytische oplossing voor de onderliggende vergelijkingen en bijbehorende randvoorwaarden. Numerieke methoden bieden dan uitkomst. Voor enkele specifieke, gesimplificeerde omstandigheden zijn wel analytische oplossingen beschikbaar. Een daarvan is de zogeheten Sommerfeld–oplossing voor regelmatige golven die zich voortplanten over een vlakke, horizontale bodem en invallen op een rechte, lijnvormige, half–oneindige golfbreker[32].

Deze oplossing geeft de verhouding H/H_u, waarin H de lokale golfhoogte is in een gebied rond de tip van een golfbreker en H_u de golfhoogte in de ongestoorde situatie (u van *undisturbed*). Deze verhouding wordt vaak de diffractie–coëfficiënt $K_D = H/H_u$ genoemd. Bij deze coëfficiënt is de ongestoorde golfhoogte H_u de referentie, terwijl dat bij de coëfficiënten K_s en K_r voor *shoaling* en refractie in de literatuur doorgaans de golfhoogte op *diep water* is (H_0).

Die verhouding H/H_u is plaatsafhankelijk. We beschrijven die ten opzichte van een xy-assenstelsel waarvan de oorsprong samenvalt met de tip van de golfbreker. De positieve x–as ligt langs de as van de golfbreker (zie figuur 4.13).

De Sommerfeld oplossing voor het geval dat de energie van de golven die op de golfbreker invallen volledig wordt gedissipeerd (dus als golven niet op de golfbreker reflecteren), luidt

$$\frac{H}{H_u} = |\Gamma(x,y)| \quad ; \quad \Gamma(x,y) = e^{ik\eta}\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + C_F(w) - i\left(\frac{1}{2} + S_F(w)\right)\right) \tag{4.50}$$

waarin $i^2 = -1$ (i is de imaginaire eenheid), k het golfgetal en $C_F(w)$ en $S_F(w)$

[32]Dat is een theoretisch object. Waar het om gaat is dat bij de afleiding van de analytische oplossing is aangenomen dat de golfbreker alleen een lengte heeft en geen breedte. Bovendien is die oplossing bedoeld om het diffractiepatroon rond de één uiteinde van de golfbreker in beeld te brengen en is aangenomen dat het andere uiteinde zo ver weg ligt dat de invloed daarvan verwaarloosd kan worden.

zijn Fresnel–integralen[33], gegeven door

$$C_F(w) = \int_0^w \cos(\pi s^2/2)\mathrm{d}s \quad ; \quad S_F(w) = \int_0^w \sin(\pi s^2/2)\mathrm{d}s \tag{4.51}$$

en

$$w = w(x,y) = \begin{cases} -2\sqrt{k\frac{r-\eta}{2\pi}} & ; \quad \xi, y \leq 0 \quad \text{(schaduwgebied)} \\ 2\sqrt{k\frac{r-\eta}{2\pi}} & ; \quad \xi, y \not\leq 0 \end{cases} \tag{4.52}$$

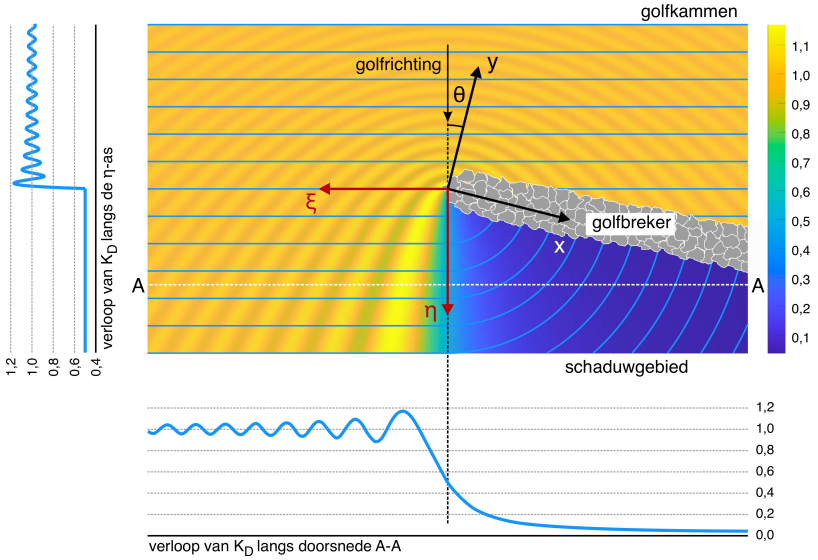
waarbij ξ en η verwijzen naar een tweede assenstelsel $\xi\eta$ dat is gerelateerd aan de voortplanting van de invallende golven. Net als het xy-stelsel valt de oorsprong van het $\xi\eta$-stelsel samen met de tip van de golfbreker. De positieve η-as wijst in de richting waarin de invallende golven zich voortplanten en de ξ-as staat daar loodrecht op (zie figuur 4.12).

Voorts is $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$ de afstand tussen de tip van de golfbreker en het punt (x,y) (of (ξ,η)) waarvoor de verhouding H/H_u wordt berekend. Als dat punt in het schaduwgebied ligt ($\xi, y \leq 0$) is w negatief en anders positief.

Voor de afleiding van deze analytische oplossing wordt verwezen naar de literatuur.

Toepassing op de situatie die is geschetst in figuur 4.12(b) (regelmatige golven die scheef invallen op een golfbreker) levert het beeld van de ruimtelijke variatie van de verhouding H/H_u dat met een kleurschakering is verbeeld in figuur 4.14. Deze toepassing laat zien dat de invloed van de golfbreker op de golfhoogte niet beperkt is tot het schaduwgebied. Buiten het schaduwgebied neemt die invloed af met toenemende afstand tot de tip van de golfbreker. Op de rand van het schaduwgebied, langs de positieve η–as, is $H/H_u = 1/2$. In het voorgaande hebben we

[33]Het wetenschappelijk onderzoek van de Franse natuurkundige Augustin Fresnel (1788-1827) heeft raakvlakken met dat van Huygens, ook al zit er ruim een eeuw tussen. Het principe van Huygens wordt ook wel het principe van Huygens-Fresnel genoemd. De door Fresnel genoemde integralen $C_F(w)$ en $S_F(w)$ hebben te maken met zijn onderzoek op het gebied van optica, maar zijn breder toepasbaar. Dat ze opduiken in de beschrijving van diffractie van golven rond een golfbreker, is tegen die achtergrond misschien niet heel verrassend. Maar er is meer. Als C_F en S_F in een grafiek tegen elkaar worden uitgezet, levert dat een spiraal die in de wiskunde bekend staat als een clothoïde. In het pre–computer tijdperk werd zo'n grafiek gebruikt om met de hand H/H_u te kunnen berekenen zonder de integralen zelf te hoeven uitwerken. Die uitwerking lag besloten in de grafiek, in die context bekend als de spiraal van Cornu (naar de Franse wetenschapper Alfred Cornu (1841-1902) die het gebruik van de spiraal voor het berekenen van diffractie introduceerde). Een bijzondere eigenschap van de spiraal is dat als deze met een constante snelheid wordt doorlopen, de kromtestraal lineair varieert met de tijd. In de civiele techniek wordt daarvan onder meer gebruik gemaakt bij het ontwerp van het alignement van wegen en spoorwegen voor de overgang van een recht deel naar een bocht en omgekeerd. Als die overgang de vorm heeft van de spiraal, ervaren voertuigen een geleidelijke toename van de centripetale versnelling die nodig is om het alignement te volgen. Bij een directe aansluiting van een cirkelboog op een recht deel, zou dat een abrupte overgang zijn. Tegen dezelfde achtergrond hebben loopings bij achtbanen ook de vorm van een clothoïde. Vanuit wiskundig perspectief is zo'n abrupte overgang op de plaats waar het rechte deel en de cirkel op elkaar aansluiten wel continu maar niet differentieerbaar. Als voor de overgang van het rechte deel naar de cirkel een deel van een clothoïde wordt toegepast zodat bij het achtereenvolgens doorlopen van deze drie delen zich geen discontinuïteiten voordoen in het verloop van de kromtestraal, is het totaal overal differentieerbaar.

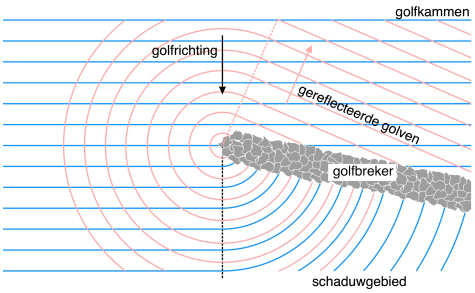


Figuur 4.14: De kleurschakering in het bovenaanzicht van het uiteinde van een (in theorie half–oneindige, lijnvormige) golfbreker toont de ruimtelijke variatie van de verhouding $H/H_u = K_D$ volgens de oplossing van Sommerfeld. Aan de bovenkant van het bovenaanzicht vallen regelmatige golven in, net zoals bij de figuren 4.12(b) en 4.13. Bij de berekening van K_D is aangenomen dat de energie van de golven die op de golfbreker invallen, volledig wordt gedissipeerd. Het verloop van K_D langs de η–as en de lijn A–A is ter illustratie achtereenvolgens gegeven in de grafieken links en onder het bovenaanzicht.

aangenomen dat de energie van de golven die op de golfbreker invallen, volledig wordt gedissipeerd. In veel praktisch relevante situaties treedt wel enige reflectie van golven op en is die aanname een benadering van de werkelijkheid. Voor een evaluatie van het golfbeeld in het schaduwgebied is die benadering meestal toereikend.

De oorspronkelijke Sommerfeld oplossing houdt wel rekening met de invloed van golven die door de golfbreker worden gereflecteerd. Die oplossing is de superpositie van twee diffractie patronen. Een daarvan hoort bij de invallende golf (zoals weergegeven in figuur 4.14 en de andere heeft betrekking op de gereflecteerde golf, uitgaande van volledige reflectie (dus dat de gereflecteerde golf dezelfde hoogte heeft als de invallende). Een impressie van het patroon van golfkammen dat bij de gereflecteerde golven hoort, is gegeven in figuur 4.15.

Ook rond obstakels die niet helemaal boven water uitsteken, zoals zandbanken en zogeheten onderwater–golfbrekers (waarvan de kruin onder het stilwaterniveau ligt), treedt diffractie op. Voor de beschrijving daarvan kan ook gebruik worden gemaakt van de lineaire golftheorie, maar de uitkomst is complexer dan de Sommerfeld oplossing vanwege de combinatie met *shoaling*, refractie en eventueel breking van golven die over de zandbank heen gaan en in het schaduwgebied terecht komen. Zoiets speelt ook bij poreuze obstakels, zoals stortstenen golfbrekers,



Figuur 4.15: Diffractiepatroon rond de kop van een half–oneindig lange golfbreker waarop invallende golven deels reflecteren. Zowel de inkomende golven (met in blauw aangegeven golfkammen) als de gereflecteerde golven (met in rood aangegeven golfkammen) diffracteren rond de kop van de golfbreker. Het totale golfbeeld is het resultaat van interferentie tussen beide.

die in enige mate golven doorlaten naar het schaduwgebied ook al ligt de kruin boven stilwaterniveau.

Een andere complicerende factor die in de waterbouwkundige praktijk veel voorkomt, is de interactie van diffractie–patronen rond uiteinden van obstakels die bij elkaar in de buurt liggen. Dat doet zich bijvoorbeeld voor bij haveningangen die door twee golfbrekers worden afgeschermd voor invallende golven. Zo'n combinatie van twee golfbrekers is bedoeld om rond de ingang van een haven een betrekkelijk luw gebied te creëren waarin schepen veilig kunnen in– en uitvaren. Echter, door interferentie van diffractie–patronen rond de uiteinden van de beide golfbrekers in combinatie met reflectie tegen kademuren van golven die de haven binnendringen, kunnen lokaal in de haven golfcondities ontstaan die voor varende of afgemeerde schepen ongunstig zijn. In de historie zijn diverse voorbeelden te vinden van jachthavens waar pleziervaartuigen schade hebben opgelopen doordat aan– of afmeren ernstig is bemoeilijkt door lokale golfcondities. Overeenkomstig zijn er voorbeelden van zeehavens waar golf–geïnduceerde bewegingen voor afgemeerde schepen belemmerend waren voor laden of lossen. Bij een verantwoord ontwerp van een haven hoort een studie naar golfindringing.

4.5.4 Overdracht van impuls

Naast energie wordt ook impuls overgedragen in de richting waarin golven zich voortplanten. In de voorgaande paragrafen over golfenergie 4.5.1 en *shoaling* en refractie 4.5.2 hebben we behoud van energie toegepast om een uitspraak te kunnen doen over de verandering van eigenschappen van golven als deze zich voortplanten over een ruimtelijk variërende bodem. Zo heeft *shoaling* een effect op de golfhoogte en de fasesnelheid als de waterdiepte varieert in de richting waarin golven zich voortplanten. En bij refractie komt daar een invloed op de voortplantingsrichting ten opzichte van de dieptelijnen bij.

In deze paragraaf gaan we na hoe behoud van impuls zich daartoe verhoudt. Als golven zich voortplanten wordt in de golfrichting ook impuls overgedragen. Die overdracht is afhankelijk van eigenschappen van de golven (T, H en c_g). Als die eigenschappen veranderen door *shoaling*, *refractie* of breking, verandert ook de overdracht van impuls die is gekoppeld aan de golfbeweging. Omdat impuls een behouden grootheid is, betekent die verandering dat golven gaandeweg impuls

uitwisselen met hun omgeving.

Als golven zich bijvoorbeeld voortplanten in allengs ondieper water, leidt *shoaling* tot een toename van de golfhoogte en dat gaat gepaard met een toename van de overdracht van impuls die is gebonden aan de golfbeweging. Ter compensatie wordt impuls onttrokken aan het water en dat leidt tot een stroming tegen de golfrichting in. Bedenk hierbij dat impuls een vectoriële grootheid is. De toename van de impuls in golfrichting maakt balans met een toename van de impuls (de stroming) in tegengestelde richting. Er is zodoende een uitwisseling van impuls tussen golven en stroming.

Om die uitwisseling in beeld te brengen, gaan we eerst in op de golf–gerelateerde overdracht van impuls in voortplantingsrichting en hoe die afhankelijk is van eigenschappen van de golf. In paragraaf 6.4 gebruiken we die relatie om aan te geven hoe brekende golven van invloed zijn op de lange–termijn morfologische ontwikkeling van een zandige kust.

Net zoals bij stroming (zie paragraaf 2.4) bestaat de overdracht van impuls ook bij golven uit een druk–gerelateerd deel en een advectief deel. Het druk–gerelateerde deel wordt bepaald door het verschil tussen de totale druk in het water en de hydrostatische druk. Die laatste zou er immers ook zijn in afwezigheid van golven. Bij de beschrijving van de orbitaalbeweging in paragraaf 4.4 is dat verschil de afwijking p_{golf} van de hydrostatische druk genoemd. Het verloop van die afwijking volgens de lineaire golftheorie is gegeven in uitdrukking (4.15).

Het advectieve aandeel in de overdracht van impuls in de voortplantingsrichting van de golven is afhankelijk van de horizontale component van de orbitaalsnelheid u_x, (zie uitdrukking (4.16) en bedenk dat we daarbij de x–richting hebben gekozen als de richting waarin de golven zich voortplanten). Het advectieve deel komt hiermee op $\rho u_x u_x$.

Omdat zowel de druk p_{golf} als de component u_x van de orbitaalsnelheid varieëren met tijd en plaats, doet de golf–gerelateerde overdracht van impuls in de richting waarin de golven zich voortplanten dat ook.

Geïntegreerd over de waterdiepte wordt deze overdracht van impuls gegeven door

$$\int_{-h}^{\eta(t)} (\rho u_x u_x + p_{\text{golf}}) \mathrm{d}z \tag{4.53}$$

Omdat de positie van het wateroppervlak η varieert met de tijd, geldt dat ook voor de overdracht van impuls. Gemiddeld over de golfperiode is die overdracht

$$S_{xx} = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \int_{-h}^{\eta(t)} (\rho u_x u_x + p_{\text{golf}}) \mathrm{d}z \mathrm{d}t \tag{4.54}$$

Dit wordt de golfspanning genoemd (of *radiation stress* in het Engels). Deze S_{xx} hebben we gevonden door de lokale, momentane overdracht van impuls ($\rho u_x u_x +$

p_{golf}) te integreren over de waterdiepte en te middelen over een golfperiode ($T = 2\pi/\omega$). Zodoende is de golfspanning te zien als de golf–gemiddelde overdracht van impuls in de richting waarin golven zich voortplanten en per eenheid van lengte gemeten langs de golfkam (dus dwars op de voortplantingsrichting). De dimensie van S_{xx} is kracht per lengte (N/m in SI eenheden).

Voor de uitwerking van uitdrukking (4.54) voor de golfspanning wordt verwezen naar de literatuur. In bijvoorbeeld Holthuijsen (2007) is te vinden dat bij toepassing van de lineaire golftheorie geldt dat

$$S_{xx} = \left(2n - \frac{1}{2}\right) E_{\text{golf}} = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{8}\rho g H^2 \tag{4.55}$$

met H de golfhoogte, n volgens (4.37) en E_{golf} volgens (4.29).

Effect van *shoaling* op golfspanning

Aan de hand van uitdrukking (4.55) kunnen we zien dat bijvoorbeeld *shoaling* ertoe leidt dat de golfgemiddelde overdracht van impuls verandert in de richting waarin de golven zich voortplanten. In paragraaf 4.5.2 hebben we gezien dat als golven zich voortplanten naar steeds ondieper water, zowel de golflengte als de golfhoogte veranderen. In uitdrukking (4.55) voor S_{xx} zien we dat terug in een verandering in de golfenergie E_{golf} (want die is afhankelijk van de golfhoogte H) en in de factor n omdat die afhangt van de golflengte en de waterdiepte.

De mate waarin E_{golf} en n variëren met de waterdiepte is niet zodanig dat er geen netto effect is op S_{xx}. Dat kan als volgt worden ingezien. In het begin van deze paragraaf hebben we geredeneerd dat de overdracht van energie in de golfrichting (de energieflux F_{golf}, gegeven in uitdrukking (4.39)) bij goede benadering constant is. Deze flux is direct gerelateerd aan de golfenergie E_{golf} volgens $F_{\text{golf}} = ncE_{\text{golf}}$. Combinatie van deze relatie met (4.55) geeft

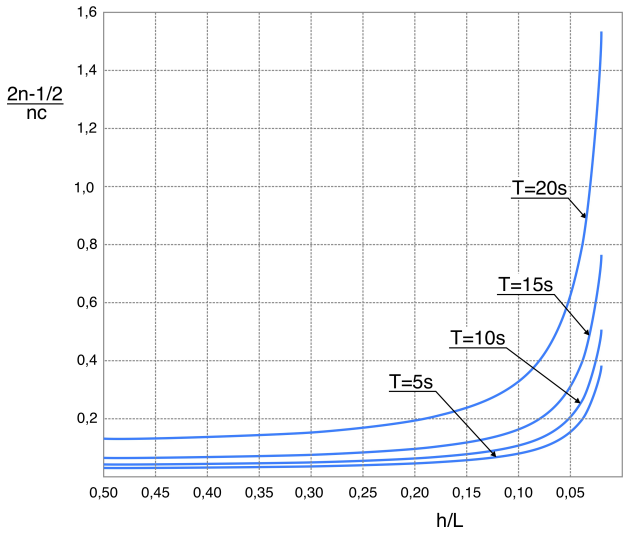
$$S_{xx} = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \frac{F_{\text{golf}}}{nc} \tag{4.56}$$

En met een constante F_{golf} geldt dat

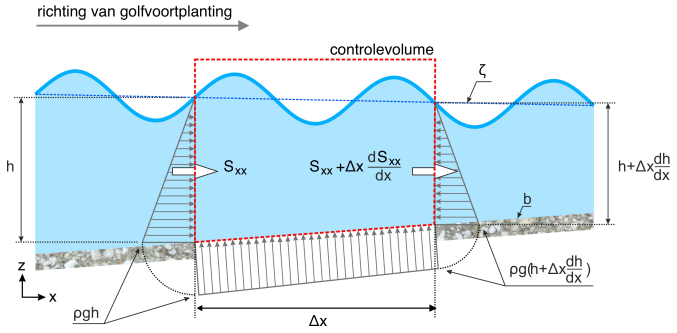
$$S_{xx} \propto \frac{2n - 1/2}{nc} \tag{4.57}$$

waarin de factor n en de fasesnelheid c alleen afhangen van de golfperiode T en de waterdiepte h. Voor een voorgeschreven golfperiode T en een constante energieflux F_{golf}, is de golfspanning S_{xx} dus alleen afhankelijk van de waterdiepte h[34]. In figuur 4.16 is die afhankelijkheid geïllustreerd voor enkele, praktisch relevante golfperioden. In die figuur is de factor in het rechter lid van (4.57) uitgezet tegen de relatieve waterdiepte h/L.

[34]Bedenk dat deze conclusie uitsluitend betrekking heeft op het effect van *shoaling* op de golfspanning. Fenomenen als refractie en diffractie zijn ook van invloed op de overdracht van impuls in de golfrichting, maar die zijn hier allemaal buiten beschouwing gelaten.



Figuur 4.16: Relatie tussen, enerzijds, de verhouding van golfspanning en energieflux (S_{xx}/F_{golf}) en, anderzijds, de relatieve waterdiepte h/L voor vier verschillende golfperioden T. Effecten van wrijving en breking zijn hierin niet meegenomen.
De dimensie van S_{xx}/F_{golf} is tijd/lengte. Voor de schaalverdeling langs de vertikale as is gebruik gemaakt van SI eenheden (s/m).



Figuur 4.17: Schets van een controlevolume dat kan worden gebruikt voor het opstellen van een impulsbalans voor golven die onderhevig zijn aan *shoaling*. In een stationaire situatie waarin bodemwrijving van ondergeschikt belang is, gaat die balans om een een evenwicht tussen gradiënten in golfspanning (S_{xx}) en stilwaterniveau (ζ) zoals gegeven in (4.60).

In het geval van (uitsluitend) *shoaling* is de energieflux F_{golf} in de golfrichting bij goede benadering constant, mits geen breking optreedt. Voor dat geval blijkt uit figuur 4.16 dat als golven zich voortplanten naar steeds ondieper water (van links naar rechts in de grafiek), de golfspanning S_{xx} toeneemt. Met de golven mee is zodoende sprake van een toenemende golf–gemiddelde overdracht van impuls. Om na te gaan hoe zich dat verhoudt tot behoud van impuls, kijken we naar het controlevolume dat is geschetst in figuur 4.17. Dit volume ligt in een verticaal vlak dat samenvalt met de golfrichting.

Voor dit controlevolume kijken we naar de horizontale overdracht van horizontale impuls. Als alleen golven zich door dit volume voortplanten en er voorts geen sprake is van stroming, bestaat die overdracht uit een combinatie van een golfgerelateerd deel en de hydrostatische druk. Het golfgerelateerde deel is, althans geïntegreerd over de waterdiepte en gemiddeld over de golfperiode, gelijk aan de

golfspanning S_{xx}.

In die golfspanning is de golfgerelateerde afwijking p_{golf} van de hydrostatische druk begrepen, maar de hydrostatische druk zelf niet. Voor de totale overdracht van impuls moet die laatste dus worden opgeteld bij de golfspanning.

In figuur 4.17 is dat in algemene zin weergegeven. Naast golven die zich door het controlevolume voortplanten over een hellende bodem is een verhang van het stilwaterniveau ζ geschetst. Zo'n verhang gaat gepaard met een netto toename van de impuls in het controlevolume, gegeven door[35]

$$-\rho g \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\Delta x \tag{4.58}$$

Als we te maken hebben met een stationaire toestand, dat wil zeggen een toestand waarin het stilwaterniveau en de golfcondities niet variëren met de tijd, is deze toename constant. Die geldt dus zowel momentaan als gemiddeld over de golfperiode. Dat maakt het mogelijk om een direct verband te leggen met het netto effect van de golfspanning op de impuls binnen het controlevolume, gelijk aan het verschil tussen de overdracht van impuls het volume in (links in figuur 4.17) en de overdracht het volume uit (rechts in die figuur). Dit netto effect is gelijk aan

$$S_{xx} - \left(S_{xx} + \Delta x \frac{\mathrm{d}S_{xx}}{\mathrm{d}x} \right) = -\Delta x \frac{\mathrm{d}S_{xx}}{\mathrm{d}x} \tag{4.59}$$

Vanwege behoud van impuls moet de som van beide gelijk zijn aan nul. Na delen door Δx en vermenigvuldigen met -1 levert dat

$$\frac{\mathrm{d}S_{xx}}{\mathrm{d}x} + \rho g \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{4.60}$$

Merk op dat we in deze balans de bodemschuifspanning buiten beschouwing hebben gelaten. Voor een situatie waarin er geen netto stroming is, is dat consistent met onze eerdere beschouwing over *shoaling*. Daarbij hebben we de invloed van een variërende waterdiepte op de golfhoogte in kaart gebracht met de veronderstelling dat de energieflux F_{golf} in ieder geval bij goede benadering constant is. Met substantiële bodemwrijving zou dat niet het geval zijn.

Voor het geval dat golven zich voortplanten naar steeds ondieper water (*shoaling*), hebben we gezien dat de golfspanning allengs toeneemt (zie (4.57) en figuur 4.18). Combinatie met de impulsbalans (4.60) laat zien dat dit gepaard gaat met een daling van het stilwaterniveau (ζ) in de golfrichting (x). In de Engelstalige literatuur wordt dit verschijnsel *wave set-down* genoemd.

[35] Voor een uitleg wordt verwezen naar paragraaf 2.4 waar de impulsbalans voor diepte–gemiddelde stroming is afgeleid. De bijdrage van de hydrostatische druk aan die balans is gelijk aan $-\rho g \mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}x$ (met x in dat geval de stroomrichting). Voor golven die zich voortplanten in x–richting is die bijdrage identiek. Kijk daarvoor bijvoorbeeld naar de overeenkomst in het verloop van de hydrostatische druk langs de wanden van het controlevolume in figuren 2.5 en 4.17.

Effect van breking op golfspanning

Het effect van *shoaling* op de golfspanning en de daaraan gerelateerde *set-down*, doet zich bijvoorbeeld voor als golven loodrecht invallen op een kust met rechte, evenwijdige dieptelijnen. Hoewel de golfhoogte, gezien vanaf *diep water* eerst afneemt om vervolgens weer toe te nemen (zie figuur 4.7), neemt de golfspanning gestaag toe (zie figuur 4.16).

Die toename houdt aan totdat golven breken. Daarbij wordt golfenergie gedissipeerd en neemt de energieflux F_{golf} af in de richting van golfvoortplanting. En dat geldt ook voor de golfspanning. Vanwege behoud van impuls gaat dit samen met een oplopend stilwaterniveau. Dit valt direct af te leiden uit de impulsbalans (4.60). Als $\mathrm{d}S_{xx}/\mathrm{d}x < 0$, dan moet $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}x > 0$. In de Engelstalige literatuur wordt dit *wave set-up* genoemd.

Net zoals in de vorige paragraaf over de invloed van *shoaling* op de golfspanning, gaat deze beschouwing over het effect van breken over golven die zich voortplanten over een vlakke, hellende bodem. Bij zo'n bodem zijn de dieptelijnen recht en evenwijdig aan elkaar en we hebben ons beperkt tot golven die loodrecht op die dieptelijnen invallen.

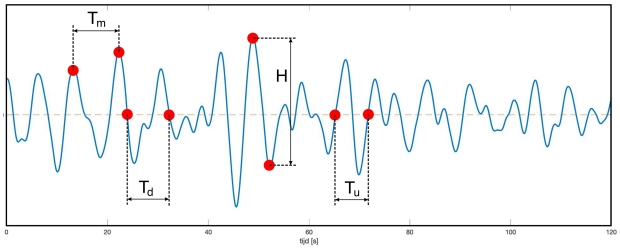
In kustgebieden zijn dieptelijnen doorgaans niet recht en zijn ze ook niet evenwijdig. Net zo min vallen golven daar altijd loodrecht op die dieptelijnen in. Dat betekent dat naast *shoaling* ook refractie een rol speelt. Voor een beschrijving van het gecombineerde effect van *shoaling* en refractie kan niet worden volstaan met de 1–dimensionale impulsbalans (4.60), maar is een 2–dimensionale benadering nodig. In paragraaf 6.4 komen we daar in relatie tot golf-geïnduceerd transport van sediment in kwalitatieve zin op terug.

4.6 Natuurlijk golfveld

Een natuurlijk golfveld, zoals dat bijvoorbeeld op zee voorkomt, bestaat niet uit een enkele regelmatige golf, maar uit een mengelmoes van golven met uiteenlopende periode en amplitude. In de context van de lineaire golftheorie wordt die mengelmoes weergegeven door een superpositie van enkelvoudige golven (zie (4.1)):

$$\eta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(\omega_i t - k_i x) \tag{4.61}$$

In zo'n golfveld zijn de golfperiode en de golfhoogte niet eenduidig bepaald. Het is echter wel mogelijk om daar karakteristieke waarden voor aan te geven die met relevante eigenschappen van het golfveld kunnen worden geassocieerd. In de literatuur zijn diverse karakteristieke waarden te vinden, zoals de significante periode (T_s) en significante hoogte (H_s). Deze twee karakteristieken zijn op een overeenkomstige manier gedefinieerd. De significante golfhoogte wordt gevonden door van alle golven in een golfveld de hoogte te bepalen, die hoogtes naar grootte te ordenen en dan het 1/3 deel te nemen met de hoogste waarden. Het gemiddelde



Figuur 4.18: Voorbeeld van een registratie van de uitwijking $\eta(t)$ van het wateroppervlak waarin definities zijn aangegeven van de golfhoogte H en drie varianten van de golfperiode T.

van deze selectie is de significante golfhoogte. De significante periode wordt op dezelfde manier gevonden: ordenen op basis van de periode en dan het gemiddelde nemen van het hoogste 1/3 deel.

Van oudsher worden die significante waarden ontleend aan registraties van $\eta(x,t)$ op een of andere locatie x. Een voorbeeld van een stukje van zo'n registratie is gegeven in figuur 4.18. Om de periode van een enkelvoudige golf te bepalen uit een registratie van de bijbehorende oppervlakte–uitwijking η, kunnen we kijken naar de tijd die verstrijkt tussen passage van opeenvolgende nuldoorgangen (waar $\eta = 0$) of pieken (golftoppen of dalen).

In figuur 4.18 zijn drie manieren aangegeven om uit een registratie van $\eta(t)$ de golfperiode te bepalen. Een daarvan gaat uit van de duur tussen registraties van opeenvolgende golftoppen (T_m)[36]. De andere twee zijn gerelateerd aan nuldoorgangen en daarbij wordt onderscheid gemaakt tussen zogeheten *zero upcrossing* en *zero downcrossing*, achtereenvolgens aangegeven met T_u en T_d in figuur 4.18.

Naast de significante golfhoogte en –periode wordt in wetenschap en praktijk in toenemende mate gebruik gemaakt van karakteristieken die zijn gerelateerd aan het energiedichtheid spectrum van golven. Dat spectrum geeft aan hoe de golfenergie is verdeeld over de frequenties (of perioden) die in een golfveld voorkomen. Tot op zekere hoogte is dat spectrum te zien als een histogram waarin per interval van golffrequentie het aandeel van de totale golfenergie is aangegeven. Zo'n histogram kan als volgt opgebouwd worden gedacht.

In paragraaf 4.5.1 hebben we voor enkelvoudige golven gevonden dat de golfenergie evenredig is met het kwadraat van de golfhoogte. Zoals aangegeven in (4.61) kunnen we een natuurlijk golfveld zien als een superpositie van enkelvoudige golven en op dezelfde manier kunnen we de golfenergie van een natuurlijk golfveld zien als de som van bijdragen van de enkelvoudige golven waaruit dat veld is samengesteld.

Vanuit dit beeld kunnen we alle golven in een golfveld op basis van hun frequentie verdelen in categorieën die elk betrekking hebben op een specifiek interval van frequenties en we zorgen ervoor dat alle intervallen op elkaar aansluiten zodat alle frequenties vertegenwoordigd zijn. Vervolgens sommeren we per interval de energie

[36]Het subscript m in T_m verwijst in dit geval naar maxima van η, maar in de literatuur kan het ook verwijzen naar 'mean'.

van alle golven die daarin vallen. Op die manier vinden we de verdeling van de totale energie van het golfveld over de diverse frequentie–intervallen. Grafisch kan dat worden weergegeven in de vorm van een histogram.

In de limiet, waarbij de breedte van de intervallen naar nul nadert, leidt deze aanpak tot een verdeling van de totale energie van een golfveld over de daarin aanwezige frequenties. Dit wordt het energiedichtheid spectrum genoemd. Het is een spectrum omdat het gaat over een verdeling over frequenties en het is een dichtheid omdat het gaat over de energie per frequentie[37].

Het verloop van de energiedichtheid over de frequenties wordt genoteerd als $E(\omega)$. De totale energie E_{golf} van het golfveld is gelijk aan de integraal van de dichtheid over de frequenties: $\int_0^\infty E(\omega)\mathrm{d}\omega$.

Karakteristieke waarden van de golfhoogte en –periode kunnen worden ontleend aan zogeheten momenten van het energiedichtheid spectrum. Veel gebruikte karakteristieken zijn de golfhoogte H_{m0} en de golfperioden $T_{m-1,0}$. Deze zijn gedefinieerd als

$$H_{m0} = 4\sqrt{m_0} \quad ; \quad T_{m-1,0} = 2\pi\frac{m_{-1}}{m_0} \tag{4.62}$$

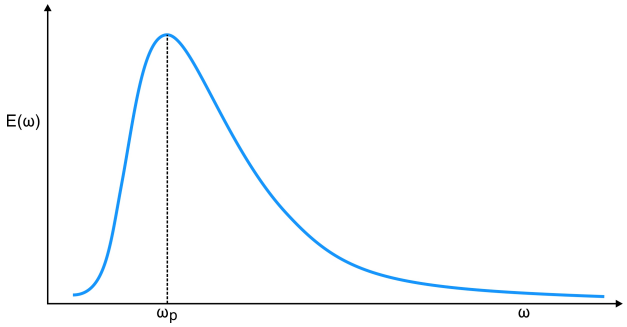
waarin m_n het n–de orde moment van het spectrum $E(\omega)$, gedefinieerd als

$$m_n = \int_0^\infty \omega^n E(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{4.63}$$

Een typische vorm van het energiedichtheid spectrum voor zeegang (dat is een golfveld dat door lokale wind is opgewekt) is gegeven in figuur 4.19. Door de schuifspanning die de wind uitoefent op het wateroppervlak, wordt energie van de wind overgedragen op het water. Voor een deel vertaalt zich dat in een stroming (zie paragraaf 3.6.2) en voor een ander deel in het genereren golven, met name in betrekkelijk hoge frequenties. Door interacties tussen golven met verschillende frequenties, wordt de energietoevoer vanuit de wind doorgegeven naar andere frequenties. Tegelijkertijd wordt in het golfveld energie gedissipeerd waarbij ook breking een belangrijke rol speelt. Het gaat daarbij om een vorm van breking die in de Engelse literatuur *white-capping* wordt genoemd. In het Nederlands wordt over schuimkoppen gesproken. Dat is iets anders dan de vorm van breking in de brekerzone langs een kust waarbij golven langs een deel van de golfkam geleidelijk inzakken of tamelijk abrupt omslaan of iets daartussenin (zie paragraaf 4.7).

Uiteindelijk ontstaat een evenwicht tussen energietoevoer vanuit de wind en dissipatie. Men spreekt dan van volgroeide zeegang. Het bijbehorende energiedichtheid spectrum is het zogeheten Pierson-Moskowitz spectrum (Pierson and Moskowitz,

[37] In paragraaf A.2 van appendix A over de analyse van tijdreeksen wordt kort aangegeven hoe een energiedichtheid spectrum kan worden ontleend aan registraties van de oppervlakte–uitwijking zoals die in figuur 4.18.



Figuur 4.19: Impressie van het energiedichtehid spectrum $E(\omega)$ voor zeegang. De freqeuntie waarvoor de dichtheid een maximum bereikt, is de piekfrequentie ω_p.

1966), gegeven door

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi}\alpha g^2 \omega^{-5} \exp\left(-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-4}\right) \tag{4.64}$$

waarin $\alpha = 0.081$.

Qua vorm is dat vergelijkbaar met wat is geschetst in figuur 4.19, maar bij nog groeiende zeegang is de piek van het spectrum meer geprononceerd dan in de volgroeide toestand, is die hoger en ligt die bij een wat hogere frequentie. Een nog steeds toonaangevend onderzoek naar de ontwikkeling van het spectrum bij groeiende zeegang is het *Joint North-Sea Wave Project* (Hasselmann et al., 1973). Dit project heeft onder meer een mathematische beschrijving van het spectrum $E(\omega)$ opgeleverd afhankelijk van de duur van de wind en de afstand waarover deze invloed heeft op de groei van de golven. Dat staat bekend als het JONSWAP spectrum (de afkorting van *Joint North-Sea Wave Project*).

De verdeling van golfenergie over frequenties speelt een belangrijke rol in geavanceerde mathematische modellen waarmee de ontwikkeling van een golfveld onder invloed van wind wordt beschreven. De overdracht van energie vanuit de wind naar de golven, maar ook de herverdeling van die energie over frequenties ten gevolge van interacties tussen golven met verschillende frequenties worden daarin meegenomen op basis van inzicht in onderliggende fysische processen. In dit boek gaan we daar niet op in. We noemen echter wel de voor de praktijk zeker relevante parametrische beschrijving van Young and Verhagen (1996) van de significante golfhoogte en de piekperiode[38] die verwacht mogen worden afhankelijk van de windsnelheid W, de afstand F waarover de wind een schuifspanning op het wateroppervlak uitoefent (F staat voor het Engelse woord *fetch* dat 'ophalen' betekent; de Nederlandse term voor *fetch* is strijklengte) en de waterdiepte h.

Om tot hun beschrijving te komen, hebben Young and Verhagen (1996) een uitgebreide meetcampagne uitgevoerd en mede uit de resultaten daarvan gedestilleerd

[38] Bij volgroeide zeegang komen H_{m0} en $T_{m-1,0}$ goed overeen met achtereenvolgens de significante golfhoogte H_s en de significante golfperiode T_s. Een andere karakteristieke golfperiode is de piekperiode T_p. Deze is gerelateerd aan de piekfrequentie ω_p waarbij de energiedichtheid $E(\omega)$ een maximum bereikt (de piek van het spectrum): $T_p = 2\pi/\omega_p$. Bij volgroeide zeegang geldt bij goede benadering dat $T_{m-1,0} = T_s = 0,9T_p$.

dat

$$H_s = 0,24\frac{W^2}{g}\left\{\Phi_H \tanh\left(\frac{4,41\times10^{-4}\left(gF/W^2\right)^{0,79}}{\Phi_H}\right)\right\}^{0,572} \tag{4.65}$$

met

$$\Phi_H = \tanh\left(0,343\left(\frac{gh}{W^2}\right)^{1,14}\right) \tag{4.66}$$

en

$$T_p = 7,69\frac{W}{g}\left\{\Phi_T \tanh\left(\frac{2,77\times10^{-7}\left(gF/W^2\right)^{1,45}}{\Phi_T}\right)\right\}^{0,187} \tag{4.67}$$

met

$$\Phi_T = \tanh\left(0,10\left(\frac{gh}{W^2}\right)^{2,01}\right) \tag{4.68}$$

In vergelijking tot andere parametrische relaties die in de literatuur kunnen worden gevonden, bieden bovenstaande uitdrukkingen van Young and Verhagen (1996) volgens Holthuijsen (2007) vermoedelijk de beste schattingen van de karakteristieke golfhoogte en –periode voor een bekende windsnelheid, strijklengte en waterdiepte. Voor toepassing in schetsontwerpen van waterbouwkundige constructies die aan golven worden blootgesteld, zijn deze uitdrukkingen zeker geschikt. Echter, een gedetailleerd (definitief) ontwerp behoeft als regel onderbouwing vanuit onderzoek op basis van bijvoorbeeld fysische of mathematische modellen.

Voor het ontwerp van zulke constructies en bijvoorbeeld ook bij het plannen van operaties op zee, is naast informatie over de besproken karakteristieke waarden van golfhoogte en –periode, ook vaak inzicht gewenst in statistische eigenschappen van het golfveld. Daarvoor gaan we terug naar de oppervlakte uitwijking $\eta(t)$. Als we deze uitwijking vergelijken voor twee locaties i en j binnen hetzelfde golfveld, dan zal blijken dat $\eta_i(t) \neq \eta_j(t)$, althans met aan zekerheid grenzende waarschijnlijkheid niet voor alle t. Echter, als sprake is van horizontale uniformiteit in het golfveld, zijn de statistische eigenschappen van $\eta(t)$ voor alle locaties wel aan elkaar gelijk.

In appendix A over tijdreeksanalyse wordt $\eta(t)$ gezien als een Gaussisch proces, wat zoveel wil zeggen dat $\eta(t_k)$ voor elk tijdstip t_k is op te vatten als een trekking is uit een normale verdeling. Dat vormt de basis voor de berekening van het energiedichtheid spectrum (zie ook voetnoot 37) en ook voor de statistische beschrijving van extremen die zich voordoen in $\eta(t)$.

Extremen in de hoogte H van individuele golven zijn daaraan gerelateerd. In dit boek gaan we op die relatie niet in, maar beperken ons tot vermelding van de kansverdeling van de hoogte H van individuele golven in een horizontaal uniform golfveld met significante golfhoogte H_s:

$$P(\underline{H} < H) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{H}{H_s}\right)^2\right) \tag{4.69}$$

waarin de onderstreping aangeeft dat het om een stochastische variabele gaat.

Deze kansverdeling staat bekend als de Rayleigh verdeling[39]. De toepasbaarheid van deze verdeling is bepekt tot volgroeide zeegang en *diep water* ($h/L > 0,5$).

Naast al of niet volgroeide zeegang, hebben we in de waterbouwkundige praktijk ook vaak te maken met deining. Waar het bij zeegang gaat over golven die door een lokaal windveld worden opgewekt, heeft deining betrekking op golven die door een windveld elders zijn gegenereerd en zich over enige afstand hebben voortbewogen. Eerder hebben we opgemerkt dat groeiende zeegang wordt gekenmerkt door een continue overdracht van energie vanuit de wind naar de golven en dat door interactie tussen golven met verschillende frequenties energie over die frequenties wordt herverdeeld. Zodra de wind wegvalt of de golven zich hebben voortbewogen tot buiten de invloed van het windveld waarin zij zijn ontstaan, verdwijnt de toevoer van energie vanuit de wind maar gaat de herverdeling van energie over de frequenties door.

Dit proces toont zich in een geleidelijke afname van de piekfrequentie ω_p en een concentratie van de golfenergie rond die frequentie. Het spectrum wordt allengs smaller. Een vuistregel voor de zuidelijke Noordzee is dat als $T_{m-1,0} > 10$s (ofwel $\omega < 0,6\text{s}^{-1}$) sprake is van deining. Die vuistregel is ingegeven door de combinatie van het lokale windklimaat en de afmetingen van het zeegebied. De vuistregel is dus niet algemeen toepasbaar.

In de Atlantische oceaan, bijvoorbeeld, kunnen golven een veel grotere afstand afleggen vanaf de locatie waar ze door lokale wind zijn gegenereerd dan in de Noordzee. Zo heeft de westkust van Afrika te maken met deining die z'n oorsprong vindt in zeegang die is gegenereerd in het zeegebied ten oosten van het noordelijke deel van Zuid–Amerika. Voordat die golven de Afrikaanse kust bereiken, hebben ze de Atlantische Oceaan overgestoken en daarbij is de piekfrequentie sterk afgenomen. Bij de Afrikaanse kust komen frequenties voor van 0,05s^{-1} of minder ofte wel perioden van 20s of meer. In de buurt van de kust (waterdiepte orde 10 meter) gaat het dan om golven met een lengte van soms 150 tot 300 meter.

4.7 Breking

Als golven zich voortplanten naar steeds ondieper water, zoals dat bijvoorbeeld in kustgebieden of rond zandbanken kan voorkomen, wijkt hun vorm in toenemende mate af van die van een sinus en uiteindelijk breken de golven. Voor een individuele golf die invalt op een matig hellende, vlakke bodem treedt breking doorgaans op als de golfhoogte ongeveer 0,7 à 0,8 keer de waterdiepte is. Het gaat hierbij om de lokale waterdiepte en de lokale golfhoogte, dus inclusief de verandering die daarin is opgetreden door *shoaling* en eventueel ook refractie.

[39]Deze verdeling is enoemd naar de Britse wiskundige en Nobelprijswinnaar John William Strutt, 3^{e} Baron van Rayleigh (1842-1919).

Bij een sterk hellende bodem of een onregelmatig gevormde bodem (zoals bij rotskusten) kan breking optreden bij een heel andere verhouding van golfhoogte en diepte dan 0,7 á 0,8. Dat is ook het geval als in het gebied waar breken optreedt sprake is van sterke wind. Bij het ontwerp van waterbouwkundige constructies die blootstaan aan belasting door invallende golven, kan daarom niet op voorhand worden verondersteld dat de golfhoogte aan de rand van die constructie beperkt is tot 0,7 à 0,8 keer de daar aanwezige waterdiepte. Die verhouding is een goede indicator en moet als zodanig worden gebruikt.

Daarnaast speelt voor het ontwerp van waterbouwkundige constructies de manier waarop golven breken een rol. Voor een vlakke, hellende bodem wordt de manier van breken gekarakteriseerd door de zogeheten brekerparameter ξ[40] gegeven door

$$\xi = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{s}} \tag{4.70}$$

waarin α de hellingshoek van de bodem en s is de golfsteilheid, gedefinieerd als

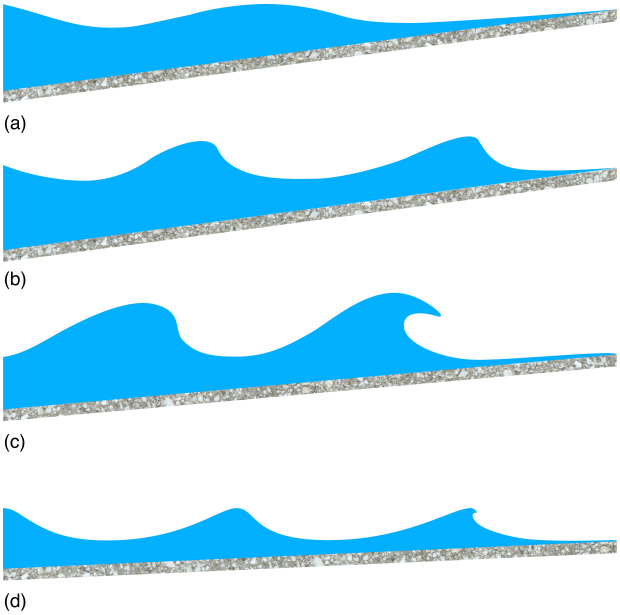
$$s = \frac{2\pi H}{gT^2} \tag{4.71}$$

Bij een flauwe bodemhelling in combinatie met geringe golfsteilheid (ξ groter dan circa 2, met H de golfhoogte bij breking) lopen golven wel tegen de hellende bodem op, maar is nauwelijks sprake van breking. In de Engelstalige literatuur wordt dit aangeduid met de term *surging breaker*. Het gaat gepaard met een hoge mate van reflectie. Bij toenemende ξ wordt een steeds kleiner deel van de energie van invallende golven gedissipeerd door breken.

Anderzijds, als de golfsteilheid ten opzichte van de bodemhelling toeneemt (dus bij afnemende ξ), wordt relatief meer energie door breken gedissipeerd en verandert ook de manier van breken. Hoewel de overgang niet scherp is, treedt breken bij circa $0,4 \leq \xi \leq 2,0$ veel abrupter op dan bij $\xi > 2$. Golven die zich over de hellende bodem naar steeds ondieper water voortplanten, laten sterke deformatie zien waarbij het golffront steeds steiler wordt en vervolgens een holle vorm krijgt. Uiteindelijk valt de golf als het ware voorover. De gevolgen zijn sterke turbulentie en dissipatie van golfenergie. In de Engelstalige literatuur worden dit *plunging breakers* genoemd. Het is het soort brekende golf waar surfers een warm gevoel bij krijgen. De overgang tussen *plunging breaker* en *surging breaker* wordt aangeduid met *collapsing breaker* (ξ ongeveer 2).

Een impressie van de verschillen in deformatie van van een golf die invalt op een hellende bodem, is geschetst in figuur 4.20. In deze figuur wordt heel globaal de deformatie van de golf weergegeven die typerend is voor het brekertype. In

[40] Deze parameter wordt ook de Iribarren parameter genoemd, naar de Spaanse ingenieur Ramón Iribarren Cavanilles (1900–1967) die de parameter introduceerde voor het karakteriseren van golfbreking op stranden (zie Iribarren and Nogales (1949)). In het Engels wordt dit de *surf similarity parameter* genoemd. Een relatie tussen waarden van deze parameter en vormen van breking (brekertypen genoemd), is later gelegd door Battjes (1974). In hoofdstuk 7 wordt naar deze parameter verwezen in relatie tot het ontwerp van dijken en golfbrekers.



Figuur 4.20: Impressie van de vier brekertypen:
surging ($\xi > 2$, figuur a),
collapsing ($\xi \approx 2$, figuur b),
plunging ($0,4 < \xi < 2$, figuur c),
spilling ($\xi < 0,4$, figuur d).

de literatuur en op Internet zijn meer illustratieve foto's en *artist impressions* te vinden.

Naast breking op diepte, zoals in het voorafgaande besproken, kunnen golven ook breken op steilheid. Dit gaat over het verschijnsel *white capping* dat in de voorgaande paragraaf 4.6 is genoemd in relatie tot dissipatie van golfenergie in een natuurlijk golfveld dat groeit onder invloed van overdracht van energie vanuit wind. Deze vorm van breking doet zich voor op *diep water*, waar de waterdiepte geen beperkende factor is. Door Miche (1944) is langs theoretische weg aangetoond dat deze vorm van breking optreedt als de hoogte H van een individuele golf groter is dan circa $0,14L$.

5

Planetaire effecten op waterbeweging

5.1 Inleiding

Dat de aarde een roterende bol is die bovendien deel uitmaakt van het trio aarde, maan en zon die om elkaar heen bewegen, heeft op verschillende manieren invloed op de waterbeweging op aarde.

Een daarvan is het Coriolis effect. Gewoonlijk beschrijven we beweging op en rond het aardoppervlak ten opzichte van een assenstelsel dat aan de aarde vast zit. Als de aarde om haar eigen as draait, gaat dat assenstelsel mee. Het gevolg daarvan is dat de richting van de assen continu verandert. Wat op enig moment voor een waarnemer op, bijvoorbeeld, de markt van Delft 'oost' is, staat loodrecht op wat 'oost' voor die waarnemer een kwart omloop van de aarde later is (aangenomen dat die waarnemer zich dan nog steeds op de markt bevindt). Op overeenkomstige manier veranderen ook 'noord' en 'omhoog', maar niet in dezelfde mate.

Als we de beweging van een object beschrijven ten opzichte van zo'n roterend assenstelsel, lijkt dat object een versnelling te ondergaan ook al worden er in werkelijkheid geen krachten op uitgeoefend. In paragraaf 5.2 is uitgelegd dat die versnelling is opgebouwd uit verschillende componenten. Een daarvan is gerelateerd aan het centrifugaaleffect, dat de indruk geeft dat een object op aarde een kracht ondervindt die het loodrecht van de rotatie–as van de aarde weg wil laten bewegen. Een andere component wordt de Corioliskracht of –versnelling genoemd. Omdat de richting daarvan afwijkt van die waarin het object zich beweegt, wordt ook gesproken van Coriolis afbuiging.

Een geheel ander planetair effect is het getij op aarde. Dat wordt dat gegenereerd door de beweging van aarde, maan en zon ten opzichte van elkaar in combinatie met de rotatie van de aarde rond haar eigen as. Aarde en maan roteren om een gezamenlijk massazwaartepunt. En dat zwaartepunt roteert weer om een ander

zwaartepunt, namelijk dat van aarde, maan en zon samen. Door het centrifugaaleffect bij deze rotaties heeft het water op aarde de neiging om van die zwaartepunten af te bewegen. Tegelijkertijd is dat water onderhevig aan gravitatie van zon en maan waardoor het water een kracht ondervindt in de richting van de massazwaartepunten van deze objecten. Het water in de aardse oceanen wordt hierdoor doorlopend in diverse richtingen versneld. Dat zien we terug in een deformatie van het oppervlak van het water dat het grootste deel van de planeet bedekt. En onder die deformaties door roteert de aarde om haar eigen as. Een waarnemer op een vaste plaats op aarde ziet dat als lange golven die over het oppervlak lopen. Zulke golven worden de astronomische getijden genoemd omdat ze terug te voeren zijn op zuiver planetaire bewegingen. In paragraaf 5.3 gaan we daar nader op in.

5.2 Coriolis

5.2.1 Principe van het Coriolis effect

In de waterbouwkunde wordt de beweging van vloeistoffen doorgaans beschreven ten opzichte van een assenstelsel waarvan de x-as naar het oosten wijst, de y-as altijd naar het noorden en de z-as steeds loodrecht op het oppervlak van de aardbol staat en naar buiten wijst. Omdat de aarde om haar eigen as draait, roteert ook dit assenstelsel (of elk ander assenstelsel met een vaste plaats en oriëntatie ten opzichte van het aardoppervlak). Deze rotatie leidt ertoe dat een object dat langs het oppervlak van de bol beweegt op het noordelijk halfrond naar rechts lijkt af te buigen en op het zuidelijk halfrond naar links. Dit verschijnsel wordt het Coriolis-effect genoemd, naar de fransman Gustave Gaspard Coriolis (1792-1843) die het in de eerste helft van de 19^{e} eeuw voor het eerst beschreef. Een impressie van dit effect kunnen we krijgen door na te gaan hoe een assenstelsel moet roteren zodanig dat de assen ten opzichte van de aarde dezelfde kant uit blijven wijzen.

Daartoe kijken we een beetje schuin naar de aarde zodat we de directe omgeving van de Noordpool nog net kunnen zien. Dat is schematisch weergegeven in figuur 5.1a. Het transparant grijze vlak in deze figuur verbeeldt het vlak waarin de aarde om haar as draait. De rotatie–as staat loodrecht op dit vlak en gaat door de Noordpool, in de figuur aangegeven met N. De draairichting is tegen de klok in. Het middelpunt van de aarde (het snijpunt van de rotatie-as en het rotatie–vlak) is aangegeven met O.

Stel dat we ons op enig moment bevinden in punt A, ergens op het noordelijk halfrond (zie figuur 5.1a). Om de beweging van objecten te beschrijven, kiezen we een Cartesisch assenstelsel xyz, met het xy-vlak rakend aan de bol. De x-as wijst naar het oosten en de y-as naar het noorden. De z-as staat loodrecht op de bol en valt samen met de lijn OA, van het middelpunt van de aarde naar onze locatie A op het oppervlak van de bol.

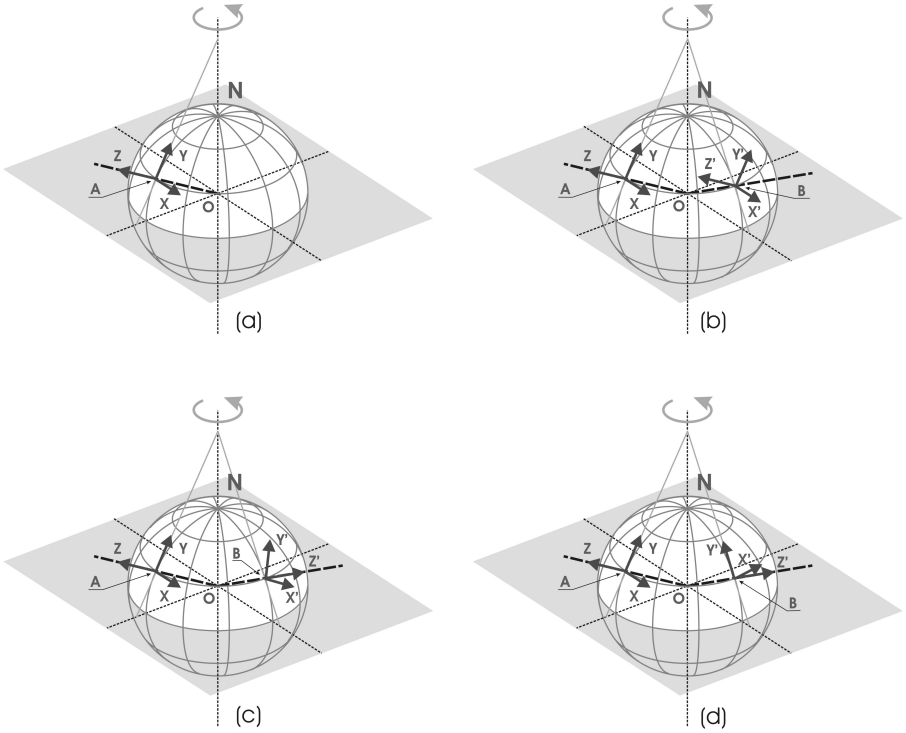
Omdat de aarde om haar as draait, bevinden we ons enige tijd later in punt B (aangegeven in figuur 5.1b). Hoewel onze route van A naar B de vorm heeft

van een cirkelboog, gaat het per saldo om een translatie (lineaire verplaatsing). Het assenstelsel dat we in punt A als referentie hebben gekozen, heeft dezelfde translatie ondergaan. De oorsprong van dat stelsel is verschoven van A naar B, maar de richtingen van de assen zijn daarbij niet veranderd. Dit verschoven stelsel is in figuur 5.1b aangegeven met $x\prime y\prime z\prime$.

Het gevolg van de verschuiving is dat bijvoorbeeld de $z\prime$-as in punt B evenwijdig is met de lijn OA. Dat is echter niet wat we willen. In punt B willen we een z-as die loodrecht op de bol staat en dus samenvalt met de lijn OB. Om dat te bereiken, moeten we het stelsel $x\prime y\prime z\prime$ een stukje roteren in het vlak dat wordt opgespannen door de lijnen OA en OB. Vóór die rotatie is $z\prime$ evenwijdig aan OA en erna valt $z\prime$ samen met OB (figuur 5.1c). Omdat het $x\prime y\prime$-vlak per definitie loodrecht staat op de $z\prime$-as en de $z\prime$-as na deze rotatie loodrecht op de bol staat, raakt het mee geroteerde $x\prime y\prime$-vlak uiteindelijk aan de bol in punt B. Echter, de $x\prime$-as wijst dan niet precies naar het oosten, maar naar het zuidoosten. Dat kunnen we corrigeren door de $x\prime$-as en de $y\prime$-as samen om de $z\prime$-as tegen de klok in, dus linksom te roteren (figuur 5.1d). Precies deze laatste rotatie maakt dat een object dat op het noordelijk halfrond langs de bol beweegt, naar rechts lijkt af te buigen. Met andere woorden: doordat we onze referentie (de x- en y-assen) in het raakvlak aan de bol voortdurend linksom laten draaien, lijkt elk object dat zich langs het oppervlak van de bol beweegt naar rechts af te buigen. Dit is de essentie van het Coriolis-effect.

Tot slot van deze kwalitatieve beschrijving van het Coriolis-effect nog vier opmerkingen:

- In de mathematische beschrijving (volgende paragraaf) van de beweging van objecten (bijvoorbeeld vloeistofdeeltjes) vinden we de afbuiging in het raakvlak aan de aardbol terug als een kracht of een versnelling (=kracht per eenheid van massa). Zoals uit bovenstaand betoog volgt, is die kracht er in werkelijkheid niet. Die kracht lijkt er te zijn omdat de referentie (het assenstelsel) feitelijk doorlopend wordt geroteerd. Men spreekt daarom van een schijnkracht.
- De gegeven redenering spitst zich toe op de rotatie van de x- en y-assen in het raakvlak aan de bol. Daaraan vooraf is echter een rotatie in het AOB-vlak uitgevoerd om te zorgen dat de z-as loodrecht op de bol blijft staan. Bij de beschrijving van de beweging van een object dat zich loodrecht op de bol verplaatst, leidt deze rotatie tot een soortgelijke afbuiging. Het Coriolis-effect is dus niet beperkt tot 2 dimensies, maar speelt zich af in 3 dimensies. Bij waterbeweging over het oppervlak van de aarde speelt dit verticale effect echter een ondergeschikte rol.
- Als we de locaties A en B op het zuidelijk halfrond hadden gekozen, zou een soortgelijke redenering kunnen worden gegeven als de bovenstaande. Echter, in dat geval zou een afbuiging naar links zijn gevonden in plaats van naar rechts. Precies op de evenaar, de scheiding tussen het noordelijk en het zuidelijk halfrond, is dit effect nul. De grootte van de genoemde schijnkracht



Figuur 5.1: Translatie en rotatie van een assenstelsel dat is gefixeerd ten opzichte van het aardoppervlak en daardoor met de Aarde mee roteert.

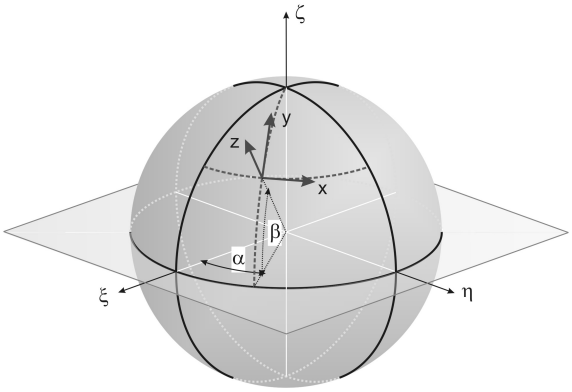
is maximaal aan de polen en neemt in de richting van de evenaar af tot nul.

- Ook in de atmosfeer speelt het Coriolis-effect een wezenlijke rol. Het verklaart waarom lagedruk gebieden (ook extreme, zoals tornado's) op het noordelijk halfrond een circulatie linksom vertonen en op het zuidelijk halfrond een circulatie rechtsom. Op het noordelijk halfrond buigt de stroming gericht naar het centrum van het lagedruk gebied naar rechts af, resulterend in een circulatie linksom rond dat centrum. Op het zuidelijk halfrond is dat precies andersom.

5.2.2 Fictieve krachten

Als referentie voor bijvoorbeeld waterloopkundige berekeningen gebruiken we gewoonlijk een assenstelsel dat aan de aarde vast zit. Bij de beschrijving, in deze paragraaf, van fictieve krachten houden we het eerder genoemde stelsel aan waarbij de x–as naar het oosten wijst, de y–as naar het noorden en de z–as omhoog. Voor de essentie van die beschrijving maakt dat niet uit. Voor schematiseren we de aarde tot een bol en ook dat maakt voor die essentie niet uit.

Zoals we in de vorige paragraaf hebben gezien, roteert dit assenstelsel omdat de



Figuur 5.2: Definitie van twee assenstelsels. De oorsprong van het $\xi\eta\zeta$-stelsel valt samen met het middelpunt van de aarde. De aarde (geschematiseerd als een bol) roteert om de ξ-as. Het xyz-stelsel beweegt met de aarde mee. De z-as van dit stelsel staat loodrecht op de bol en de y-as wijst naar het noorden.

aarde om z'n as draait. Om de y-as van dat stelsel steeds naar het noorden te laten wijzen en de z-as naar boven, moeten we dat hele stelsel doorlopend bijdraaien. Onze referentie beweegt dus. Daarom lijkt het alsof er op objecten waarvan we de positie (of veranderingen daarin) willen beschrijven, krachten worden uitgeoefend die er in werkelijkheid niet zijn. Het Coriolis effect is een voorbeeld daarvan. Een ander voorbeeld is het centrifugaal effect. Het gaat om fictieve krachten. Door de beweging van de referentie in beeld te brengen, gaan we de omvang van deze beide fictieve krachten kwantificeren. Voor berekeningen aan processen waarin deze krachten (vermoedelijk) een rol van betekenis spelen, is deze kwantificatie essentieel. Een illustratie daarvan is de slinger van Foucault (deze is beschreven in appendix K).

We beperken onze kwantificatie tot rotatie van de aarde om de eigen as. Andere planetaire effecten laten we buiten beschouwing. Deze rotatie beschrijven we ten opzichte van een assenstelsel met assen ξ, η en ζ. De oorsprong van dit stelsel valt samen met het middelpunt van de aarde. De noordpool ligt op het positieve deel van de ζ-as en het $\xi\eta$-vlak valt samen met het equatoriale vlak van de aarde. Dit assenstelsel is geschetst in figuur 5.2. Ook het xyz-stelsel dat aan de aarde vast zit, is aangegeven.

In deze figuur roteert de bol die de aarde voorstelt om de ζ-as. Het xyz-stelsel volgt deze rotatie. De bijbehorende hoeksnelheid ω is constant. We kunnen zodoende schrijven dat voor de hoek α in figuur 5.2 geldt dat $\alpha = \omega t$ (t is tijd). De hoek β verandert niet met de tijd. Deze hoek is de breedtegraad van de oorsprong van het xyz-stelsel. De positie van die oorsprong ten opzichte van het $\xi\eta\zeta$-stelsel geven we aan met de vector $\vec{r}$, gedefinieerd als

$$\vec{r} = R \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Hierin is R de straal van de bol (straal van de aarde).

Om de fictieve krachten die horen bij de rotatie van het xyz-stelsel te kwantificeren,

volgen we een bewegend object ten opzichte van beide assenstelsels. Versnellingen (=kracht per eenheid van massa) van dat object in het ene stelsel moeten gelijk zijn aan die in het andere. Uit deze gelijkheid leiden we de fictieve krachten af.

Ten opzichte van het meebewegende xyz-stelsel wordt de positie van het object gegeven door de vector $\vec{p}(t)$. Ten opzichte van het vaste stelsel $\xi\eta\zeta$ wordt die positie aangeduid met de vector $\vec{\mu}(t)$. De relatie tussen beide vectoren laat zich beschrijven met de lineaire transformatie

$$\vec{\mu} = \vec{r} + \mathbf{U}\vec{p} \quad ; \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha & -\sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

De matrix $\mathbf{U}$ verbeeldt de afbeelding van het xyz–stelsel op het $\xi\eta\zeta$–stelsel. Omdat α varieert met de tijd, doet $\mathbf{U}$ dat ook.

De relatie tussen versnellingen ten opzichte van beide assenstelsels krijgen we door de bovenstaande betrekking tussen $\vec{\mu}$ en $\vec{p}$ twee maal naar de tijd de differentiëren. Dit leidt tot

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{\mu}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{U}}{\mathrm{d}t^2}\vec{p} + 2\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{dt}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{U}\frac{\mathrm{d}^2\vec{p}}{\mathrm{d}t^2} \tag{5.3}$$

De versnelling $\mathrm{d}^2\vec{p}/\mathrm{d}t^2$ ten opzichte van het roterende assenstelsel volgt door herschrijven van 5.3 en vermenigvuldigen met $\mathbf{U}^{-1}$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{p}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{U}^{-1}\frac{\mathrm{d}^2\vec{\mu}}{\mathrm{d}t^2} - \left(\mathbf{U}^{-1}\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} + \mathbf{U}^{-1}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{U}}{\mathrm{d}t^2}\vec{p}\right) - 2\mathbf{U}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{5.4}$$

In het rechter lid van bovenstaande uitdrukking staan drie termen. De eerste term is de versnelling ten opzichte van het $\xi\eta\zeta$-stelsel afgebeeld op het roterende xyz-stelsel. De tweede term (die tussen haken) is de centrifugaalversnelling. Deze komt voor een deel voort uit de rotatie van het xyz-stelsel (de linker term tussen de haken) en voor een ander deel uit de beweging van het beschouwde object ten opzichte van dat stelsel (de rechter term tussen de haken). Voor de linker term kunnen we schrijven

$$-\mathbf{U}^{-1}\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 R\cos\beta\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\beta \\ -\cos\beta \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Hierin is $R\cos\beta$ de straal van de cirkel die de oorsprong van het xyz-stelsel tijdens de rotatie doorloopt, gelijk aan de afstand tussen die oorsprong en de as van de rotatie (de ζ-as). Dit deel van de centrifugaalversnelling staat loodrecht op die as en heeft daarom in het xyz–stelsel alleen componenten in de y-richting en in de z-richting (die in de x–richting is gelijk aan nul).

Een maat voor de grootte van dit deel van de centrifugaalversnelling is $\omega^2 R$. Met $R = 6378\mathrm{km}$ en $\omega = 0{,}7292\mathrm{x}10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$ volgt $\omega^2 R = 0{,}0339\mathrm{m/s}^2$. De component in z-richting is altijd omhoog gericht en werkt tegengesteld aan de gravitatieversnelling

(9,81m/s^2). In vrijwel alle waterbouwkundige toepassingen is deze z-component verwaarloosbaar ten opzichte van de altijd aanwezige gravitatieversnelling.

De y-component van dit deel van de centrifugaalversnelling is van dezelfde orde en gericht naar de evenaar. Bijvoorbeeld in oceanen leidt deze component tot een stroming naar de evenaar als gevolg waarvan de waterstand daar hoger wordt dan bij de polen. Dat leidt op tot een drukgradiënt in tegengestelde richting en die geeft aanleiding geeft tot een stroming van de evenaar naar de polen. In dieptegemiddelde zin heffen beide stromingen elkaar op.

Als het beschouwde object zich bevindt ter plaatse van de oorsprong van het meebewegende assenstelsel, geeft (5.5) de totale centrifugaalversnelling voor dat object. Echter, als het object zich elders bevindt, geldt niet langer dat $R\cos\beta$ de afstand is van het object tot de ζ-as en is een aanvulling nodig op (5.5). Dat is het andere deel van de centrifugaalversnelling. Het is te herleiden tot

$$-\mathbf{U}^{-1}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{U}}{\mathrm{d}t^2}\vec{p}=\omega^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sin^2\beta & -\sin\beta\cos\beta\\ 0 & -\sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta\end{pmatrix}\vec{p} \tag{5.6}$$

De orde van grootte van deze versnelling is $\omega^2|\vec{p}|$. In praktisch relevante vraagstukken is de lengte van de vector $\vec{p}$ meestal niet groter dan enkele honderden kilometers. Immers, naarmate $\vec{p}$ langer wordt en we dus op steeds grotere afstand komen van de oorsprong van het xyz-stelsel, wijkt het xy-vlak steeds verder af van het aardoppervlak.

Met $|\vec{p}|$ beperkt tot enkele honderden kilometers is $\omega^2|\vec{p}|$ een factor circa 10^4 kleiner dan $\omega^2 R$. Dat wil zeggen dat het $\vec{p}$-afhankelijke deel van de centrifugaalversnelling (gegeven door (5.6)) verwaarloosbaar is ten opzichte van het $\vec{p}$-onafhankelijke deel, gegeven in (5.5).

De derde term in het rechter lid van (5.4), tenslotte, is de Coriolis versnelling. Uitwerken van deze term geeft

$$-2\mathbf{U}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=2\omega\begin{pmatrix}0 & \sin\beta & -\cos\beta\\ -\sin\beta & 0 & 0\\ \cos\beta & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{5.7}$$

De grootte van de Coriolis versnelling is afhankelijk van de snelheid $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ van het beschouwde object. Een snelheid in het xy-vlak gaat gepaard met een versnelling in x-richting en een snelheid in x-richting leidt tot versnellingen in zowel de y- als de z-richting. Het Coriolis effect heeft dus een 3–dimensionaal karakter. In de meeste waterbouwkundige toepassingen volstaat het om te kijken naar de component van het effect in het xy-vlak. Verticale snelheden zijn vaak klein ten opzichte van de horizontale, waardoor de versnelling in x-richting ten gevolge van een snelheid in z-richting doorgaans verwaarloosbaar is ten opzichte van die veroorzaakt door een snelheid in y-richting. Daarnaast is de versnelling in z-richting, veroorzaakt door

een snelheid in x-richting, klein in vergelijking tot de zwaartekrachtversnelling. In de waterbouwkunde gaan we daarom gewoonlijk uit van de benadering

$$-2\mathbf{U}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\frac{d\vec{p}}{\mathrm{d}t} \approx 2\omega \begin{pmatrix} 0 & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{5.8}$$

wat erop neerkomt dat we het Coriolis effect alleen in het horizontale vlak in rekening brengen.

In de waterbouwkunde speelt bij stromingsberekeningen het Coriolis effect in het horizontale vlak vaak een rol van betekenis. Het centrifugaal effect blijft meestal buiten beschouwing. Dit effect wordt gedomineerd door het meedraaien van het xyz-assenstelsel met de aarde (uitdrukking (5.5)) en manifesteert zich als een kleine reductie op de versnelling van de zwaartekracht in combinatie met een stroming naar de evenaar die permanent wordt gecompenseerd door een drukgradiënt in tegengestelde richting. Met deze simplificaties wordt uitdrukking (5.4) voor de versnellingen in het xyz-stelsel

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{p}}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega \begin{pmatrix} 0 & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{U}^{-1}\frac{\mathrm{d}^2\vec{\mu}}{\mathrm{d}t^2} \tag{5.9}$$

Het rechter lid van bovenstaande uitdrukking staat voor de aandrijving (forcering) van de stroming, uitgedrukt als een versnelling. Effecten van rotatie van de aarde zijn hier niet in begrepen. Die zitten in de tweede term van het linker lid: de zogeheten Coriolis-term. Het product $2\omega\sin\beta$ wordt de Coriolis parameter genoemd, meestal aangeduid met het symbool f. Aan de evenaar is $f = 0$ (want daar is $\beta = 0$) en bij de polen is dat $f = 1,458 \times 10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$ (positief op het noordelijk halfrond en negatief op het zuidelijk halfrond, want β is positief naar het noorden).

5.2.3 Coriolis effect in stromingsberekeningen

In kwantitatieve beschouwingen over stromingen gaan we als regel uit van het meebewegende xyz assenstelsel. Ten opzichte van dat stelsel manifesteert het Coriolis effect zich als een externe forcering en zo wordt die dan ook opgenomen in de impulsbalans. In paragraaf 2.4 over de impulsbalans voor instationaire stroming, hebben we voor het 1–dimensionale geval, zonder rekening te houden met het Coriolis effect, gevonden dat

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} + u_x\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} - c_f\frac{u_x|u_x|}{h} \tag{5.10}$$

waarin u_x de stroomsnelheid in x-richting is (zie (2.52)). In geaggregeerde vorm, conform de tweede wet van Newton die aan de basis van de impulsbalans ligt (zie paragraaf 2.4), kunnen we dit schrijven als

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho V}F_x \tag{5.11}$$

waarin het rechter lid staat voor het totaal aan forceringen per eenheid van massa van de vloeistof (V staat voor volume). Dat rechter lid is te zien als de versnelling van een waterdeeltje die zich voordoet als gevolg van alle forceringen bij elkaar opgeteld. In termen van de 1–dimensionale impulsbalans (5.10) gaat het om de combinatie van advectie, een drukgradiënt en wrijving.

Voor de y-richting kunnen we een soortgelijke impulsbalans opstellen. Deze luidt[41]

$$\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho V} F_y \tag{5.12}$$

En vanwege de veronderstelling van hydrostatische druk is $\mathrm{d}u_z/\mathrm{d}t \approx 0$ (met u_z de verticale component van de stroomsnelheid).

Gecombineerd en geschreven in matrix-vorm levert dit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho V}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

Met F_x en F_y beperkt tot advectie, drukgradiënt en wrijving, is het Coriolis effect niet begrepen in deze balans. We kunnen dat toevoegen door de bovenstaande balans te vergelijken met (5.9). Daarin zijn

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}^2\vec{p}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

en voor de forceringen

$$\mathbf{U}^{-1}\frac{\mathrm{d}^2\vec{\mu}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{\rho V}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

Zodoende leidt inclusie van het Coriolis effect in de impulsbalans tot

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho V}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

[41] Hierbij moet worden opgemerkt dat als de stroming zowel in x als y-richting varieert, advectieve overdracht van impuls ook afhankelijk is van een wisselwerking tussen de stromingen in beide richtingen. Zonder bewijs vermelden we dat in dat geval

$$\frac{1}{\rho V}F_x = -u_x\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} - u_v\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y} - g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} - c_f\frac{u_x|u_x|}{h}$$
$$\frac{1}{\rho V}F_y = -u_x\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} - u_v\frac{\mathrm{d}u_v}{\mathrm{d}y} - g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}y} - c_f\frac{u_y|u_y|}{h}$$

ofwel, voor de twee horizontale richtingen x en y:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} + fu_y &= \frac{1}{\rho V} F_x \\ \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} - fu_x &= \frac{1}{\rho V} F_y \end{aligned} \tag{5.17}$$

In de literatuur is het gebruikelijk om de Coriolis termen fu_x en fu_y op te nemen in het linker lid van de impulsbalans, net als de advectieve termen. Voor een fysische interpretatie is het echter makkelijker om die termen te verhuizen naar het rechter lid, als in

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} &= -fu_y + \frac{1}{\rho V} F_x \\ \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} &= fu_x + \frac{1}{\rho V} F_y \end{aligned} \tag{5.18}$$

In deze vorm staat de versnelling in het linker lid staat en de som van alle krachten in het rechter lid. Als we kijken naar een object (waterdeeltje) dat zich op het noordelijk halfrond (waar $f > 0$) beweegt in een richting waarvan de oost-west-component in oostelijke richting is (dus $u_x > 0$, want x is positief in oostelijke richting), dan ondervindt dat object als gevolg van het Coriolis effect een negatieve versnelling in y-richting, ofwel een versnelling in zuidelijke richting. (want y is positief in noordelijke richting). Die oostelijke component van de snelheid leidt dus tot een afbuiging naar het zuiden. Dat is een afbuiging naar rechts.

Als we vervolgens kijken naar de noord-zuid component van de beweging van dat object, komen we tot een overeenkomstige conclusie. Als die component in noordelijke richting is ($u_y > 0$), resulteert het Coriolis effect in een versnelling in positieve x-richting en dus naar het oosten. Ook hierbij is sprake van een afbuiging naar rechts. Kortom, op het noordelijk halfrond leidt het Coriolis effect tot een afbuiging naar rechts (ten opzichte van de bewegingsrichting van het beschouwde object). Op het zuidelijk halfrond is dat precies omgekeerd. Daar is de afbuiging naar links omdat daar $f < 0$.

De laatste twee van de vier opmerkingen die aan het einde van paragraaf 5.2.1 over implicaties van het Coriolis effect zijn gemaakt, zijn direct te herleiden uit bovenstaande fysische interpretatie.

5.3 Astronomische getijden

5.3.1 Inleiding

Het getij is de periodieke variatie van de waterstand in de oceanen op aarde onder invloed van de gravitatie van zon en maan en de beweging van de aarde ten opzichte van deze twee objecten. In dat deel van de waterbouwkunde dat zich bezighoudt

met kust en zee speelt het getij een rol van betekenis. Het is vaak een dominante factor in de natuurlijke ontwikkeling van zandige kusten, estuaria en zeegaten. Het getij is ook een factor van betekenis in de veiligheid tegen overstromen. Een ander voorbeeld is de toegankelijkheid van zeehavens. Daar wordt de minimaal beschikbare waterdiepte bepaald door de laagste waterstand. In havens waar de bodem niet kunstmatig wordt verlaagd, kan dat ernstige beperkingen met zich mee brengen. In vrijwel alle grote havens wordt met regelmaat gebaggerd om een minimale vaardiepte te garanderen, maar er zijn tal van kleine havens te vinden die bij laagwater droogvallen, zoals die bij Ellewoutsdijk (figuur 5.3).

Het astronomische getij komt in essentie voort uit een onbalans van de versnellingen die horen bij gravitatie en het centrifugaaleffect. Als we kijken naar twee hemellichamen die met constante hoeksnelheid om een gezamenlijk massazwaartepunt roteren, is sprake van een globaal evenwicht van die versnellingen. Voor elk van de twee objecten geldt dat de versnelling die zich in het massazwaartepunt van het object voordoet als gevolg van gravitatie precies even groot is als de centrifugaalversnelling, maar tegengesteld gericht. In dat zwaartepunt is er geen netto versnelling. Buiten het zwaartepunt van een object zijn die twee versnellingen echter niet met elkaar in balans. Daar is sprake van een netto versnelling ongelijk aan nul. Als gevolg van die netto versnelling, vervormt het object. Langs de lijn die de zwaartepunten van de objecten met elkaar verbindt, worden de objecten uitgerekt en dwars daarop treedt contractie op.



Figuur 5.3: Voorbeeld van een getijhaven: twee opnames van de haven van Ellewoutsdijk, gelegen aan de noordelijke oever van de Westerschelde. De foto's zijn ongeveer 8 uur na elkaar gemaakt in zuidelijke richting, de bovenste 's morgens en de onderste 's avonds.

Deze vervorming gaat gepaard met interne spanningen die het effect van de netto versnelling uiteindelijk compenseren[42], waarbij de objecten een vorm aannemen die veel lijkt op een ellipsoïde. Op aarde is die vervorming vooral zichtbaar in de watermassa die een groot deel van deze planeet bedekt. Een waarnemer op een vaste plaats op aarde ziet steeds een ander deel van de ellipsoïde omdat de aarde daarbinnen om een eigen as roteert. Voor die waarnemer varieert de waterstand zodoende met de tijd en daarom ervaart deze het getij als een golf.

In de volgende zes paragrafen gaan we stapsgewijs nader in op het ontstaan van het getij zoals we dat op aarde kennen,

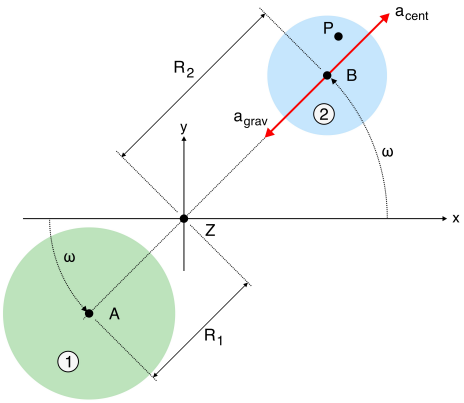
- te beginnen met een analyse van de rotatie van twee bolvormige objecten die elk in een cirkelvormige baan om een gezamenlijk massazwaartepunt roteren (paragraaf 5.3.2),
- wat we vervolgens toepassen op het aarde-maan systeem (paragraaf 5.3.3) en voortzetten naar het aarde-zon systeem, waarbij we ook de interactie tussen beide systemen belichten (de doodtij-springtij cyclus).
- Daarna kijken we naar variaties in het getij die afhankelijk zijn van de plaats op aarde (paragraaf 5.3.5) en afwijkingen ten opzichte van de aanvankelijk cirkelvorming veronderstelde banen van aarde en maan rond een gezamenlijk massazwaartepunt (paragraaf 5.3.6).
- Dit hoofdstuk over astronomische getijden wordt afgesloten met een indruk van het effect van continenten op de voortplanting van de getijgolf over het aardoppervlak (paragraaf 5.3.7) en een introductie in methoden waarmee waarnemingen aan het getij kunnen worden geanalyseerd om tot voorspelling van daaraan gerelateerde waterstanden te komen (paragraaf 5.3.8).

5.3.2 Principe van het getij

Om een beeld te krijgen van de krachten die het getij genereren, kijken we naar twee objecten (hemellichamen) ① en ② die in een plat vlak om een gezamenlijk massazwaartepunt roteren. In figuur 5.4 is dat schematisch weergegeven. Het gaat in deze figuur om een aanzicht loodrecht op het vlak waarin de beide objecten om elkaar roteren. Beide objecten zijn bolvormig en hun massa is homogeen verdeeld over hun volume. Middelpunt en massazwaartepunt vallen samen.

In dat vlak kiezen we een xyz-assenstelsel waarvan de oorsprong samenvalt met het gezamenlijke massazwaartepunt $\mathbf{Z}$. We veronderstellen dat de beide objecten in het xy-vlak een cirkelvormige baan rond $\mathbf{Z}$ doorlopen met een constante hoeksnelheid ω.

[42] Die compensatie is niet vanzelfsprekend. Het is mogelijk dat de netto versnelling zo groot wordt dat het object niet meer door de eigen zwaartekracht bij elkaar gehouden kan worden. Zodra zich dat voordoet, valt het object uit elkaar. Afhankelijk van de massa's van de beide objecten is er een kritieke onderlinge afstand waarbinnen het lichtste van de twee objecten uiteen valt en waarbuiten dat niet gebeurt. In de astrofysica staat dit bekend als de Rochelimiet. Mogelijk bevat de ring rond de planeet Saturnus de resten van een maan die ooit te dichtbij kwam, om maar wat te noemen.



Figuur 5.4: Schematische voorstelling van het systeem van twee bolvormige objecten ① en ② die roteren om een gezamenlijk massazwaartepunt **Z**. De hoeksnelheid ω waarmee de beide objecten rond Z roteren, is zodanig dat beide objecten een eigen afstand tot Z behouden. Voor object ① is dat R_1 en voor object ② is die afstand R_2.

De objecten ① en ② in de schematisatie staan model voor bijvoorbeeld het systeem maan en aarde of dat van zon en aarde. Deze schematisatie geeft inzicht in het principe van het getij. We gaan daar in deze paragraaf nader op in. In de volgende paragraaf passen we dit principe toe op het systeem van aarde en maan waarbij we in eerste instantie eenvoudigheidshalve uitgaan van een volledig met water bedekte aarde.

In het systeem van de twee roterende objecten ① en ② is sprake van een globaal evenwicht indien de versnellingen als gevolg van gravitatie en het centrifugaaleffect met elkaar in balans zijn. Daarbij is de centrifugaalversnelling die een object ondervindt, even groot als de versnelling van de onderlinge zwaartekracht, maar tegengesteld gericht. Als a_{cent} de grootte van de centrifugaalversnelling is en a_{grav} die van de versnelling van de zwaartekracht, dan geldt bij een evenwicht dat

$$a_{\text{grav}} = a_{\text{cent}} \tag{5.19}$$

Toepassing op object ② leidt tot

$$\gamma \frac{m_1}{(R_1 + R_2)^2} = \omega^2 R_2 \tag{5.20}$$

waarin γ de gravitatie constante is ($\gamma = 6,674 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2), m_1 de massa van object ① en R_1 en R_2 zijn de afstanden tussen de zwaartepunten **A** en **B** van achtereenvolgens objecten ① en ② tot **Z** (zie figuur 5.4).

Op dezelfde manier geldt voor object ① dat

$$\gamma \frac{m_2}{(R_1 + R_2)^2} = \omega^2 R_1 \tag{5.21}$$

(met m_2 de massa van object ②). Combinatie van beide uitdrukkingen laat zien dat in geval van evenwicht $m_1 R_1 = m_2 R_2$, wat betekent dat de verhouding van de afstanden R_1 en R_2 van de individuele zwaartepunten **A** en **B** tot het gezamenlijke

zwaartepunt **Z**, omgekeerd evenredig is met de verhouding van de beide massa's m_1 en m_2.

Vanuit dit globale evenwicht kijken we naar de versnelling die zich in een willekeurig punt **P** in of op object ② voordoet als gevolg van rotatie en gravitatie (zie figuur 5.4). De belangstelling gaat uit naar versnellingen die bijdragen aan de getijdewerking op object ②. Gravitatie van de als gevolg van de massa van ② zelf speelt daarin geen rol. Deze is steeds gericht naar het zwaartepunt B van dat object en we veronderstellen dat deze wordt gecompenseerd door een tegengesteld gerichte drukgradiënt. Dit komt erop neer dat we veronderstellen dat object ② niet implodeert door het eigen gewicht. Die naar **B** gerichte versnelling laten we daarom vooralsnog buiten beschouwen en we concentreren ons op gravitatie van object ① en rotatie van het systeem van beide objecten samen.

Voor het bepalen de centrifugaalversnelling in punt **P**, is het verleidelijk om te veronderstellen dat dit punt roteert om **Z**. Dat is echter niet juist. Als punt **P** om **Z** zou roteren, dan zou object ② tijdens één omwenteling om **Z** ook precies één keer moeten roteren om een lijn door het zwaartepunt **B** en loodrecht op het xy-vlak. Vooruit denkend aan een analogie met het aarde-maan systeem of het aarde-zon systeem is een rotatie van object ② rond een eigen as voor de hand liggend. De aarde draait immers ook om een eigen as. Die draaiing draagt echter niet bij aan de centrifugaalversnelling die in punt **P** optreedt als gevolg van de rotatie van het systeem ①-②.

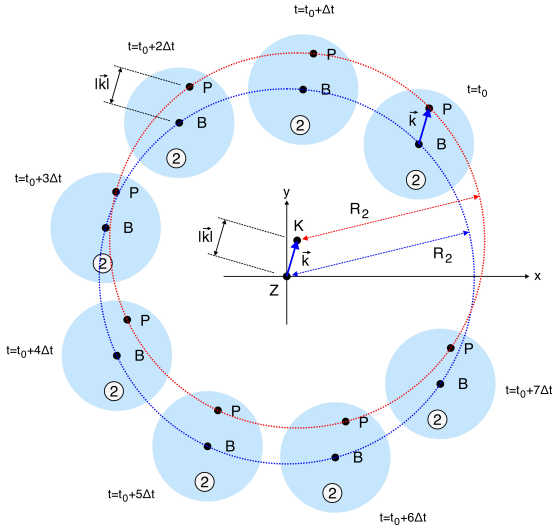
Kortom, voor de bepaling van de baan die punt **P** doorloopt tijdens een omwenteling van object ② rond **Z**, laten we een eventuele draaiing van object ② rond een eigen as buiten beschouwing. Dat wil zeggen dat de richting van de lijn die de punten **B** en **P** verbindt op elk moment van de omwenteling van object ② om **Z** dezelfde is. Dit is weergegeven in figuur 5.5 waarin de positie van object ② op acht momenten van een omwenteling rond **Z** is geschetst.

Deze figuur illustreert dat punt **P**, net als het zwaartepunt **B** van object ② een cirkelvormige baan doorloopt met straal R_2. Punt **K** is het middelpunt van de baan van **P**. Dit punt **K** ligt precies zo verschoven ten opzicht van **Z** als **P** ten opzichte van **B**. In de figuur is die verschuiving aangegeven met de vector $\vec{k}$.

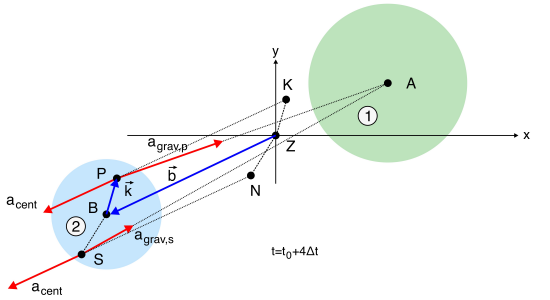
Deze redenering geldt onafhankelijk van waar precies punt (P) op object ② ligt. Kennelijk is de centrifugaalversnelling in elk punt van dat object identiek. Op elk moment van de omwenteling van object ② rond **Z** is de richting van deze versnelling overal gelijk aan de richting van de lijn door B en **Z** (dezelfde richting als die van de lijn door **K** en **P**). Bovendien is de grootte constant en gelijk aan $a_{\text{cent}} = \omega^2 R_2$.

De gravitationele versnelling, daarentegen, varieert tijdens de omwenteling van object ② rond **Z**. Deze versnelling is gericht van **P** naar het zwaartepunt **A** van object ① en de grootte is afhankelijk van de afstand tussen deze beide punten. Vanwege de rotatie van het systeem varieert die met de tijd.

Voor enig moment in de omwenteling van object ② rond **Z** zijn in figuur 5.6 de



Figuur 5.5: Acht momenten ($t = t_0 + n\Delta t$ met $n = 0 \ldots 7$) van een omwenteling van object ② rond het gezamenlijke zwaartepunt **Z**. Op elk van deze momenten is de positie van punt **P** ten opzichte van **B** gelijk. De baan van het zwaartepunt **B** van object ② is weergegeven met de blauwe cirkel. Die van punt **P** is in rood aangegeven. Beide cirkels hebben dezelfde straal R_2, maar hun middelpunten **Z** en **K** zijn ten opzichte van elkaar verschoven. Die verschuiving is aangegeven met vector $\vec{k}$.



Figuur 5.6: Als de objecten ① en ② roteren om hun gezamenlijke zwaartepunt **Z**, bestaat de netto versnelling in punt **P** op object ② uit een centrifugale component a_{cent} langs de lijn door **P** en **K** (evenwijdig aan **BZ**), en een gravitationele component $a_{\text{grav,p}}$ gericht naar het zwaartepunt **A** van object ①. Voor punt **S** zijn die componenten achtereenvolgens a_{cent} en $a_{\text{grav,s}}$. De centrifugale componenten zijn identiek, maar de gravitationele componenten niet.

beide versnellingen geschetst die zich in **P** voordoen. In diezelfde figuur zijn ook de versnellingen aangegeven die optreden in een ander punt **S** dat een cirkelvormige baan doorloopt rond punt **N**. De centrifugaalversnellingen in **P** en **S** zijn identiek qua grootte en richting. Dat is niet zo voor de gravitationele versnellingen. Die zijn voor beide punten gericht naar het massazwaartepunt **A** van object ①. Omdat op het moment $t = t_0 + 4\Delta t$ waar figuur 5.6 betrekking op heeft, punt **P** dichter bij **A** ligt dan punt **S**, is de gravitationele versnelling in **P** groter dan die in **S**. In de figuur is dat aangegeven met verschillen in lengte van de pijlen die versnellingen representeren.

Dit illustreert dat het globale evenwicht, gekenmerkt door $a_{\text{grav}} = a_{\text{cent}}$ (zie uitdrukking (5.19)) dat opgaat voor het zwaartepunt **B** van object ②, niet vanzelfsprekend ook geldt voor elk punt binnen dat object of aan het oppervlak daarvan.

Als we ons op basis van figuur 5.6 een voorstelling maken van de netto versnellingen in de punten **P** en **S**, dan lijkt het erop dat object ② door ruimtelijke variatie van die netto versnelling, in zowel grootte als richting, langs de lijn door **A** en **B** wordt uitgerekt en dwars daarop wordt samengetrokken.

Hoewel dat niet direct blijkt uit figuur 5.6, is die samentrekking niet beperkt tot het xy–vlak. Bedenk hierbij dat object ② in deze figuur het aanzicht is van een bol. Als punt **P** niet in het xy–vlak ligt, is de versnelling a_{cent} wel evenwijdig aan dit vlak maar $a_{\text{grav,p}}$ niet, want die is gericht naar het massazwaartepunt **A** van object ① dat wel in het xy–vlak ligt. De uitrekking en samentrekking spelen zich dus af in drie dimensies.

De netto versnelling $\vec{a}_{\text{netto,p}}$ in punt **P** wordt gegeven door

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\text{netto,p}} &= \vec{a}_{\text{cent}} + \vec{a}_{\text{grav,p}} \\ &= \omega^2 R_2 \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} - \gamma \frac{m_1}{|\hat{r}\vec{b}+\vec{k}|^2} \frac{\hat{r}\vec{b}+\vec{k}}{|\hat{r}\vec{b}+\vec{k}|} \quad ; \quad \hat{r} = \frac{R_1+R_2}{R_2}\end{aligned} \tag{5.22}$$

waarin $\vec{b}$ de plaatsvector van punt **B** is (van **Z** naar **B**), zodat $-(\hat{r}\vec{b}+\vec{k})$ vanuit punt **P** wijst naar het massazwaartepunt **A** van object ①. Dat is de richting van de versnelling van de zwaartekracht in **P** als gevolg van de massa m_1 van object ①. Voorts is $|\vec{b}+\vec{k}|$ de afstand tussen beide punten

Omdat het systeem van de twee objecten roteert, varieert de vector $\vec{b}$ met de tijd. Als **B** zich op tijdstip $t = 0$ op de x-as zou bevinden (in het punt $(R_2, 0, 0)$), dan is

$$\vec{b} = R_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

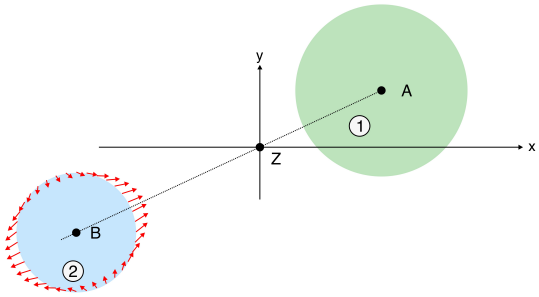
Vanwege deze afhankelijkheid van $\vec{b}$ van de tijd, varieert ook $\vec{a}_{\text{grav,p}}$ met de tijd en dat geldt dan ook voor de netto versnelling $\vec{a}_{\text{netto,p}}$.

Voor de vector $\vec{k}$ (van **B** naar **P**), die niet verandert met de tijd, kunnen we schrijven dat

$$\vec{k} = \alpha r \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

waarin r de straal is van het bolvormig object ②. Daarnaast is θ de hoek tussen een lijn door **B** en **P** en het xy-vlak en ϕ is de hoek die de projectie van deze lijn op het xy-vlak maakt met de x-as. Voor $\alpha = 0$ valt **P** samen met **B** en voor $\alpha = 1$ ligt P op het oppervlak van object ②.

Met het stelsel (5.22)- (5.24) kunnen voor elk punt **P** in $(0 \leq \alpha < 1)$, op $(\alpha = 1)$ of buiten $(\alpha > 1)$ object ② de netto versnelling bepalen. Als we dat doen voor punten **P** die we kiezen langs de omtrek van object ② in het xy-vlak (dus voor $\alpha = 1$, $\theta = 0$ en $\phi \in [0; 2\pi]$), dan vinden we het beeld dat is geschetst in figuur



Figuur 5.7: Netto versnellingen (weergegeven met de rode pijlen) die zich langs de omtrek van object ② voordoen als de objecten ① en ② roteren rond hun gemeenschappelijke zwaartepunt **Z**.

5.7. De rode pijlen langs de omtrek van ② in deze figuur geven de lokale richting van de netto versnelling aan. De lengte van de pijlen is een maat voor de grootte van die versnelling.

Het verloop van de versnelling langs de omtrek van object ② is consistent met het eerder genoemde vermoeden dat dit object door de combinatie van gravitationele en centrifugale versnellingen langs de verbindingslijn van **A** en **B** wordt uitgerekt en dwars daarop wordt samengetrokken.

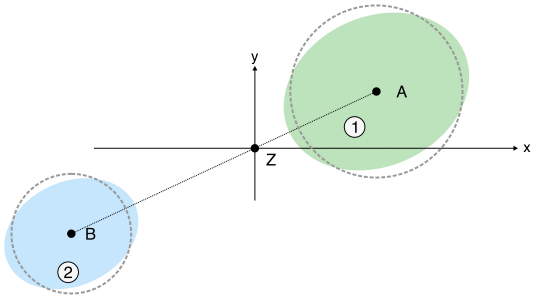
Dit effect van uitrekken en samentrekken leidt ertoe dat object ② vervormt van de bol (die we aanvankelijk hebben aangenomen) tot een soort ellipsoïde[43]. En dit effect is wederzijds. Object ① ondergaat als gevolg van de combinatie van rotatie rond **Z** en de zwaartekracht van object ② een soortgelijke vervorming. Het resultaat van dit wederzijdse genoegen is geschetst in figuur 5.8[44].

5.3.3 Evenwichtsgetij

Om een beeld te krijgen van de omvang van de krachten die het getij op aarde genereren, kijken we eerst naar het aarde-maan systeem. Ter wille van de eenvoud laten we de zon in eerste instantie buiten beschouwing. Bovendien stellen we ons

[43] De wiskunde kent een specifieke definitie van een ellipsoïde. De vorm die object ② onder invloed van de beschreven versnellingen aanneemt, lijkt daar sterk op, maar is geen ellipsoïde in de strikte wiskundige definitie. Dat heeft te maken met asymmetrie van de versnellingen ten opzichte van een vlak door **B** en loodrecht op de verbindingslijn van **A** en **B**. Ook de samenstelling van object ② speelt een rol, bijvoorbeeld waar het gaat om de ruimtelijke variabiliteit van de elasticiteitsmodulus (de verhouding tussen spanning en deformatie). Voor de beschrijving van het concept van het evenwichtsgetij zijn zulke effecten relatief onbelangrijk en blijven daarom in dit boek buiten beschouwing

[44] In het model dat we hebben gebruikt om het principe van de getijdenwerking in beeld te brengen, zijn we uitgegaan van objecten ① en ② die niet ook om een eigen as roteren. Bij het aarde-maan systeem is dat wel zo en bij vele andere duo's van hemellichamen ook. Als de periode van zo'n rotatie rond een eigen as afwijkt van de periode van de omwenteling rond een gezamenlijk massazwaartepunt, ervaren de betrokken objecten de uitrekking en samentrekking steeds in een andere richting (laat in gedachten object ② in figuur 5.7 roteren rond **B** om hier een beeld van te vormen). Objecten worden hierdoor continu gekneed. Door interne wrijving gaat dit gepaard met dissipatie van energie. Tegelijkertijd blijft het impulsmoment van het totale systeem behouden. Het gezamenlijke effect is dat de hoeksnelheid van de rotatie om de eigen as afneemt en dat de onderlinge afstand van de objecten toeneemt. Op aarde zien we dat bijvoorbeeld terug in een relatief trage maar persistente toename van de duur van een dag.



Figuur 5.8: Deformatie van de objecten ① en ② als gevolg van de versnellingen die zich voordoen als beide objecten roteren rond hun gemeenschappelijke zwaartepunt **Z**.

de aarde voor als een bol die geheel bedekt is met een laag water, ook al is dat in werkelijkheid voor slechts circa 2/3 deel het geval. Het middelpunt van de bol valt samen met het massazwaartepunt. Het theoretische beeld dat we met deze schematisatie van het getij krijgen, wordt het evenwichtsgetij genoemd. Ook de rotatie van de aarde rond haar eigen as blijft nog even buiten beschouwing (in paragraaf 5.3.4 nemen we die rotatie wel mee).

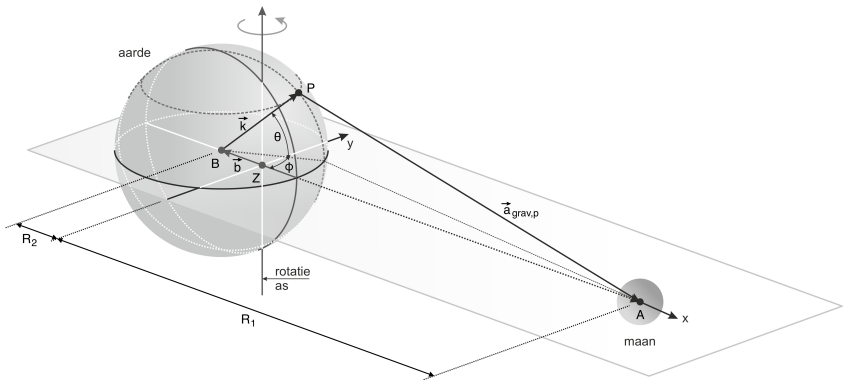
Voor deze geschematiseerde voorstelling beschrijven we de rotatie van het aarde–maan systeem en de versnellingen die zich in een willekeurig punt **P** op aarde voordoen als gevolg van gravitatie van aarde en maan en door de rotatie van beide objecten rond hun gezamenlijke zwaartepunt. Als referentie gebruiken we een assenstelsel waarvan de oorsprong samenvalt met dat gezamenlijke zwaartepunt. Het massazwaartepunt van de aarde ligt op het negatieve deel van de x–as en dat van de maan op het positieve deel. Beide objecten roteren in het xy–vlak rond een lijn die samenvalt met de z–as. Dit is geschetst in figuur 5.9. Deze figuur heeft betrekking op een moment waarop de zwaartepunten van aarde en maan (achtereenvolgens **B** en **A**) zich ergens op de x-as bevinden. Voor de berekening van de netto versnelling in punt **P** maakt dat niet uit omdat de positie van dat punt in de berekening open wordt gelaten. Dat wil zeggen dat de hoeken ϕ en θ (zie figuur 5.9 en uitdrukking (5.24)) niet worden gespecificeerd.

Onze belangstelling gaat uit naar versnellingen die bijdragen aan de getijdewerking op aarde. Gravitatie van de aarde zelf speelt daarin geen rol. Deze is steeds gericht naar het zwaartepunt van de aarde en wordt gecompenseerd door een verticale drukgradiënt. De bijbehorende versnelling laten we daarom voorts buiten beschouwing en we concentreren ons op gravitatie van de maan en rotatie van het aarde–maan systeem.

De situatieschets in figuur 5.9 is in die zin representatief voor het aarde-maan systeem dat de aarde veel groter is dan de maan en dat hun gezamenlijke zwaartepunt **Z** binnen de aarde ligt.

De netto versnelling die zich voordoet in een punt **P** ergens op het oppervlak van de aarde, wordt gegeven door

$$\vec{a}_{\text{netto,p}} = \omega^2 R_2 \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} - \gamma \frac{m_{\text{maan}}}{|\hat{r}\vec{b} + \vec{k}|^2} \frac{\hat{r}\vec{b} + \vec{k}}{|\hat{r}\vec{b} + \vec{k}|} \tag{5.25}$$



Figuur 5.9: Schematische voorstelling van het aarde-maan systeem. Het bijbehorende bovenaanzicht is vergelijkbaar met de schets in figuur 5.6 (zonder punt S).

(zie uitdrukking (5.22)), met $\vec{b}$ volgens (5.23), $\vec{k}$ volgens (5.24) met $\alpha r = r_a$ de straal van de aarde en $\omega t = (2n+1)\pi$; $n \in \mathbb{Z}$ omdat $\mathbf{B}$ op de negatieve x-as ligt, op $x = -R_2$).

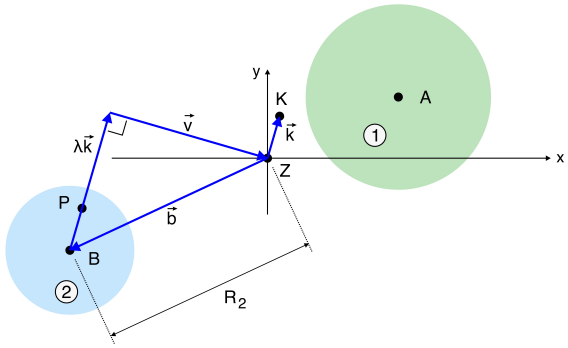
Deze netto versnelling $\vec{a}_{\text{netto,p}}$ is te ontbinden in een radiale component (loodrecht op het aardoppervlak, in het verlengde van $\vec{k}$) en een tangentiële component (die raakt aan het aardoppervlak). Die radiale component heeft dezelfde werklijn als de versnelling van de zwaartekracht van de aarde zelf. Zolang de som van de versnelling van de zwaartekracht en die radiale component gericht is naar het zwaartepunt van de aarde, wordt die som gecompenseerd door een verticale drukgradiënt[45].

De tangentiële componenten van de versnellingen die zich verspreid over het aardoppervlak voordoen, genereren stromingen in de richting van de punten waar de x-as (in figuur 5.9) de aardbol snijdt (zie figuren 5.7 en 5.8). Dat leidt tot opstuwing rond die twee snijpunten en op die manier krijgt het wateroppervlak op aarde de ellipsoïde-achtige vorm die in de voorgaande paragraaf is genoemd (bedenk dat we hebben verondersteld dat de aarde geheel bedekt is met water).

Door die opstuwing onstaat langs het aardoppervlak een verhang dat tegen de richting van de tangentiële versnellingen in werkt. Uiteindelijk ontstaat een evenwicht waarbij de ellipsoïde niet verder uitrekt langs de x-as (in figuur 5.9) en dwars daarop niet verder samentrekt.

Om een indruk te krijgen van de grootte van de tangentiële versnellingen, ontbinden we $\vec{a}_{\text{netto,p}}$ in een radiale component en een tangentiële component. Uit

[45] Als die som van versnellingen van het zwaartepunt van de aarde af zou zijn gericht, zou het water op aarde de ruimte in verdwijnen. Dit lijkt op overschrijding van de Rochelimiet, genoemd in voetnoot 42. Omdat de aarde zwaarder is dan de maan, zal dat zich bij de aarde echter niet voordoen



Figuur 5.10: Ontbinding van de vector $\vec{b}$ in een component $\lambda\vec{k}$ loodrecht op het oppervlak van object ② en een component $\vec{v}$ die evenwijdig is aan het raakvlak aan dat oppervlak in punt **P**.

die laatste component leiden we een orde van grootte af van het verhang. Bij de ontbinding schematiseren we de aarde tot een bol. Met de wetenschap dat de getijdenwerking de aarde deformeert tot een soort ellipsoïde, is die schematisatie niet in overeenstemming met de werkelijkheid. We nemen echter aan dat de deformatie beperkt is zodat we in eerste benadering kunnen uitgaan van een bol. Achteraf moet dit worden gecontroleerd.

De radiale component heeft dezelfde richting als $\pm\vec{k}$. Als we de richting van de tangentiële component aanduiden met $\vec{v}$, dan komt de ontbinding erop neer dat we $\vec{a}_{\text{netto,p}}$ willen schrijven als een gewogen som van $\vec{k}$ en $\vec{v}$. En omdat $\vec{k}$ en $\vec{v}$ loodrecht op elkaar staan, moet gelden dat

$$\vec{k} \cdot \vec{v} = 0 \tag{5.26}$$

Door herschikking van termen in de uitdrukking (5.22) voor $\vec{a}_{\text{netto,p}}$, volgt dat

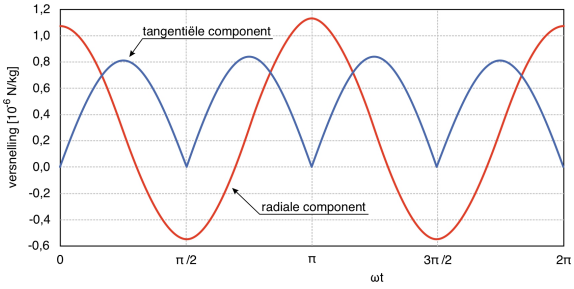
$$\vec{a}_{\text{netto,p}} = \left(\frac{\omega^2 R_2}{|\vec{b}|} - \gamma \frac{m_{\text{maan}}}{|\hat{r}\vec{b} + \vec{k}|^3} \hat{r} \right) \vec{b} + \left(-\gamma \frac{m_{\text{maan}}}{|\hat{r}\vec{b} + \vec{k}|^3} \right) \vec{k} = \beta\vec{b} + \kappa\vec{k} \tag{5.27}$$

waarin β en κ slechts zijn bedoeld als verkorte schrijfwijze van de termen tussen haken in het middelste deel van bovenstaande uitdrukking.

De beoogde ontbinding van de versnelling $\vec{a}_{\text{netto,p}}$ in een radiale en tangentiële component, komt erop neer dat we deze vector willen schrijven als een lineaire combinatie van $\vec{k}$ en $\vec{v}$. Dat doen we door eerst $\vec{b}$ als zo'n combinatie te schrijven om vervolgens het resultaat daarvan in te vullen in (5.27).

Vooralsnog hebben we over $\vec{v}$ alleen gesteld dat deze loodrecht moet staan op $\vec{k}$. De grootte van $\vec{v}$ is nog niet bepaald. Van $\vec{k}$ daarentegen, ligt zowel de grootte als de richting vast. We kunnen $\vec{b}$ dus schrijven als de som van $\vec{v}$ en een veelvoud van $\vec{k}$ (zie figuur 5.10):

$$\vec{b} + \lambda\vec{k} + \vec{v} = \vec{0} \tag{5.28}$$



Figuur 5.11: Verloop van de tangentiële en radiale versnellingen in een punt **P** aan het oppervlak van de aarde en in het baanvak van de maan (dat komt overeen met $\theta = \phi = 0$ in figuur 5.9) tijdens een volledige omloop van het aarde–maan systeem. Van de tangentiële component is alleen het verloop van de grootte aangegeven. Bij de radiale component is positief van het middelpunt van de aarde af en negatief ernaar toe.

Combinatie van deze ontbinding van $\vec{b}$ met (5.26) geeft

$$\vec{k}\cdot\vec{b}+\lambda\vec{k}\cdot\vec{k}+\vec{k}\cdot\vec{v} = \vec{k}\cdot\vec{b}+\lambda\vec{k}\cdot\vec{k} \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{\vec{k}\cdot\vec{b}}{|\vec{k}|^2} = -\frac{R_2}{r_a}\cos(\theta)\cos(\omega t-\phi) \quad (5.29)$$

en dus is

$$\begin{aligned} \vec{b} &= -\lambda\vec{k} - \vec{v} \\ &= \underbrace{-\lambda\vec{k}}_{\text{radiaal}} \underbrace{+(\vec{b}+\lambda\vec{k})}_{\text{tangentieel}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Combinatie van dit resultaat met (5.27) geeft

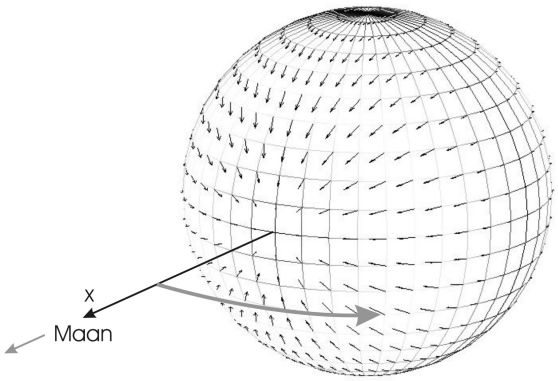
$$\vec{a}_{\text{netto,p}} = \underbrace{(\kappa-\lambda\beta)\vec{k}}_{\text{radiaal}} + \underbrace{\beta(\vec{b}+\lambda\vec{k})}_{\text{tangentieel}} \quad (5.31)$$

In figuur 5.11 is het verloop aangegeven van de beide componenten van $\vec{a}_{\text{netto,p}}$ voor een **P** aan het oppervlak van de aarde en in het baanvak van de maan (dat komt overeen met $\theta = \phi = 0$ in figuur 5.9). Bedenk bij de interpretatie van deze figuur dat we de rotatie van de aarde om een eigen as nog niet in de beschouwing van het evenwichtsgetij hebben betrokken. We volgen dus een punt **P** tijdens een omwenteling van het aarde–maan systeem zoals geschetst in figuur 5.5.

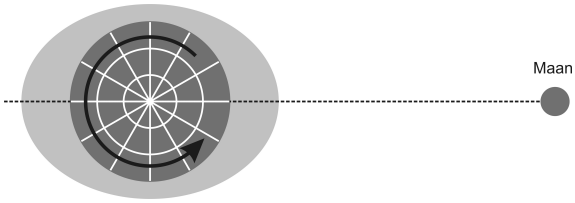
De maximale radiale versnelling doet zich voor als **P** zich samenvalt met het snijpunt van de positieve x-as en het oppervlak van de aarde (in figuur 5.9). In dat geval is

$$\omega t = \pi \quad ; \quad \vec{b} = R_2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{k} = r_a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Gecombineerd met $\gamma = 6,674\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2, $R_1 = 380060$ km, $R_2 = 4676$ km, $r_a = 6378$ km en $m = 7,35\times10^{22}$kg volgt dat de maximale radiale versnelling



Figuur 5.12: Tangentiële componenten van de versnelling ten gevolge van gravitatie van de maan en rotatie van het aarde–maan systeem.



Figuur 5.13: Een waarnemer op een vaste plaats op aarde doorloopt de volledige ellipsoïde van het evenwichtsgetij.

$1,127 \times 10^{-6}$ m/s^2 bedraagt. Dat is ongeveer $1,15 \times 10^{-7}$ maal zo groot als de versnelling van de zwaartekracht van de aarde zelf (aan het oppervlak). Hieruit volgt dat overal op aarde de verticale component van de versnelling als gevolg van gravitatie van de maan en rotatie van het aarde–maan systeem verwaarloosbaar is ten opzichte van de zwaartekrachtversnelling van de aarde zelf. Deze component speelt zodoende geen rol van betekenis bij het genereren van getij.

De tangentiële component van de versnelling $\vec{a}_{\text{netto,p}}$ doet dat daarentegen wel. Deze genereert een stroming die convergeert naar de twee punten waar de x–as (in figuur 5.9)) het oppervlak van de bolvormig veronderstelde aarde snijdt. Een kant daarvan is weergegeven in figuur 5.12 waarin de verdeling van richtingen van de tangentiële component is geschetst voor de kant van de aarde die uitzicht heeft op de maan.

Door de resulterende opstuwing ontstaat een compenserend verhang. Als we veronderstellen dat dit verhang op elk moment en op elke plaats evenwicht maakt met de tangentiële versnelling, neemt de schil van water waarmee we de aarde in onze schematische voorstelling bedekt denken, de vorm van een ellipsoïde aan. De lange as van deze ellipsoïde valt samen met de lijn door de zwaartepunten van aarde en maan. Binnen deze ellipsoïde draait de aarde om haar eigen as. De hoekfrequentie van deze rotatie is groter dan die van de rotatie van het aarde–maan systeem. Het gevolg is dat een waarnemer op een vaste plaats op aarde een periodiek variërende waterstand ervaart (zie figuur 5.13. Dit is het zogeheten evenwichtsgetij.

Het werkelijke getij is gecompliceerder dan het evenwichtsgetij. De aarde is niet

rondom bedekt met water en de banen van aarde en maan rond hun gezamenlijke massazwaartepunt is niet zuiver cirkelvorming. En zo zijn er meer complicerende factoren. In de volgende paragrafen gaan we op enkele daarvan in. De basis is echter een periodieke beweging. Het getij, inclusief die complicerende factoren, wordt beschreven in termen van een lineaire combinatie van harmonische (sinusvormige) componenten. De variatie van de waterstand ζ met de tijd schrijven we als

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \sum_k a_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \tag{5.33}$$

waarin ζ_0 de getij–gemiddelde waterstand is. De amplitudes a_k en fases ϕ_k kunnen van plaats tot plaats verschillen, maar de hoekfrequenties ω_k doen zich overal op aarde voor.

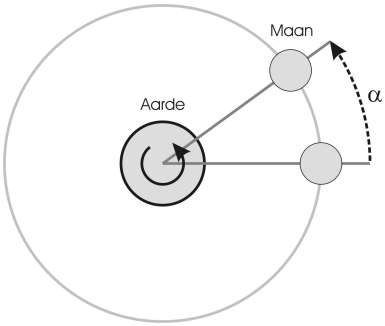
5.3.4 Primaire harmonische componenten

Bij de bepaling van het evenwichtsgetij hebben we verondersteld dat de aarde volledig omgeven is door een schil van water en dat dit water instantaan reageert op variaties met de tijd van de krachten die de getijbeweging veroorzaken. Bovendien hebben we ons beperkt tot de krachten die gerelateerd zijn aan het aarde–maan systeem en aangenomen dat de beide objecten in dit systeem met constante snelheid een cirkelvormige baan rond hun gezamenlijke massazwaartepunt doorlopen. Met deze simplificaties kunnen we het principe van het getij doorgronden. We kunnen ermee uitleggen waarom het vrijwel overal op aarde bijna tweemaal per dag hoogwater is en ook bijna tweemaal laagwater. Ook kunnen we er het principe van de doodtij–springtij cyclus mee uitleggen. Deze beide verschijnselen komen in het navolgende aan bod.

Binnen de ellipsoïde van het evenwichtsgetij draait de aarde rond haar eigen as. Gedurende één volledige omwenteling passeert een waarnemer op een vaste locatie op aarde twee maal hoogwater: één keer aan de zijde van de aarde die naar de maan is toegekeerd en eenmaal aan de andere zijde (zie figuur 5.13). Tussendoor komt de waarnemer dus ook tweemaal laagwater tegen. Het door de maan gegenereerde getij heeft daarmee een zogeheten dubbeldaags karakter. Dit wordt de M_2 component van het getij genoemd (de M verwijst naar de maan en de index 2 naar dubbeldaags). De periode van deze M_2 component is niet precies gelijk aan 12 uur. Immers, in de tijd die de aarde nodig heeft om één volledige omwenteling te maken, is het aarde–maan systeem ook een stukje geroteerd rond hun gezamenlijke zwaartepunt. Dit is in figuur 5.14 aangegeven met de hoek α.

In de tijd dat het aarde–maan systeem over deze hoek α is gedraaid, is de aarde over een hoek $2\pi + \alpha$ om haar eigen as geroteerd. Deze tijd is gelijk aan twee maal de periode van de M_2 component van het getij. Als ω_{SD} de hoekfrequentie is van de rotatie van de aarde om haar eigen as en ω_{SM} de hoekfrequentie van de draaiing van het aarde–maan systeem, dan geldt voor de periode T van de M_2 component van het getij dat

$$2T\omega_{SD} = \alpha + 2\pi = 2T\omega_{SM} + 2\pi \tag{5.34}$$



Figuur 5.14: Schematische voorstelling van het aarde–maan systeem (zicht op het noordelijk halfrond van de aarde). In de twee getoonde standen van de maan staat deze satelliet twee achtereenvolgende keren boven dezelfde aardse meridiaan.

zodat

$$\omega_{M_2} = \frac{2\pi}{T} = 2\left(\omega_{SD} - \omega_{SM}\right) \tag{5.35}$$

Op dezelfde manier zoals we dat in de voorgaande paragraaf hebben gedaan, kunnen we ook een evenwichtsgetij afleiden voor het roterende systeem van zon en aarde. Ook hierbij hoort een dubbeldaagse component en deze wordt aangeduid met S_2. De bijbehorende hoekfrequentie ω_{S_2} wordt gegeven door

$$\omega_{S_2} = 2\left(\omega_{SD} - \omega_{S_2}\right) \tag{5.36}$$

waarin ω_{S_2} de hoekfrequentie is van de rotatie van de aarde rond de zon.

M_2 en S_2 zijn de primaire dubbeldaagse getijcomponenten. In de vorige paragraaf hebben we gekeken naar het aan de maan gerelateerde evenwichtsgetij en becijferd dat de orde van grootte van de totale versnelling die een waterdeeltje aan het oppervlak van de aarde ondervindt gelijk is aan $1,127 \times 10^{-6}$ m/s^2. Als we die exercitie herhalen voor het aan de zon gerelateerde evenwichtsgetij moeten we voor m de massa van de zon kiezen ($1,989 \times 10^{30}$ kg) en voor $z_m - z_a$ de afstand tussen de zwaartepunten van zon en aarde (gemiddeld $149,6 \times 10^6$ km). Daaruit volgt een maximale versnelling van $5,07 \times 10^{-7}$ m/s^2. Dat is ongeveer half zo groot als het effect van de maan. Hoewel de maan aanzienlijk kleiner en minder zwaar is dan de zon sorteert deze toch een groter effect omdat de afstand tot de aarde veel kleiner is.

Om de hoekfrequenties ω_{M_2} en ω_{S_2} van de primaire dubbeldaagse componenten te berekenen, hebben we de hoekfrequenties nodig van de rotatie van het aarde–maan systeem (ω_{SM}), die van het aarde–zon systeem (ω_{SJ}) en die van de rotatie van de aarde om haar eigen as (ω_{SD}). De periodes van deze rotaties zijn gegeven in tabel 5.1.

Met de gegevens in tabel 5.1 vinden we dat $\omega_{SJ} = 0,0411°$/uur, $\omega_{SD} = 15,0411°$/uur en $\omega_{SM} = 0,5490°$/uur. De hoekfrequenties van de primaire componenten M_2 en S_2 komen hiermee op achtereenvolgens $14,4921°$/uur en $15,0000°$/uur. De bijbehorende periodes zijn 12 uur, 25 minuten en 14 seconden voor M_2 en precies 12 uur voor S_2.

	dagen	uren	minuten	seconden
jaar	365	6	9	9,8
maand	27	7	43	11,6
dag	0	23	56	4,1

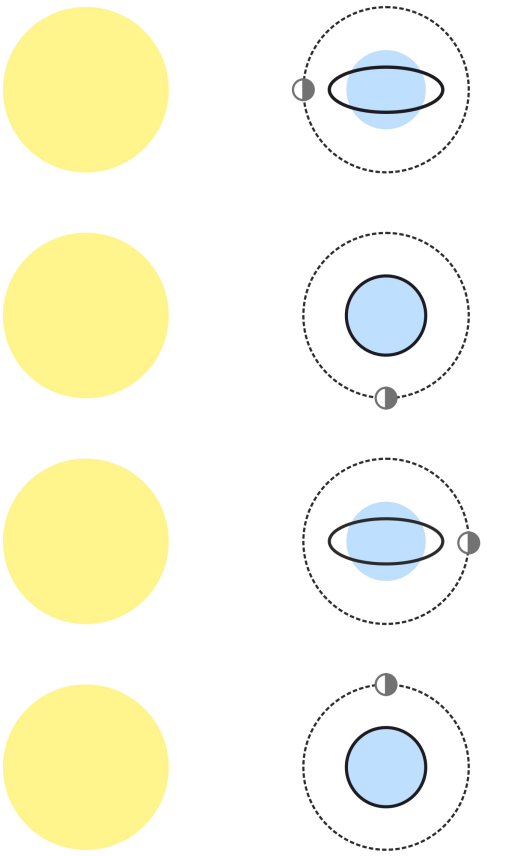
Tabel 5.1: periodes van het siderische jaar, de siderische maand en dag.

De periodes in tabel 5.1 zijn zogeheten siderische maten (vandaar de toevoeging 'S' in het subscript van de hoekfrequentie). Dat wil zeggen: ten opzichte van de sterren. Deze periodes zijn nagenoeg identiek aan de tijd die nodig is om een volledige omwenteling van 360° te maken. Naast siderische periodes kennen we ook synodische. Daarbij gaat het om de tijd die nodig is om dezelfde positie ten opzichte van de zon in te nemen. Een waarnemer op een vaste positie op aarde die op enig moment de zon recht boven zich heeft, zal dat niet opnieuw hebben nadat de aarde precies één omwenteling om haar eigen as heeft voltooid. In die siderische dag zal deze planeet namelijk ook een stukje zijn opgeschoten in haar baan rond de zon. Omdat de aarde in dezelfde richting om haar as roteert als om de zon, zal de aarde nog iets door moeten draaien om de waarnemer weer precies onder de zon te brengen. Daar is 3 minuten en 55,9 seconden voor nodig. Zodoende verstrijkt 24 uur tussen twee opeenvolgende keren dat de waarnemer de zon precies boven zich heeft en dat noemen we een synodische dag (met een duur van exact 24 uur). Op overeenkomstige manier is een synodische maand gelijk aan de duur tussen twee opeenvolgende volle of nieuwe manen (29,5306 dagen van 24 uur).

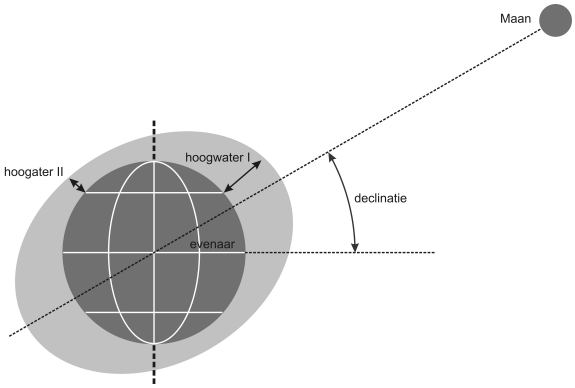
Interactie tussen de componenten M_2 en S_2 is verantwoordelijk voor de doodtij–springtij cyclus. De hoekfrequentie van deze cyclus bedraagt $2(\omega_{SM} - \omega_{SJ})$. De bijbehorende periode is gelijk aan een halve synodische maand (14,7653 dagen van 24 uur). Wanneer zon, maan en aarde in één lijn staan, versterken de getij–opwekkende invloeden van de maan en de zon elkaar. Per omwenteling van het aarde–maan systeem komt dat twee maal voor: tijdens nieuwe maan en tijdens volle maan. We spreken dan van springtij (zie figuur 5.15). Echter, wanneer de maan 90° uit fase is, verzwakken de effecten van zon en maan elkaar. Ook dat komt twee keer voor per omwenteling van het aarde–maan systeem: tijdens eerste en laatste kwartier.

5.3.5 Dagelijkse ongelijkheid

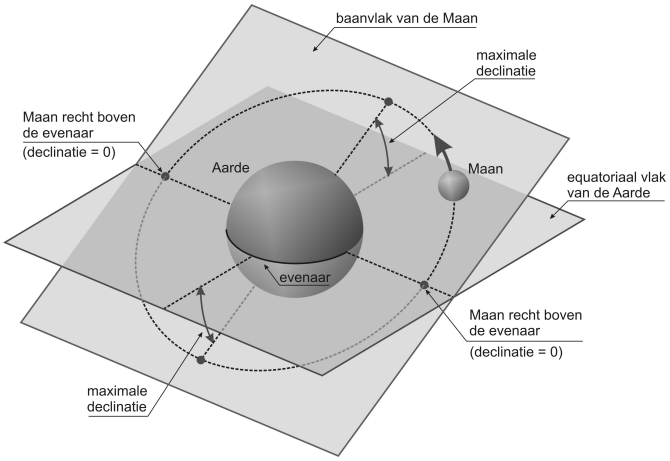
Omdat het baanvlak van de maan (dat is het vlak waarin aarde en maan om elkaar draaien) niet samenvalt met het equatoriale vlak van de aarde, kunnen opeenvolgende hoogwaters (behorend bij de aan de maan gerelateerde M_2 component) verschillend van omvang zijn. Dit verschijnsel wordt de dagelijkse ongelijkheid genoemd. Tijdens de rotatie van de aarde om haar eigen as volgt een waarnemer op een vaste positie een pad waarbij de afstand tot het baanvlak van de maan varieert. Waar deze afstand een minimum of een maximum bereikt, is het voor de waarnemer hoogwater. Bij het minimum (hoogwater I in figuur 5.16) is het hoogwater groter dan bij het maximum (hoogwater II in figuur 5.16).



Figuur 5.15: Vier fasen in de springtij–doodtij cyclus. De gele cirkel (links) stelt de zon voor, de blauwe cirkel staat voor de aarde en de half witte, half grijze cirkel voor de maan (de witte helft wordt verlicht door de zon). De baan van de maan rond de aarde is aangegeven met de streeplijn. De zwarte ellipsen tonen de vorm van het wateroppervlak op aarde onder invloed van zon en maan voor vier fasen in de periode tussen twee opeenvolgende nieuwe manen. Bij nieuwe maan en volle maan verstreken zon en maan elkaar (springtij; lang gerekte ellipsoïde), terwijl ze elkaar tijdens eerste en laatste kwartier tegenwerken (doodtij; ellipsoïde bijna gelijk aan een cirkel).



Figuur 5.16: De dagelijkse ongelijkheid is het verschijnsel dat twee opeenvolgende hoogwaters verschillend van omvang zijn. Dat wordt veroorzaakt door de scheefstand van het baanvlak van de maan ten opzichte van het equatoriale vlak van de aarde.



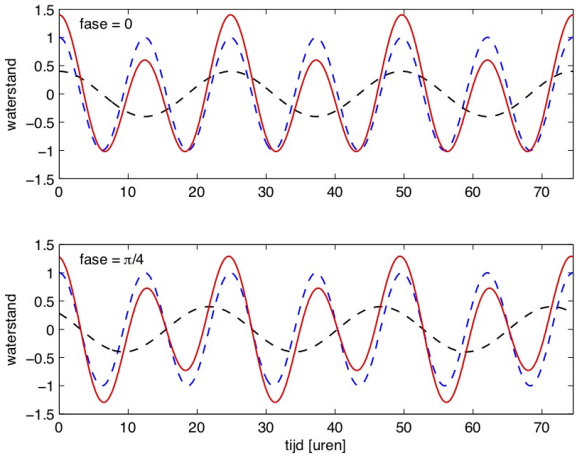
Figuur 5.17: Omdat het baanvlak van de maan een hoek maakt met het equatoriale vlak van de aarde, varieert de declinatie van de maan met de tijd.

De hoek tussen het equatoriale vlak van de aarde en de lijn die aarde en maan (of willekeurig welk ander object aan de hemel) verbindt, wordt de declinatie genoemd. Het verschil tussen hoogwaters I en II is afhankelijk van deze declinatie. Naarmate de declinatie toeneemt, wordt ook het verschil tussen beide hoogwaters groter.

De declinatie van de maan is niet constant, maar varieert met de tijd. Dat heeft te maken met de baan die de maan ten opzichte van de aarde doorloopt. Een schematische voorstelling van die baan is geschetst in figuur 5.17. Daarin is die baan ter wille van de eenvoud cirkelvormig genomen en het middelpunt van die cirkel valt samen met het zwaartepunt van de aarde. Dat is niet helemaal correct, maar het biedt een adequate illustratie van de variatie in de dagelijkse ongelijkheid.

Tijdens een volledige omloop rond de aarde is de declinatie van de maan tweemaal gelijk aan nul en bereikt deze tweemaal z'n maximale waarde. Als de maan recht boven de evenaar staat, is de declinatie gelijk aan nul. In die situaties is de dagelijkse ongelijkheid ook gelijk aan nul. Halverwege deze momenten is de declinatie maximaal en dat geldt dan ook voor de dagelijkse ongelijkheid.

In de situatie zoals geschetst in figuur 5.16 bevindt de maan zich boven het equatoriale vlak van de aarde en is hoogwater I groter dan hoogwater II. Als de bovenkant van de aarde in deze figuur de noordpool voorstelt, kunnen we zeggen dat de maan zich ten noorden van het equatoriale vlak bevindt. Naarmate de maan vordert in haar baan neemt de declinatie geleidelijk af tot nul. In termen van figuur 5.16 bevindt de maan zich dan rechts van de aarde en in het equatoriale vlak. Daarna neemt de declinatie weer toe, maar bevindt de maan zich ten zuiden van het equatoriale vlak van de aarde en dan is hoogwater I juist kleiner dan hoogwater II. Dat wil zeggen dat voor een vaste positie op aarde, bijvoorbeeld die waar hoogwater I wordt gemeten, de amplitude van het M_2 getij periodiek varieert afhankelijk van de positie van de maan ten opzichte van het equatoriale vlak van de aarde. De



Figuur 5.18: De dagelijkse ongelijkheid wordt beschreven door bij het M_2 getij (blauwe streeplijn) een component met een tweemaal zo grote periode (zwarte streeplijn) bij op te tellen. De rode lijn is de som. In de bovenste grafiek concentreert de ongelijkheid zich rond hoogwater terwijl dat in de onderste grafiek is verdeeld over hoog- en laagwater.

periode van deze schommeling is gelijk aan de duur tussen twee opeenvolgende keren dat de maan in haar baan om de aarde het equatoriale vlak van de aarde in noordwaartse richting snijdt[46]. Dit is de zogeheten tropische maand (27,32158 dagen van 24 uur) en die is niet gelijk aan de siderische maand die is genoemd in tabel 5.1 (27,32166 dagen van 24 uur). De oorzaak van het verschil is dat de baan van de maan elliptisch is in plaats van cirkelvormig en de assen van deze ellips roteren langzaam in het baanvlak van de maan. Bovendien is de baan van de maan onderhevig aan precessie. In de volgende paragrafen gaan we hier nader op in.

Om de dagelijkse ongelijkheid van het M_2 getij te beschrijven, tellen we er een harmonische component bij op met een tweemaal zo grote periode. Dat is immers de periode waarmee de ongelijkheid zich manifesteert. De grootte van deze component kan positief of negatief zijn en dat past bij het eerder geschetste beeld dat, afhankelijk van de positie van de maan ten opzichte van het equatoriale vlak van de aarde, een hoogwater groter of kleiner is dan het gemiddelde.

De fase ϕ van de toegevoegde component wordt bepaald door de verhouding tussen de effecten van de ongelijkheid bij hoogwater en bij laagwater. Als de ongelijkheid zich concentreert rond hoogwater is deze fase gelijk aan nul. Komt de ongelijkheid daarentegen juist rond laagwater voor, dan is de fase gelijk aan $\pi/2$. In figuur 5.18 zijn hiervan twee voorbeelden gegeven. In de onderste grafiek in deze figuur is de fase gelijk aan $\pi/4$. Daarbij doet de dagelijkse ongelijkheid zich in gelijke mate voor bij hoog- en laagwater.

De amplitude van de component die bij M_2 wordt opgeteld, is afhankelijk van de declinatie van de maan en varieert zodoende met een periode gelijk aan de

[46]De opgaande of noordwaartse doorsnijding van het equatoriale vlak van de aarde is een referentie die in de astronomie gebruikelijk is. Het komt overeen met het punt rechts in figuur 5.17 waar de declinatie gelijk is aan nul.

duur van een tropische maand (27,32158 dagen van 24 uur). Deze amplitude–gemoduleerde golf schrijven we als de som van twee sinusvormige signalen. Met ω_{TM} de hoeksnelheid van de modulatie vinden we

$$\begin{aligned}\cos(\omega_{TM}t+\phi)\cos\left(\frac{1}{2}\omega_{M_2}t\right) =& \frac{1}{2}\cos\left(\left(\frac{1}{2}\omega_{M_2}+\omega_{TM}\right)t+\phi\right)+\\ & \frac{1}{2}\cos\left(\left(\frac{1}{2}\omega_{M_2}-\omega_{TM}\right)t-\phi\right)\end{aligned} \tag{5.37}$$

De component met de somfrequentie wordt aangeduid met K_1 en die met de verschilfrequentie met O_1. Het door de maan geïnduceerde getij inclusief de dagelijkse ongelijkheid is hiermee geschreven als de som van de drie harmonische componenten M_2, K_1 en O_1. Dat sluit aan bij de vorm (5.33) waarin het getij wordt weergegeven als een lineaire combinatie van sinusvormige componenten.

In het getij dat is gerelateerd aan de beweging van aarde en zon doet zich een soortgelijk verschijnsel voor omdat de rotatie–as van de aarde niet loodrecht staat op de ecliptica. Dat is het vlak waarin de aarde haar baan rond de zon doorloopt. Deze scheefstand is ook verantwoordelijk voor het bestaan van seizoenen.

In dit geval heeft de dagelijkse ongelijkheid een periode die tweemaal zo groot is als die van de S_2 component en de amplitude–modulatie die hierin optreedt, heeft een periode gelijk aan de duur van een tropische jaar. Dat jaar is gedefinieerd als de duur tussen twee opeenvolgende keren dat de zon aan het begin van de lente op het noordelijk halfrond precies boven de evenaar staat (het zogeheten lentepunt). Het duurt 365,24219 dagen van 24 uur. Als we de hoeksnelheid van deze modulatie noteren als ω_{TJ} vinden we, overeenkomstig (5.37),

$$\begin{aligned}\cos(\omega_{TJ}t+\phi)\cos\left(\frac{1}{2}\omega_{S_2}t\right) =& \frac{1}{2}\cos\left(\left(\frac{1}{2}\omega_{S_2}+\omega_{TJ}\right)t+\phi\right)+\\ & \frac{1}{2}\cos\left(\left(\frac{1}{2}\omega_{S_2}-\omega_{TJ}\right)t-\phi\right)\end{aligned} \tag{5.38}$$

De twee componenten in het rechter lid van deze uitdrukking noemen we achtereenvolgens K_1 (somfrequentie) en P_1 (verschilfrequentie). De aanduiding K_1 is ook al gebruikt bij de maan. De reden om de aanduiding te herhalen is dat de hoekfrequenties $\omega_{S_2}/2+\omega_{TJ}$ en $\omega_{M_2}/2+\omega_{TM}$ niet van elkaar te onderscheiden zijn.

Omdat de dagelijkse ongelijkheid voortkomt uit de declinatie van zon en maan, worden de harmonische componenten K_1, O_1 en P_1 enkeldaagse declinatie–getijden genoemd. De term 'enkeldaags' geeft, net als de index 1 aan dat het gaat om componenten met een periode van (ongeveer) één dag. Er zijn ook dubbeldaagse declinatiegetijden, maar die laten we buiten beschouwing. In de volgende paragraaf gaan we in op de ellipticiteit van de baan van de maan.

5.3.6 Elliptische en andere getijden

Tot nog toe hebben we de baan van de maan rond de aarde steeds geschematiseerd tot een cirkel. Volgens de eerste van de bekende drie wetten van de Duitse astronoom Johannes Keppler (1571-1630) is de werkelijke baan van de maan echter elliptisch en excentrisch ten opzichte van de aarde. Het gezamenlijke massazwaartepunt van aarde en maan valt samen met één van de brandpunten van de ellips.

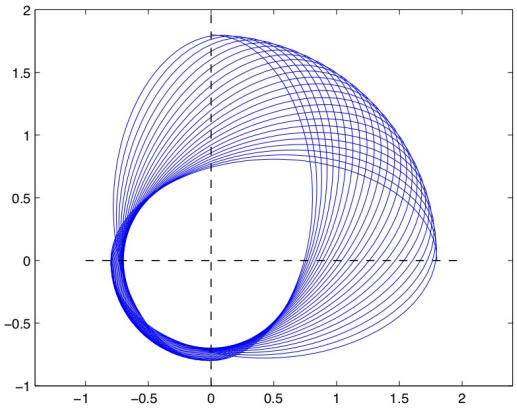
Bij zo'n elliptische baan varieert de afstand tussen aarde en maan met de tijd. Ook de omloopsnelheid varieert met de tijd. Naarmate de maan zich steeds dichter bij de aarde bevindt, neemt die snelheid toe en omgekeerd. Het gevolg van deze variérende afstand en snelheid is dat het gravitatie–effect ook varieert en dat zien we terug in de amplitude van de M_2 component van het getij. Net als bij het effect van de declinatie van de maan gaat het ook hier om een amplitude–modulatie. De periode van deze modulatie is gelijk aan een anomalistische maand. Dat is de duur tussen twee opeenvolgende malen dat de maan zich in haar elliptische baan het dichtst bij de aarde bevindt (27,55455 dagen van 24 uur). We schrijven deze amplitude-modulatie als

$$\begin{aligned}&(1+\cos(\omega_{AM}t+\phi))\cos(\omega_{M_2}t)=\\&\cos(\omega_{M_2}t)+\frac{1}{2}\cos((\omega_{M_2}+\omega_{AM})t+\phi)+\frac{1}{2}\cos((\omega_{M_2}-\omega_{AM})t-\phi)\end{aligned}\tag{5.39}$$

waarbij ω_{AM} de hoekfrequentie is bij een periode van een anomalistische maand. De component met de somfrequentie in het rechter lid van (5.39) wordt aangeduid met L_2 en die met de verschilfrequentie met N_2. Het gaat in beide gevallen om dubbeldaagse harmonische componenten.

In de beschrijving van het getij dat aan de beweging van het aarde–maan systeem is gerelateerd, hebben we inmiddels vier verschillende maanden genoemd, alle met een andere duur. Dat de synodische maand afwijkt van de andere drie, ligt voor de hand. Hierbij gaat het immers om het herhaald innemen van een positie ten opzichte van de zon en dat is mede afhankelijk van de rotatie van het aarde–maan systeem rond deze ster. Het verschil tussen de andere drie maanden is subtieler. Daarbij is steeds sprake van een volledige omwenteling, maar die is vanwege de complexiteit van de beweging van de maan rond de aarde niet eenduidig te definiëren. De lange as van de elliptische baan van de maan roteert in het baanvlak en de normaal op dit vlak maakt een tollende beweging.

Gezien op het noordelijk halfrond van de aarde doorloopt de maan linksom een elliptische baan rond de aarde. Het gezamenlijke zwaartepunt van aarde en maan valt samen met één van de brandpunten van deze ellips. Die elliptische baan is echter niet constant. De lange as van de ellips roteert met een periode van 8,85 jaar om het gezamenlijke zwaartepunt. Gezien vanaf ergens boven de Noordpool is die rotatie linksom. Een illustratie van dit verschijnsel is in figuur 5.19 gegeven voor een kwart van de periode. De lange as begint horizontaal en een kwart periode later is deze verticaal.



Figuur 5.19: Impressie van een elliptische baan waarbij de lange as van de ellips langzaam roteert om één van de brandpunten (het punt (0,0) in de grafiek). De baan begint helemaal rechts op de horizontale stippellijn en eindigt helemaal bovenaan de verticale stippellijn. De ellips wordt linksom doorlopen en de lange as draait ook linksom.

Daarnaast verandert de vorm van de ellips doorlopend onder invloed van de zwaartekracht van de zon. Bij nieuwe maan en volle maan is de ellips iets uitgerekter dan bij eerste en laatste kwartier. Dit verschijnsel wordt evectie genoemd en de getijcomponenten waarmee het effect ervan op het getij wordt beschreven, zijn de zogeheten evectiegetijden.

Voorts is de omloop van de maan onderhevig aan precessie. Het baanvlak wiebelt waarbij de normaal op dit vlak langs een kegel beweegt. Dit is vergelijkbaar met de beweging van een draaitol waarvan de as niet samenvalt met de werklijn van de zwaartekracht. De periode van dit gewiebel is 18,6 jaar. Op sommige plaatsen op aarde leidt dit tot een significante variatie in de amplitude van het M_2 getij.

Ook in de beweging van de aarde rond de zon spelen effecten van ellipticiteit en precessie een rol. Zo varieert de scheefstand van de rotatie–as van de aarde ten opzichte van de ecliptica met een periode van ongeveer 26000 jaar. Deze variatie is mede verantwoordelijk voor klimatologische veranderingen, maar speelt in de waterbouwkundige praktijk geen rol van betekenis. Dat geldt ook voor de wrijving die de getijgolf ondervindt wanneer deze zich over het oppervlak van de aarde voortplant. Als gevolg van deze wrijving wordt energie onttrokken aan de beweging van het aarde–maan systeem. Dat heeft een lange–termijn effect op onder meer de duur van een dag en de korte–termijn gemiddelde afstand tussen aarde en maan.

Hiermee sluiten we deze impressie van planetaire effecten op de waterbeweging op aarde af. De harmonische componenten die we in dit hoofdstuk hebben gekwantificeerd, zijn samengevat in tabel 5.3. Daarbij hebben we gebruik gemaakt van periodes van enkele karakteristieken in de onderlinge beweging van aarde, maan en zon. Deze zijn te vinden in tabel 5.2.

Bedenk echter dat hiermee geen compleet overzicht is gegeven. Er zijn nog diverse andere invloeden die we zelfs niet in kwalitatieve zin hebben vermeld. Voor nadere

	periode [dagen van 24 uur]	hoekfrequentie [°/uur]	symbool
siderische dag	0,99727	15,0411	ω_{SD}
siderische maand	27,32166	0,5490	ω_{SM}
tropische maand	27,32158	0,5490	ω_{TM}
anomalistische maand	27,55455	0,5444	ω_{AM}
siderisch jaar	365,25636	0,0411	ω_{SJ}
tropisch jaar	265,24219	0,0411	ω_{TJ}

Tabel 5.2: Periodes en hoekfrequenties van enkele karakteristieken in de beweging van aarde, zon en maan ten opzichte van elkaar.

	periode [uur]	hoekfrequentie [°/uur]	betrekking
M_2	12,4206	28,9841	$\omega_{M_2} = 2(\omega_{SD} - \omega_{SM})$
S_2	12,0000	30,0000	$\omega_{S_2} = 2(\omega_{SD} - \omega_{SJ})$
K_1	23,9345	15,0411	$\omega_{K_1} = \omega_{M_2}/2 + \omega_{TM}$ of $\omega_{K_1} = \omega_{S_2}/2 + \omega_{TJ}$
O_1	25,8194	13,9430	$\omega_{O_1} = \omega_{M_2}/2 - \omega_{TM}$)
P_1	24,0659	14,9589	$\omega_{P_1} = \omega_{S_2}/2 - \omega_{TJ}$
L_2	12,1916	29,5285	$\omega_{L_2} = \omega_{M_2} - \omega_{AM}$
N_2	12,6584	28,4397	$\omega_{N_2} = \omega_{M_2} + \omega_{AM}$

Tabel 5.3: Periodes en hoekfrequenties van enkele harmonische componenten.

studie wordt verwezen naar de literatuur. In de volgende twee paragrafen gaan we eerst in op het effect van de aanwezigheid van continenten. Deze verhinderen dat het evenwichtsgetij zich daadwerkelijk overal op aarde kan manifesteren. Ook kijken we naar de manier waarop het getij van karakter verandert als het zich tussen de continenten door voortplant en in betrekkelijk ondiepe kustgebieden terecht komt. Tot slot komt analyse en voorspelling van het getij aan bod.

5.3.7 Getijvoortplanting

Het evenwichtsgetij dat we in voorgaande paragrafen hebben geschetst, is een simplificatie van de werkelijkheid. Het uitgangspunten dat de aarde volledig bedekt is met een dikke laag water, is niet juist. Als we bijvoorbeeld de snijlijn van het baanvlak van de maan met het oppervlak van de aarde volgen, dan komen we naast water ook bij herhaling land tegen. Hoewel het oppervlak van de aarde voor circa 70% uit zeeën en oceanen bestaat, vormen de continenten serieuze obstructies in het evenwichtsgetij. Alleen bij Antarctica is rondom de aardbol water aanwezig en daar wordt het getij in belangrijke mate gegenereerd. Vanuit de oceaan rond Antarctica plant de getijgolf zich tussen de continenten door naar het noorden voort.

De snelheid waarmee de getijgolf zich voortplant, is begrensd door de waterdiepte. Voor een betrekkelijk diepe oceaan kunnen we dat als volgt afleiden uit de 1—

dimensionale, diepte–gemiddelde impulsbalans en continuïteit. Bij zo'n diepe oceaan is advectie relatief onbelangrijk en we veronderstellen dat dit ook geldt voor horizontale diffusie en bodemwrijving. Ook het Coriolis–effect laten we buiten beschouwing. We kijken naar een sinus-vormige golf die zich in x–richting voortplant. Voor deze gesimplificeerde voorstelling wordt de impulsbalans gegeven door

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} \tag{5.40}$$

en de continuïteitsvergelijking is

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u(h+\zeta)\right) = 0 \tag{5.41}$$

In deze uitdrukkingen is u de diepte–gemiddelde stroomsnelheid, h de over het getij gemiddelde waterdiepte, ζ de waterstand ten opzichte van gemiddeld zeeniveau, g de versnelling van de zwaartekracht, t de tijd en x is de horizontale coördinaat. In een diepe oceaan is de verticale uitwijking ζ van het wateroppervlak klein ten opzichte van de waterdiepte, zodat $h+\zeta \approx h$. Als bovendien de zeebodem ongeveer vlak en horizontaal is, verandert h niet in x–richting. De continuïteitsvergelijking reduceert daarmee tot

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{5.42}$$

Voor een sinusvormige golf kunnen we de verticale uitwijking van de waterstand ζ schrijven als

$$\zeta(x,t) = \zeta_0 e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{\zeta}_0 e^{-i(\omega t - kx)} \tag{5.43}$$

waarin ζ_0 een complexe amplitude is, i de imaginaire eenheid is ($i^2 = -1$) en de $\sim$ geeft aan dat het om de complexe geconjugeerde gaat [47].

In (5.43) is ω de hoekfrequentie van de getijgolf. We kijken gemakshalve naar één enkele harmonische component. Omdat de vergelijkingen lineair zijn, kunnen we voor een combinatie van harmonische componenten superpositie toepassen. Wat we vinden voor één component geldt in principe voor elke component.

De k in (5.43) is het zogeheten golfgetal. Net zoals ω het faseverschil per eenheid van tijd weergeeft, is k het faseverschil per eenheid van lengte in voortplantingsrichting van de golf: $\omega = 2\pi/T$ en $k = 2\pi/L$, waarbij T de golfperiode is en L de golflengte.

Omdat het stelsel vergelijkingen (5.40) en (5.42) lineair is, mogen we verwachten dat ook de snelheid u sinusvormig verloopt, met identieke hoekfrequentie en golfgetal, maar met een eigen amplitude en een eigen fase. We kunnen zodoende uitgaan van

$$u(x,t) = u_0 e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{u}_0 e^{-i(\omega t - kx)} \tag{5.44}$$

waarin u_0 een complexe amplitude is.

[47] Het rechter lid van (5.43) is niets anders dan een sinus met amplitude $|\zeta_0|$ en fase $\arg(\zeta_0)$. Voor de uitwerking is de complexe notatie handiger.

Als we (5.43) en (5.44) invullen in het stelsel (5.40) en (5.42) krijgen we

$$\begin{aligned} i\omega\left(\zeta_0 e^{i(\omega t-kx)}-\tilde{\zeta}_0 e^{-i(\omega t-kx)}\right)-ikh\left(u_0 e^{i(\omega t-kx)}-\tilde{u}_0 e^{-i(\omega t-kx)}\right)=0 \\ -igk\left(\zeta_0 e^{i(\omega t-kx)}-\tilde{\zeta}_0 e^{-i(\omega t-kx)}\right)+i\omega\left(u_0 e^{i(\omega t-kx)}-\tilde{u}_0 e^{-i(\omega t-kx)}\right)=0 \end{aligned} \tag{5.45}$$

De structuur van dit stelsel van twee homogene vergelijkingen wordt duidelijker als we het in matrix–vorm schrijven:

$$i\begin{pmatrix}\omega & -kh\\ -gk & \omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_0 e^{i(\omega t-kx)}-\tilde{\zeta}_0 e^{-i(\omega t-kx)}\\ u_0 e^{i(\omega t-kx)}-\tilde{u}_0 e^{-i(\omega t-kx)}\end{pmatrix}=\vec{0} \tag{5.46}$$

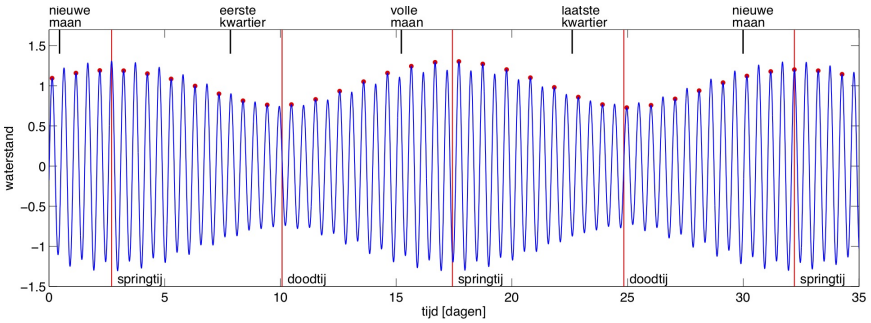
De triviale oplossing van deze vergelijking is $\zeta_0 = u_0 = 0$, maar dan is er geen getijgolf. Een niet–triviale oplossing vinden we als de determinant van de matrix gelijk is aan nul, ofwel als

$$\omega^2 - gk^2h = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\omega}{k} = \pm\sqrt{gh} \tag{5.47}$$

Het linker lid van de rechter vergelijking in (5.47) is met de definities van hoekfrequentie en golfgetal te herleiden tot L/T en dat is de voortplantingssnelheid c van de golf. Dat we hier twee uitkomsten vinden die slechts qua teken van elkaar verschillen, geeft aan dat de golf zich in beginsel in twee richtingen kan voortplanten. In beide gevallen is de grootte van de voortplantingssnelheid $c = \sqrt{gh}$. Deze relatie geldt voor alle golven waarbij de golflengte groot is ten opzichte van de waterdiepte en de amplitude klein is ten opzichte van die diepte (zie ook appendix E).

Als de oceaan ongeveer een kilometer diep is, plant de getijgolf zich met een snelheid van zo'n 100m/s voort. Met die snelheid doet een golf er circa 2,25 dagen over om vanaf de zee rond Antarctica de Nederlandse kust te bereiken (een afstand van ongeveer 20.000 km). Het getij langs deze kust loopt daardoor achter op het evenwichtsgetij.

Hetzelfde geldt voor de springtij–doodtij cyclus. In figuur 5.15 is aangegeven hoe deze cyclus voortkomt uit een interactie tussen de getijden die aan zon en maan kunnen worden toegeschreven. Als beide hemellichamen op één lijn staan, versterken hun effecten elkaar en is sprake van springtij (bij volle maan en nieuwe maan). Als ze daarentegen ten opzichte van de aarde 90° uit elkaar staan, hebben we te maken met doodtij. De combinatie van M_2 en S_2 vormt een zweving. Ook deze zweving plant zich voort met een snelheid van orde 100m/s en het duurt zodoende 2,25 dagen voordat deze vanaf het Antarctische gebied het zuidelijke deel van de Noordzee bereikt. Daarom treedt springtij langs de Nederlandse kust zo'n 2,25 dagen na nieuwe maan en volle maan op en is het ook ongeveer 2,25 dagen na eerste en laatste kwartier doodtij.



Figuur 5.20: Gesimuleerde getijregistratie voor een periode van iets meer dan twee maal de springtij–doodtij cyclus. De simulatie is gebaseerd op de harmonische componenten M_2, S_2, K_1 en O_1.

Dit is in figuur 5.20 geïllustreerd met een fictieve getijregistratie. Deze registratie beslaat een periode van 35 dagen en dat is bijna een week meer dan een synodische maand (de periode tussen twee opeenvolgende volle of nieuwe manen). De springtij–doodtij cyclus past daar ruim twee keer in.

Naast de beperkte voortplantingssnelheid spelen in ondiepe zeeën ook zogeheten niet—lineaire effecten een rol. Dat is een wezenlijk verschil met betrekkelijk diepe oceanen waar we ons steeds toe hebben beperkt. Deze effecten ontlenen de aanduiding 'niet-lineair' aan het karakter van de bijbehorende termen in de impulsbalans. Het gaat hoofdzakelijk om advectie en bodemwrijving. We laten dat zien aan de hand van de 1–dimensionale, diepte–gemiddelde balans. Inclusief advectie en bodemwrijving luidt deze balans (zie hoofdstuk 2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{c_f}{h}u|u| \tag{5.48}$$

waarin c_f een dimensieloze weerstandscoëfficiënt is.

Ten opzichte van (5.42) is in het linker lid van (5.48) de term $u\partial u/\partial x$ voor advectie toegevoegd en in het rechter lid $(c_f/h)u|u|$ voor bodemwrijving. Beide termen zijn niet–lineair in de snelheid u en in (5.42) hebben we deze termen verwaarloosd.

In hoofdstuk 2 hebben we voor een eenparige stroming gezien dat bodemwrijving evenredig is met het kwadraat van de diepte–gemiddelde stroomsnelheid. Bij een golf hebben we echter niet te maken met een eenparige stroming. Met regelmaat wisselt de richting van de stroming en de bodemwrijving doet dat dan ook. Om deze wisseling van teken in rekening te brengen, gebruiken we $u|u|$. Bij een eenparige stroming in positieve x–richting is dat gelijk aan u^2.

Uit (5.48) valt direct af te leiden dat als de uitwijking van de oppervlakte ζ sinusvormig verloopt, de snelheid u dat niet doet. Immers, als u wel sinusvormig zou verlopen, zouden alle termen in (5.48) dat zelfde karakter moeten vertonen. Met uitzondering van de (lineaire) traagheidsterm $\partial u/\partial t$ is dat echter niet het geval.

Als u een sinusvormige component bevat, bijvoorbeeld $\sin(\omega t)$ of $\cos(\omega t)$, en we schrijven $u|u|$ voor deze component als een Fourierreeks, dan vinden we

$$\begin{aligned}
&\sin(\omega t)|\sin(\omega t)| = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left((2n-1)\omega t\right) \quad ; \quad a_n = -8\frac{1}{\pi(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \\
&\cos(\omega t)|\cos(\omega t)| = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left((2n-1)\omega t\right) \quad ; \quad b_n = 8\frac{(-1)^n}{\pi(2n-3)(2n-1)(2n+1)}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

waaruit blijkt dat bodemwrijving hogere harmonische componenten genereert met hoekfrequenties die een oneven veelvoud zijn van de basisfrequentie ω. Bovendien blijkt dat de amplitude a_n van die hogere harmonische componenten afneemt met toenemende n. In een M_2 gedomineerde situatie leidt bodemwrijving zodoende vooral tot het ontstaan van een component met een drie maal zo hoge hoekfrequentie. Deze wordt de M_6 component genoemd.

Op overeenkomstige manier leidt advectie ook tot het ontstaan van hogere orde harmonische componenten én van lagere orde componenten. Het relatieve belang daarvan is echter mede afhankelijk van variaties in waterdiepte in de richting van golfvoortplanting. Ter illustratie kijken we naar een getijgolf die zich voortplant over een vlakke, hellende bodem en waarbij de voortplantingsrichting samenvalt met de richting waarin de bodem helt. Hoewel de totale waterdiepte $h+\zeta$ varieert in x–richting, nemen we voor de eenvoud aan dat deze overal veel groter is dan de verticale uitwijking van het wateroppervlak ζ. Daarmee kan de benadering $h+\zeta \approx h$ ook in dit geval worden toegepast. De continuïteitsvergelijking (5.41) kunnen we met deze benadering schrijven als

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0 \tag{5.50}$$

waarin

$$\frac{\partial (hu)}{\partial x} = h\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial h}{\partial x} \tag{5.51}$$

Samenvoegen van deze beide uitdrukkingen en vermenigvuldigen met de snelheid u levert

$$u\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{h}\left(u\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u^2\frac{\partial h}{\partial x}\right) \tag{5.52}$$

voor de advectieve term in (5.48).

Aan de hand van deze uitdrukking kunnen we nagaan dat extra harmonische componenten ontstaan als gevolg van advectie. Daartoe kijken we weer naar een enkele sinusvormige component van de snelheid u, bijvoorbeeld $\sin(\omega t)$. Als we de u^2 in (5.52) voor deze component uitwerken, vinden we

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\omega t)}{2} \tag{5.53}$$

Kennelijk ontstaan er twee nieuwe componenten. Een daarvan heeft de dubbele hoekfrequentie 2ω. Dit betekent bijvoorbeeld dat in aanwezigheid van een M_2

component als gevolg van advectie een M_4 component ontstaat. De andere nieuwe component heeft geen periodiek karakter maar is constant. Dat wil zeggen dat als gevolg van advectie een over het getij gemiddelde stroming wordt gegenereerd. Voor beide componenten geldt dat de mate waarin zij worden opgewekt afhankelijk is van de helling $\partial h/\partial x$ van de bodem in voortplantingsrichting van de golf.

Ook het product $u\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ in het rechter lid van (5.52) leidt tot het ontstaan van een component met dubbele hoekfrequentie in combinatie met een getij–residu. Voor een component met hoekfrequentie ω die zowel in u als in $\partial\zeta/\partial t$ voorkomt, maar met faseverschil ϕ, vinden we

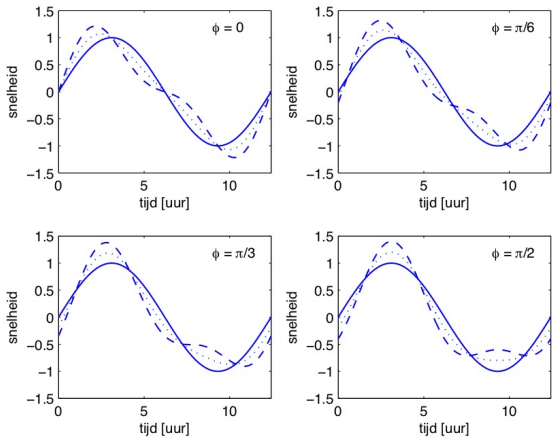
$$\sin(\omega t)\sin(\omega t+\phi) = \frac{1}{2}\cos(\phi) - \frac{1}{2}\cos(2\omega t+\phi) \tag{5.54}$$

waaruit blijkt dat de bijdrage van deze interactie aan het getij-residu afhankelijk is van het faseverschil.

In onder meer de morfologische ontwikkeling van zandige kusten, estuaria en getijbekkens speelt de aanwezigheid van hogere harmonische componenten een belangrijke rol. De reden daarvoor is hun bijdrage aan een netto transport van sediment. Met de getijstroom wordt sediment getransporteerd en net als de stroming heeft ook dit transport een alternerend karakter. De omvang van het transport in de ene richting kan echter afwijken van dat in de andere en dan is sprake van een netto effect. Het door advectie gegenereerde getij–residu is daarvan een voor de hand liggende oorzaak. Maar ook als er gerekend over een getijperiode geen residu in de stroming is, kan er wel een netto transport van sediment optreden. Een belangrijke oorzaak daarvan is asymmetrie van het getij. Daarvan is sprake als het verloop met de tijd van de waterstand of stroomsnelheid in één helft van de getijperiode niet het spiegelbeeld is van dat verloop in de andere helft. Het is inherent aan de combinatie van een getijcomponent en z'n hogere harmonische met dubbele hoekfrequentie die ten opzicht van elkaar in fase zijn verschoven.

In veel kustgebieden is de combinatie van M_2 en M_4 een belangrijke bron van asymmetrie. Deze combinatie is in figuur 5.21 geschetst voor vier verschillen in fase. Het gaat in deze voorbeelden om stroomsnelheden. De asymmetrie komt onder meer tot uiting in de variatie van de duur tussen opeenvolgende nuldoorgangen. Alle voorbeelden in figuur 5.21 zijn de som van twee sinusvormige componenten. Geïntegreerd over de periode van M_2 leveren zij precies nul op. Transport van sediment is echter niet evenredig met de stroomsnelheid zelf, maar met een macht van die snelheid. Vanwege de asymmetrie hoeft dat na integratie over de getijperiode niet nul op te leveren. In zulke gevallen is sprake van een getij-residueel transport en dat heeft altijd dezelfde richting. Onder meer bij estuaria en getij–inlaten kan een residueel transport door cumulatie over de tijd een aanzienlijke invloed hebben op de morfologische ontwikkeling van zo'n systeem. Daarbij kan een negatieve terugkoppeling optreden in de zin dat de morfologische verandering een reductie van de getij–asymmetrie teweeg brengt. Het systeem tendeert in dat geval naar een evenwicht.

Tot op zekere hoogte gedraagt een zeehaven zich ook als een getij–inlaat. Als de



Figuur 5.21: Vier voorbeelden van de combinatie van M_2 ($\sin(\omega t)$) en M_4 ($a\sin(2\omega t + \phi)$) voor verschillende faseverschillen ϕ en amplitude a van de M_2 van 0,2 (stippellijn) en 0,4 (streeplijn). De getrokken lijn is alleen M_2.

haven aan landzijde gesloten is, gaat er per getijcyclus net zoveel water de haven in als er weer uitkomt. Er is dus geen netto transport van water de haven in of uit. Door asymmetrie in het verloop van de stroomsnelheid met de tijd kan er echter wel sprake zijn van een getij–residueel transport van sediment. Morfologisch gezien verkeert het havenbekken niet in evenwicht en het residuele transport is een natuurlijke correctie daarop. Relatief ondiepe havens verzanden als gevolg hiervan. Dat noodzaakt tot onderhoud in de vorm van periodiek baggeren.

Voor de volledigheid merken we nog op dat als de stroomsnelheid gemiddeld over het getij gelijk is aan nul, zoals in de voorbeelden in figuur 5.21, er toch een getij–residuele stroming kan zijn. Dat komt voort uit het faseverschil tussen stroomsnelheid en uitwijking van het wateroppervlak. Daardoor kan de stroming in de ene richting samenvallen met een andere waterdiepte dan de stroming in de andere richting. Het gevolg is dat de totale debieten in beide richtingen niet aan elkaar gelijk zijn en in dat geval is sprake van een residu. Zoals aangegeven in (5.41) is het debiet in voortplantingsrichting van de golf gelijk aan $u(h+\zeta)$. Integratie over de getijperiode T geeft

$$\int_0^T u(h+\zeta)\mathrm{d}t = h\int_0^T u\mathrm{d}t + \int_0^T u\zeta\mathrm{d}t \tag{5.55}$$

waarbij we hebben aangenomen dat het bodemniveau binnen een getijcyclus niet noemenswaardig varieert. Als de snelheid u en de oppervlakte–uitwijking ζ beide zuiver periodiek gedrag vertonen, levert de integraal van u in het rechter lid van (5.55) precies nul op. Dat geldt echter niet noodzakelijk voor de integraal van $u\zeta$, want dat betreft een product van sinusvormige componenten.

5.3.8 Getij-analyse

In nagenoeg alle waterbouwkundige projecten die zich afspelen op zee, in kustgebieden, estuaria en rond benedenrivieren, is inzicht in het getij van cruciaal

belang. Het is mede bepalend voor de vaststelling van ontwerpcondities voor waterbouwkundige constructies, maar ook van belang voor beschouwingen over de veiligheid tegen overstromen, morfologische processen, ontwikkeling van ecosystemen et cetera. Een belangrijk hulpmiddel om dat inzicht te verwerven is getijanalyse waarbij het getij wordt ontleed in termen van harmonische componenten. Het uitgangspunt voor zo'n analyse is doorgaans een registratie van waterstanden. Stroomsnelheden kunnen in beginsel ook worden gebruikt, maar die zijn meer gevoelig voor verstoringen door bijvoorbeeld wind, golven en objecten in de buurt van het meetpunt.

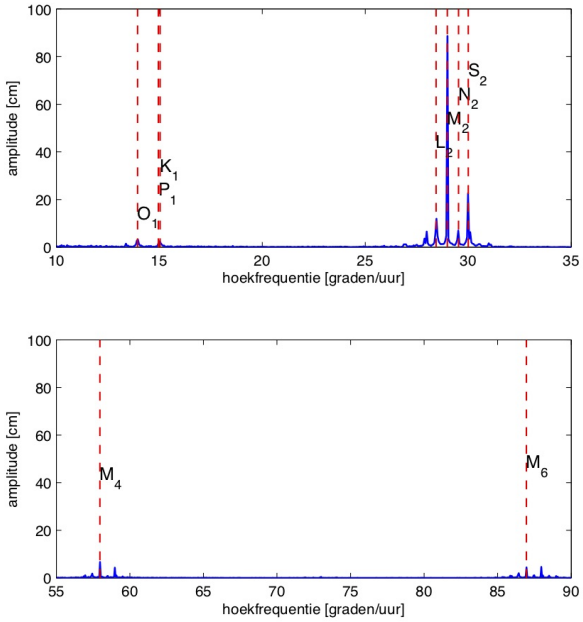
Het doel van een getij–analyse is om na te gaan hoe het gemeten signaal is opgebouwd uit harmonische componenten. Uit de bewegingen van aarde, maan en zon en de mechanismen die leiden tot het ontstaan van hogere harmonische componenten, weten we welke hoekfrequenties we in zo'n signaal mogen verwachten. De bijbehorende amplitudes en fasen zijn echter locatie–specifiek en we gebruiken de registratie om die te achterhalen. In de praktijk worden daartoe twee methoden toegepast. In één daarvan wordt de methode der kleinste kwadraten toegepast en de andere is gebaseerd op ontwikkeling van het gemeten signaal in een Fourierreeks.

Bij de methode der kleinste kwadraten wordt vooraf voorgeschreven welke hoekfrequenties in de analyse worden betrokken. De bijbehorende amplitudes worden vervolgens zo gekozen dat het signaal dat met die hoekfrequenties en amplitudes kan worden geconstrueerd, zo goed mogelijk bij het gemeten signaal past. In dit verband is 'zo goed mogelijk' gedefinieerd als de kleinst mogelijke som van kwadraten van verschillen tussen meting en geconstrueerd signaal.

Bij een Fourieranalyse is de registratie bepalend voor de hoekfrequenties die in beschouwing worden genomen. Meestal heeft zo'n registratie de vorm van een discrete tijdreeks. Daarbij wordt de waterstand om de paar minuten gemeten en geregistreerd. Voor een registratie die een duur T beslaat, geeft een daarop toegepaste Fourieranalyse amplitudes voor componenten met hoekfrequenties $\omega_n = 2\pi n/T$ met n tussen 1 en de helft van het aantal waarnemingen in de registratie. Hoewel deze hoekfrequenties niet noodzakelijk overeen komen met die van bekende harmonische componenten van het getij, kan bij een kwalitatief goede registratie een zodanige resolutie in het frequentiedomein worden bereikt dat die bekende componenten goed herkenbaar zijn.

Voor beide methoden geldt overigens dat de duur die de registratie beslaat, bepalend is voor de laagste hoekfrequentie die erin kan worden herkend. Het is bijvoorbeeld niet mogelijk om op basis van een registratie van één maand amplitudes te schatten bij maancycli met een periode van 8,85 of 18,6 jaar. Voor gedetailleerd inzicht in het getij zijn daarom langjarige registraties nodig. Die zijn lang niet voor alle plaatsen op de wereld beschikbaar, wat de waterbouwkundige niet zelden noopt tot improvisatie.

In appendix A over Tijdreeksanalyse zijn de Fourieranalyse en de methode der kleinste kwadraten toegelicht en is hun wiskundige achtergrond geschetst. In dit



Figuur 5.22: Twee delen van het amplitudespectrum behorend bij een registratie van de waterstand bij Vlissingen in de periode januari–oktober 2013. Bij diverse pieken is vermeld met welke getijcomponenten ze geassocieerd kunnen worden.

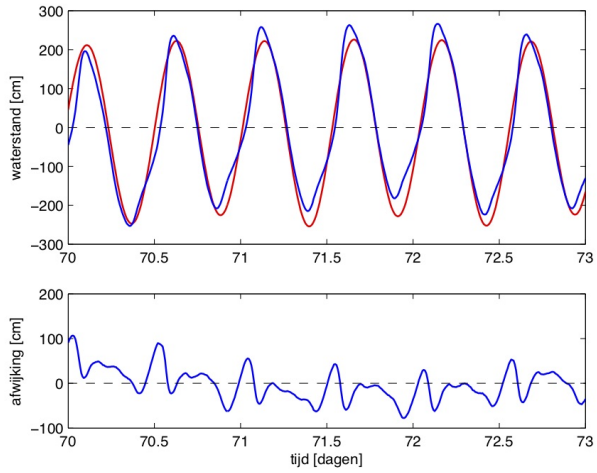
hoofdstuk kijken we ter illustratie alleen naar een toepassing. Daarvoor gebruiken we een registratie van de waterstand bij Vlissingen in de periode januari 2013 tot medio oktober van dat jaar[48]. Deze registratie bevat voor elke tien minuten één waterstand. Voor de hele periode zijn dat er circa 40.000.

Zowel de Fourieranalyse als de methode der kleinste kwadraten zijn gebruikt om harmonische componenten uit deze registratie te destilleren. In figuur 5.22 is het resultaat van de Fourieranalyse gegeven. Het zijn twee delen van een zogeheten amplitude–spectrum. Voor alle beschouwde hoekfrequenties (de horizontale as) zijn de amplitudes verticaal uitgezet. In het tussenliggende deel, met hoekfrequenties tussen 35 en 55 °/uur komen geen significante pieken voor.

De verticale gestreepte lijnen in figuur 5.22 horen bij hoekfrequenties van specifieke getijcomponenten. Deze lijnen zijn aan de figuur toegevoegd om het amplitudespectrum te kunnen interpreteren. Kennelijk is sprake van een M_2 gedomineerd getij. Ook andere dubbeldaagse componenten (L_2, S_2 en N_2) zijn relatief sterk aanwezig, terwijl de dagelijkse ongelijkheid (O_1, P_1 en K_1) betrekkelijk zwak is. Bij de hogere frequenties (de onderste grafiek in figuur 5.22) zien we twee hogere harmonische componenten behorend bij M_2, namelijk M_4 en M_6.

De registratie is ook geanalyseerd met de methode der kleinste kwadraten voor de

[48]Deze registratie is met medewerking van drs. A. Stolk beschikbaar gesteld door het Hydro Meteo Centrum van Rijkswaterstaat, waarvoor dank.



Figuur 5.23: Vergelijking van reconstructie en meting. In de bovenste grafiek is voor een periode van drie dagen het gemeten signaal (blauw) samen met de reconstructie (rood) uitgezet. De onderste grafiek geeft het verschil tussen beide (reconstructie minus meting).

componenten M_2, S_2, K_1, O_1, P_1, L_2, N_2, M_4 en M_6. Qua amplitudes levert dat natuurlijk hetzelfde beeld op als de Fourieranalyse.

In figuur 5.23 is een deel van de registratie vergeleken met een reconstructie daarvan op basis van het resultaat van de analyse met de methode der kleinste kwadraten. De reconstructie is de lineaire combinatie van de genoemde negen componenten met de amplituden en fasen die uit de analyse naar voren zijn gekomen. In de bovenste grafiek in figuur 5.23 is de registratie met de blauwe curve weergegeven en de reconstructie met de rode.

Blijkbaar zijn de negen harmonische componenten die in de analyse zijn betrokken ontoereikend om voor de drie dagen waar figuur 5.23 over gaat, de registratie tot op enkele centimeters nauwkeurig te reconstrueren. Voor deze drie dagen lopen de verschillen op tot enkele tientallen centimeters en bij een amplitude van orde twee meter is dat niet op voorhand verwaarloosbaar. Voor het verschil zijn twee redenen aan te geven.

In de eerste plaats geldt in het algemeen dat negen harmonische componenten niet volstaan om het astronomisch getij adequaat weer te geven. Daar zijn veel meer componenten voor nodig. Een andere verklaring voor het verschil is dat de reconstructie uitsluitend het astronomisch getij betreft voor zover dat met de beschouwde componenten uit de registratie kan worden geschat. De registratie zelf bevat echter ook effecten van bijvoorbeeld wind en variaties in atmosferische druk. Bovendien kan bij Vlissingen ook de afvoer van de rivier De Schelde een rol spelen.

Voor een deel zijn zulke effecten terug te vinden als fouten in de schattingen van amplituden en fasen van getijcomponenten. De omvang van zulke fouten neemt echter af met toenemende duur van de registratie. Maar ook als die duur heel groot is, kunnen momentaan significante verschillen tussen registratie en recon-

structie optreden op grond van precies dezelfde effecten. Dat lijkt in de drie dagen van figuur 5.23 het geval. Het getij–gemiddelde verschil tussen registratie en reconstructie verloopt over die drie dagen van positief in de eerste helft van dag 70 naar negatief rond middernacht van dag 72. Dit zou veroorzaakt kunnen zijn door een passerende storm. De 70^{e} dag van het jaar valt in de eerste helft van maart. Volgens de astronomische kalender was het toen nog net winter.

6

Sedimenttransport en morfologie

6.1 Inleiding

Naar de relatie tussen waterbeweging en transport van sediment is en wordt veel onderzoek gedaan. Inzicht in die relatie is cruciaal voor het begrijpen en voorspellen van het gedrag van natuurlijke systemen die mede door de interactie tussen water en sediment worden gevormd, zoals rivieren, delta's, estuaria en kusten. Ook voor het ontwerp van waterbouwkundige ingrepen in zulke systemen is het essentieel om te doorgronden hoe die ingreep de waterbeweging en het transport van sediment beïnvloedt en wat de consequenties daarvan zijn.

De interactie tussen waterbeweging en sedimenttransport manifesteert zich op uiteenlopende tijd– en ruimteschalen. Langs de Hollandse kust, bijvoorbeeld, zijn bij laagwater op het strand soms kleinschalige ribbelpatronen te zien met afmetingen in de orde van 10cm, maar ook zogeheten brekerbanken die, dwars op de kust gemeten, enkele tientallen meters lang kunnen zijn. Nog grootschaliger golfpatronen komen op de bodem van Noordzee voor op enige afstand van de kust, maar er zijn ook hele gebieden waar de bodem vrijwel vlak of licht glooiend is. Al deze bodemvormen worden gevormd onder invloed van stroming en golven en daaraan gekoppeld transport van sediment. Tegelijkertijd hebben die bodemvormen invloed op de stroming en de voortplanting van golven.

Zowel omvang als richting van sedimenttransport zijn afhankelijk van waterbeweging. Ruimtelijke variaties in die waterbeweging kunnen zodoende gepaard gaan met gradiënten in transport. Dat betekent dat in een of andere richting de omvang van het transport kan variëren. Als het transport over enige afstand afneemt, dan zal een deel van het getransporteerde sediment onderweg worden afgezet. Het gevolg daarvan is dat het niveau van de bodem stijgt. In zulke gevallen wordt gesproken van sedimentatie. Op dezelfde manier leidt een toename van het transport tot erosie en een daling van het bodemniveau. Gradiënten in het transport resul-

teren op deze manier in veranderingen van bodemvormen. Op sommige plaatsen kan verdieping ontstaan terwijl op andere plaatsen juist sprake is van verondieping.

Op hun beurt leiden zulke veranderingen van diepte tot een aanpassing van de waterbeweging en dus ook tot een aanpassing van de ruimtelijke verdeling van sedimenttransport en de bijbehorende gradënten. Dit is een tijdsafhankelijk proces waarbij bodemvormen en waterbeweging elkaar doorlopend beïnvloeden. De tijdschaal waarop dit proces zich afspeelt, is niet afhankelijk van de grootte van het sedimenttransport, maar van de gradiënten die zich daarin voordoen. Tegelijkertijd geldt echter dat naarmate het tijdsgemiddelde transport groter is, over een bepaalde afstand ook steeds grotere gradiënten kunnen voorkomen.

In sommige gevallen tendeert de wisselwerking tussen waterbeweging en sedimenttransport naar een evenwicht waarbij wel ruimtelijke variaties in bodemniveau kunnen optreden, maar het transport geen gradiënten vertoont. Zo kan een ingreep in een rivier of kust een bestaand evenwicht verstoren, waarna zich na verloop van tijd een nieuw evenwicht instelt dat kan afwijken van het oorspronkelijke. Het is echter ook mogelijk dat een ingreep leidt tot een situatie die geen nieuw evenwicht toelaat. In de paragrafen 6.3 en 6.4 komen voorbeelden daarvan aan bod voor achtereenvolgens rivieren en kusten. Voorafgaand daaraan gaan we in op het verband tussen stroming en transport van sediment (paragraaf 6.2).

6.2 Transport bij stroming

Om een beeld te krijgen van hoe sediment wordt getransporteerd onder invloed van stroming, kijken we naar een waterloop met een vlakke, horizontale bodem die geheel bestaat uit zand of een overeenkomstig materiaal dat is opgebouwd uit losse korrels. Als er geen stroming in de waterloop is, zijn alle korrels in rust en gebeurt er helemaal niets.

Als gedachte–experiment brengen we in de waterloop een langzaam in sterkte toenemende stroming op gang. In eerste instantie zal dat nauwelijks tot geen effect hebben op het korrelmateriaal in de bodem, maar op enig moment zullen de relatief lichte korrels in beweging komen. Met toenemende stroomsnelheid zullen steeds zwaardere korrels gaan bewegen. Er is dan nog geen sprake van transport omdat de korrels, hoewel ze bewegen, niet van hun plaats komen.

Afhankelijk van hun omvang, is er echter een stroomsnelheid waarbij de korrels niet zomaar bewegen zonder van hun plaats te komen, maar daadwerkelijk door de stroming worden meegevoerd. Op dat moment is sprake van transport.

Dit gedachte–experiment illustreert dat er, afhankelijk van de omvang van een korrel, een kritieke stroomsnelheid is waarbij de korrel in beweging komt en een andere, grotere kritieke stroomsnelheid waarbij deze wordt getransporteerd. Om in te zien waarom dat zo is, voeren we een tweede gedachte–experiment uit waarbij we ons concentreren op één korrel helemaal aan de bovenkant van de bodem.

Deze korrel is maximaal blootgesteld aan de stroming nabij de bodem van de waterloop.

Als gevolg van de stroming worden op de korrel krachten uitgeoefend waardoor die in beweging kan komen. In de literatuur (zie bijvoorbeeld Schiereck (2004)) wordt onderscheid gemaakt tussen een frontale belasting op de korrel, een schuifspanning langs het oppervlak van de korrel en een kracht waardoor de korrel wordt opgetild (door drukverschillen in de stroming over de korrel heen en eronder door, net als de luchtstroom rond de vleugel van een vogel of vliegtuig). Al deze effecten zijn evenredig met de oppervlakte van de korrel en een maat daarvoor is het kwadraat van de korreldiameter D. Die effecten zijn tevens afhankelijk van de stroming nabij de bodem. Gelet op de wisselwerking tussen die stroming en de eigenschappen van de bodem, is het redelijk om de bodemschuifspanning τ_b als maat te nemen voor de invloed van de stroming. Zo redenerend kunnen we $\tau_b D^2$ zien als een maat voor de kracht die het water uitoefent op de korrel, ofte wel de kracht die de korrel aanzet tot bewegen of laat meevoeren met de stroming.

Het eigen gewicht van de korrel, daarentegen, zorgt ervoor dat die op de bodem van de waterloop wil blijven. Voor de bepaling van dat eigen gewicht moeten we niet alleen rekening houden met de massa van de korrel, maar ook met de opwaartse kracht die het omringende water daarop uitoefent. Beide zijn evenredig met het volume van de korrel en een maat daarvoor is D^3. Zodoende kunnen we $(\rho_s - \rho_w)gD^3$ (met ρ_s de dichtheid van het korrelmateriaal en ρ_w die van water) zien als een maat voor het eigen gewicht onder water.

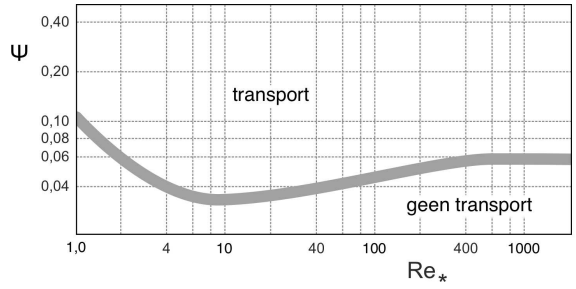
Zo redenerend moeten we voor de vraag of de korrel in beweging komt of wordt getransporteerd, kijken naar de verhouding tussen de kracht die de korrel in beweging zet ($\tau_b D^2$) en de kracht die dat verhindert ($(\rho_s - \rho_w)gD^3$). Deze verhouding wordt gewoonlijk geschreven als

$$\Psi = \frac{\tau_b D^2}{(\rho_s - \rho_w)gD^3} = \frac{\tau_b}{\Delta \rho_w g D} \quad ; \quad \Delta = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \tag{6.1}$$

waarin Ψ de zogeheten Shields parameters is, genoemd naar de Amerikaanse ingenieur Albert Shields (1908-1974) die uit empirisch onderzoek heeft afgeleid welke waarde van Ψ overeen komt met de grens tussen wel en geen transport van korrelmateriaal met een karakteristieke diameter D en afhankelijk van de bodemschuifspanning τ_b (Shields, 1936)[49]. Die grens blijkt afhankelijk van de mate van turbulentie die zich in de stroming voordoet. Gelet op het verband tussen bodemschuifspanning en turbulentie (zie appendix C) is dat niet vreemd. De kritieke waarde van de Shields parameter Ψ is daarom afhankelijk van de turbulentie nabij de bodem. Een maat hiervoor is het getal van Reynolds (Re_*), gebaseerd op de schuifspanningssnelheid u_*:

$$\mathrm{Re}_* = \frac{u_* D}{\nu} \quad ; \quad u_* = \sqrt{\tau_b / \rho_w} \tag{6.2}$$

[49]De factor Δ in deze uitdrukking is de zogeheten relatieve dichtheid onder water van het korrelmateriaal. In de literatuur wordt voor het product Δg vaak het symbool g' gebruikt en dat wordt de *gereduceerde gravitatie* genoemd. Het is het netto effect van gravitatie en opdrijvend vermogen.



Figuur 6.1: Nagemaakte versie van het diagram van Shields Shields (1936) waarin de overgang tussen wel en geen transport is weergegeven in relatie tot de Shields parameter Ψ en het getal van Reynolds Re_* (copyright A. Shields). De overgang is niet heel scherp, vandaar de dikgedrukte kromme.

waarin ν de moleculaire viscositeit van de vloeistof is ($\nu = 10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ voor water).

De relatie tussen Ψ en Re_* voor de grens tussen wel of geen transport, is weergegeven in figuur 6.1. Deze figuur staat bekend als het diagram van Shields.

Als (bij goede benadering) sprake is van een stationaire, verhang–gedreven stroming, kan de bodemschuifspanning τ_b in uitdrukking (6.1) voor Ψ worden vervangen door de diepte–gemiddelde stroomsnelheid u volgens

$$\Psi = \frac{u^2}{\Delta D C_h^2} \quad ; \quad \mathrm{Re}_* = \frac{D}{\nu} u \frac{\sqrt{g}}{C_h} \tag{6.3}$$

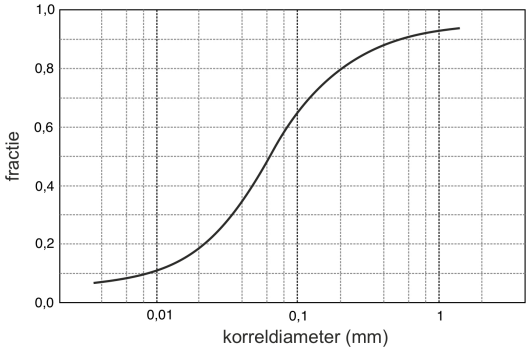
(zie paragraaf 2.4 voor de relatie tussen u en τ_b).

Zonder dat expliciet te stellen, hebben we in de overwegingen die leiden tot het diagram van Shields uitsluitend gekeken naar transport van loskorrelig sediment ter hoogte van een vlakke, horizontale bodem van een waterloop. Op cohesief sediment, zoals klei en slib, zijn deze overwegingen niet zonder meer van toepassing. Vanwege de cohesie is een grotere schuifspanning nodig om deeltjes los te maken van de bodem dan bij loskorrelig materiaal met vergelijkbare afmetingen.

Voor toepassing van het diagram van Shields in de waterbouwkundige praktijk is een nadere duiding nodig van wat wordt verstaan onder de grens van wel en geen transport, niet in de laatste plaats omdat er in de praktijk bij loskorrelig materiaal niet zoiets is als **de** korreldiameter. En ook de invloed van een eventuele bodemhelling verdient nadere beschouwing. Deze aspecten komen in de volgende drie paragrafen aan bod. Eerst kijken we naar de verscheidenheid in korreldiameters in sediment en stortsteen (de gradering genoemd). Vervolgens gaan we na hoe de grens tussen wel en geen transport moet worden gezien tegen de achtergrond van die gradering en de laatste van de drie paragrafen gaat over het effect van een bodemhelling.

Gradering

De Shields parameter speelt een rol van betekenis in bijvoorbeeld het ontwerp van bodem– en oeverbescherming (zie hoofdstuk 7) en in de beschrijving van transport van sediment in bijvoorbeeld rivieren (zie paragraaf 6.3). Bij zandige kusten is dat



Figuur 6.2: Voorbeeld van een korrelgrootte verdeling van sediment. De kromme geeft aan welke fractie van het betreffende sediment een specifieke diameter onderschrijdt.

minder het geval, omdat het transport van sediment daar veelal wordt gedomineerd door golven (zie paragraaf 6.4).

Voor zulke toepassingen is het nodig om een relatie te leggen tussen de korreldiameter D die in de uitdrukking (6.1) voor de Shields parameter voorkomt en de afmetingen van korrels in het desbetreffende sediment. Die relatie is niet zonder meer eenduidig omdat natuurlijk sediment een verscheidenheid kent aan korrelgrootten en –vormen. Deze verscheidenheid wordt gradering genoemd (ofwel onderscheid in gradaties).

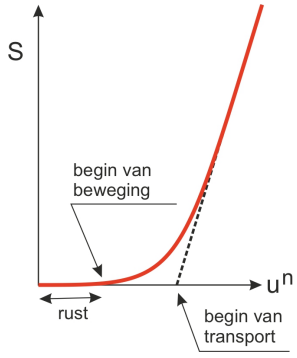
In de waterbouwkunde wordt die gradering vaak in beeld gebracht met een diagram zoals geschetst in figuur 6.2. De kromme in dit diagram geeft aan welk deel van het sediment een diameter heeft kleiner dan een specifieke waarde. In het voorbeeld van figuur 6.2 heeft circa 60% van het sediment een diameter kleiner dan 0,08mm.

Een gangbare manier om zo'n diagram samen te stellen is door een monster van het sediment te scheiden in fracties met behulp van zeven[50] met verschillende maaswijdte. Op die manier kan de kromme in figuur 6.2 worden benaderd met net zoveel punten als er zeven zijn gebruikt. Het resultaat wordt, heel toepasselijk, de zeefkromme genoemd.

Of een korrel door de zeef valt, hangt niet alleen af van de grootte van die korrel, maar ook van de vorm. Zo kan een korrel in de vorm van een rugby bal juist wel of juist niet door de zeef vallen afhankelijk van de oriëntatie van de lange as ten opzichte van de zeef. Het kan zijn dat die korrel alleen door een maas van de zeef past als die lange as (bijna) verticaal staat. Een zeefkromme is dus niet zo scherp als getekend in figuur 6.2. Door de zeef te schudden, neemt de kans toe dat korrels worden onderscheiden op basis van relatief kleine afmetingen.

Los daarvan blijft de vraag welke afmeting van een korrel representatief is voor de D in de uitdrukking voor Ψ. In de praktijk wordt daarvoor vaak op basis van volume een vergelijking gemaakt met een geometrische vorm met een voor de hand liggende karakteristieke afmeting. Voorbeelden hiervan zijn een bol (met de

[50] Het gaat hier niet om 7, maar om het meervoud van zeef.



Figuur 6.3: Schematische weergave van de omvang S van het transport van sediment in relatie tot u^n, waarin u de stroomsnelheid en de macht n afhankelijk is van de karakteristieke korreldiameter van het sediment.

straal als karakteristieke afmeting) en een kubus (gekarakteriseerd door de lengte van de ribbe). Als de werkelijke korrel een volume V heeft, dan is de $D = V^{1/3}$ de representatieve diameter als je uitgaat van een kubus en bij een bol is dat $D \approx 0,62V^{1/3}$.

In de waterbouwkunde is het gebruik van de zogeheten nominale diameter (genoteerd als D_n) de standaard. Deze gaat uit van een vergelijking op basis van een kubus, dus $D_n^3 = V$. Daarmee is er voor individuele korrels een definitie van een representatieve diameter. Om voor natuurlijk sediment ook de gradering te incorporeren, wordt uitgegaan van de nominale diameter die door 50% van de korrels wordt over– of onderschreden. Deze wordt genoteerd als $D_{n,50}$. Als langs de horizontale as van de grafiek in figuur 6.2 de $D_{n,50}$ zou zijn uitgezet, dan geldt voor het sediment waar deze grafiek betrekking op heeft, dat $D_{n,50} \approx 0,06$mm.

Grens tussen wel en geen transport

Vanwege de gradering van het bodemmateriaal is er geen specifieke bodemschuifspanning waarbij al dat materiaal opeens wordt getransporteerd. Korrels in de bodemmateriaal komen pas in beweging als een kritische schuifspanning wordt overschreden en die is afhankelijk van het korrelgewicht. Bij gegradeerd bodemmateriaal zullen bij toenemende bodemschuifspanning eerst de relatief lichte korrels in beweging komen en worden getransporteerd, en pas later de relatief zware korrels.

Dit is schematisch weergegeven in figuur 6.3, waarin de omvang S van het sedimenttransport (uitgedrukt als een volume per eenheid van tijd) is uitgezet tegen de stroomsnelheid u tot een macht n. Deze n is afhankelijk van de karakteristieke korreldiameter van het sediment (in paragraaf 6.3 komen we hierop terug). Bovendien is in de weergegeven relatie tussen S en u verondersteld dat bij redelijke benadering sprake is van een eenparige, stationaire, verhang-gedreven stroming (zie ook (6.3)).

In deze figuur worden drie gebieden onderscheiden. Voor relatief kleine u^n komen korrels niet (noemenswaardig) in beweging. Dit gebied is in de figuur aangegeven met *rust*. Voor relatief grote u^n neemt het transport S evenredig toe met u^n.

Extrapolatie van deze evenredigheid naar de horizontale as in de grafiek, levert de u^n die wordt aangeduid als begin van transport. Dat is de grens tussen wel en geen transport. Deze grens is in die zin kunstmatig dat ook bij een kleinere u^n sprake is van transport, maar dat is van een betrekkelijk kleine omvang.

Het gebied tussen rust en begin van transport is een overgangsgebied waarin de lichtste korrels getransporteerd kunnen worden, de wat minder lichte in wel in beweging komen maar gemiddeld op hun plaats blijven en de zwaardere korrels in rust blijven.

Voor berekeningen aan sedimenttransport in bijvoorbeeld rivieren (zie paragraaf 6.3 over riviermorfologie) is met name overschrijding van *begin van transport* van belang. Bij turbulente stroming in een waterloop met een vlakke horizontale bodem ligt dat bij $\Psi \approx 0,06$.

Anderzijds is het ontwerp van een bodembescherming die is opgebouwd uit loskorrelig materiaal, er doorgaans op gericht om aan de veilige kant van *begin van beweging* ($\Psi \approx 0,055$) te blijven. Voor turbulente stroming en een vlakke, horizontale bodem wordt voor zulke beschermingsconstructies $\Psi \leq 0,03$ aangehouden (zie paragraaf 7.5 over bodembescherming).

Effect van een bodemhelling

Korrels die op een hellende bodem liggen, zoals een onderwater talud langs de oevers van een waterloop, komen makkelijker in beweging dan korrels op een horizontale bodem. De reden daarvoor is dat bij een helling de zwaartekracht niet loodrecht op de bodem staat. De loodrechte component die mede verhindert dat de korrel in beweging komt, is kleiner dan bij een vlakke bodem. Bovendien is er ook een component van de zwaartekracht langs de bodem die juist bijdraagt aan het in beweging brengen van de korrel. Bij een hellende bodem is de kritieke waarde van de Shields parameter (die de grens aangeeft tussen wel en geen transport) daarom kleiner dan bij een vlakke bodem.

De mate waarin deze kritieke waarde van Ψ afneemt met toenemende bodemhelling, hangt ook af van de hoek van inwendige wrijving ϕ van het bodemmateriaal. Als de hellingshoek α van de bodem gelijk is aan ϕ, staat het bodemmateriaal al op het punt om in beweging te komen en is zelfs een zeer geringe stroming al voldoende om transport te veroorzaken. In dat geval ligt de grens tussen wel en geen transport bij $\Psi = 0$.

Voor een vlakke, horizontale bodem wordt de kritieke waarde van Ψ doorgaans aangegeven met Ψ_c en die komt overeen met de kromme in figuur 6.1. Bij een hellende bodem wordt op deze Ψ_c een reductiefactor k_α toegepast, zodat de grens tussen wel en geen transport wordt aangegeven door $k_\alpha \Psi_c$. Voor een vlakke, hellende bodem waarbij de stroming evenwijdig is aan de dieptelijnen, geldt voor deze factor k_α dat

$$k_\alpha = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \phi}} \tag{6.4}$$

Voor een afleiding wordt verwezen naar Schiereck (2004).

Voor stroming de helling op of af (dus loodrecht op de dieptelijnen) heeft de bodemschuifspanning dezelfde werklijn als de component van de zwaartekracht dwars op de dieptelijnen (langs de helling). Dat leidt tot een andere relatie tussen k_α, α en ϕ, namelijk

$$k_\alpha = \frac{\sin(\phi - \alpha)}{\sin \phi} \tag{6.5}$$

en voor de afleiding daarvan wordt ook verwezen naar Schiereck (2004).

6.3 Riviermorfologie

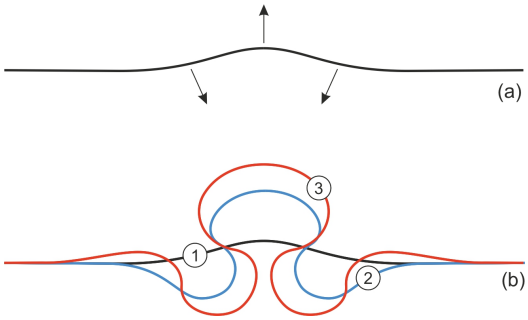
6.3.1 Inleiding

Niet alleen in de waterbouwkunde maar bijvoorbeeld ook in de hydrologie verwijst de term riviermorfologie naar fysische processen die een rivier vormen. Bij die processen speelt de wisselwerking tussen transport van water en sediment een sleutelrol. De stroming in een rivier is van invloed op het transport van sediment. Tegelijkertijd heeft dat transport (en met name gradiënten daarin) invloed op de vorm van de rivier, zoals de ontwikkeling van banken en geulen, het ontstaan van vlechtpatronen en meanders[51] en zo meer. De wisselwerking zit daarin dat als de vorm van de rivier verandert, dan verandert het stromingspatroon ook en dat heeft weer invloed op het transport van sediment en daarmee op de vorm van de rivier, et cetera.

Vlechten treedt op bij relatief hoge stroomsnelheden en ondiep water, meestal in de bovenloop van een rivier, nadat het fijne materiaal is uitgespoeld en het rivierbed wordt gevormd door de interactie tussen stroming en grof materiaal zoals grind. In de benedenloop, waar de stroomsnelheden doorgaans lager zijn, bestaat het rivierbed uit relatief fijn materiaal. Meanderen wordt aangetroffen bij die combinatie.

Dat meanderen is te zien als een instabiliteit waarin een kleine verstoring van stroming in een rechte lijn zich uitbouwt tot een steeds wijdere bocht. Het aandrijvend mechanisme is een circulatie in een verticale doorsnede van de rivier die zich voordoet bij gekromde stroming (zie paragraaf 3.6.3 over bochtstroming). Bij die circulatie doet zich bovenin de waterkolom een stroming voor naar de buitenbocht en in de onderste helft is er een stroming naar de binnenbocht. Met die laatste wordt sediment van de buitenbocht naar de binnenbocht getransporteerd. Daardoor erodeert de buitenbocht terwijl de binnenbocht aanzandt (zie paragraaf 6.3.4 over sedimenttransport in rivierbochten).

[51] Voor voorbeelden van vlechtende en meanderende rivieren wordt verwezen naar Internet. Daar zijn vele fraaie foto's en beschrijvingen van beide te vinden. Een voorbeeld van een meanderende rivier is de Mississippi (VS) en de Waimakariri (Nieuw Zeeland) is een voorbeeld van een vlechtende rivier.



Figuur 6.4: Schematische weergave van het proces van vorming van meanders. Een initiële afwijking van een rechte loop van een rivier (figuur (a)) heeft bijvoorbeeld de vorm van een slalom met de kromming afwisselend de ene en de andere kant op. Er zijn drie buitenbochten die uitbouwen. Drie achtereenvolgende stadia daarvan zijn geschetst in figuur (b).

Dit proces is schematisch weergegeven in figuur 6.4. Het begint in dit voorbeeld met een kleine afwijking van een rechte lijn (figuur 6.4(a)). Als de stroming in deze figuur van links naar rechts is, dan passeert de stroming deze verstoring door eerst een bochtje naar links te maken, dan een naar rechts en vervolgens nog een naar links. Door de verticale circulaties in deze drie bochten bouwen deze gestaag uit. Daarbij ontstaan bij de uiteinden van de verstoring nieuwe bochten die zich op hun beurt ook gaan uitbouwen. Als de stroming van rechts naar links zou zijn, gebeurt precies hetzelfde.

In figuur 6.4(b) zijn drie achtereenvolgende momenten van dit proces geschetst. Na verloop van tijd kunnen uitbouwende bochten elkaar ontmoeten waardoor een bocht wordt afgesneden. In paragraaf 6.3.3 gaan we op de morfologische gevolgen van zo'n gebeurtenis in. Bovendien komen in die paragraaf de morfologische effecten van enkele menselijke ingrepen in een rivier aan de orde. Voorafgaand daaraan kijken we naar de wisselwerking tussen transport van water sediment.

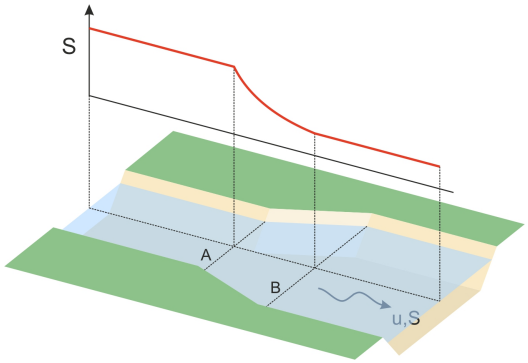
6.3.2 Bulk sedimenttransport

Als de bodem van een rivier uit erodeerbaar materiaal bestaat, wordt dat door de stroming meegevoerd. De omvang van dit transport varieert met de stroming. In paragraaf 6.2 hebben we gezien dat de grens tussen wel en geen transport afhankelijk is van de bodemschuifspanning en karakteristieken van het bodemmateriaal. Die relatie kunnen we gebruiken om een uitspraak te doen over de vraag of transport verwacht mag worden, maar we kunnen daarmee niet de omvang van het transport bepalen. Zoals geïllustreerd in figuur 6.3 is de omvang S van het transport, als dat goed tot ontwikkeling is gekomen, evenredig met een macht van de stroomsnelheid u. Voor het bulk sedimenttransport S (dat is het transport geïntegreerd over de dwarsdoorsnede van de rivier), geldt bij benadering dat

$$S \propto Bu^n \tag{6.6}$$

waarin B de breedte van de rivier en waarbij (net als in (6.3)) is verondersteld dat bij redelijke benadering sprake is van een stationaire, eenparige, verhang-gedreven stroming.

De macht n in bovenstaande evenredigheid is primair afhankelijk van karakteris-



Figuur 6.5: Verloop van het sedimenttransport S in stroomrichting van een waterloop als zich in die richting een verbreding voordoet (de rode lijn in de grafiek die boven de as van de rivier is getekend). De afname van het transport leidt stroomafwaarts van doorsnede A tot sedimentatie (niet in de figuur weergegeven).

tieken van het bodemmateriaal en in hoeverre dat materiaal in suspensie komt. Bij loskorrelig materiaal neemt n toe naarmate de korreldiameter afneemt. Voor grof zand is $n \approx 3$ terwijl voor fijn zand en niet—cohesief slib n neigt naar 5. Wat daarbij een rol speelt, is dat naarmate het materiaal fijner is, er steeds meer in suspensie komt waardoor het aandeel zwevend transport in S toeneemt.

Als het transport S in stroomrichting verandert, heeft dat morfologische consequenties. Ter illustratie kijken we naar een deel van een geschematiseerde rivier waarvan de breedte in stroomrichting toeneemt. In figuur 6.5 is dit geschetst.

Bovenstrooms van de doorsnede A is de rivier minder breed dan benedenstrooms van doorsnede B. Tussen A en B neemt de breedte geleidelijk toe, laten we zeggen met een factor α. De stroomsnelheid neemt dan over dat zelfde traject met een factor α af, aangenomen dat de waterspiegel en de bodem (met uitzondering van nabij de oevers) parallel zijn en de afvoer constant. In dat geval neemt volgens (6.6) het transport S tussen A en B met een factor α^{n-1} af. In figuur 6.5 is dat aangegeven met de rode lijn in de grafiek boven de as van de rivier.

Voor het riviervak tussen A en B betekent dit dat er bij A meer sediment binnenkomt dan er bij B uitgaat. In dit riviervak blijft dus sediment achter en dat vertaalt zich naar een verandering van de bodemligging. Er treedt sedimentatie op waardoor het oppervlak van de dwarsdoorsnede afneemt. De mate waarin dit gebeurt, hangt af van de reductie van het transport tussen A en B zoals weergegeven met de balans

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}A_c}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.7}$$

waarin x een coördinaat langs de as van de rivier, t de tijd en A_c het oppervlak van de natte doorsnede van de rivier. Deze balans is vergelijkbaar met de continuïteitsvergelijking (2.3).

De verandering in A_c koppelt terug op het transport S omdat die verandering gevolgen heeft voor de stroomsnelheid. Voor morfologische processen in rivieren is deze terugkoppeling fundamenteel. In sommige gevallen leidt die tot een evenwicht

($\mathrm{d}S/\mathrm{d}x = 0$), maar dat is niet altijd het geval (zoals bij de eerder genoemde meanderende rivier).

In dit boek gaan we niet verder op rivier-morfologische processen in dan we in deze korte principe schets hebben gedaan. Wel kijken we voor enkele typen verstoringen van een bestaand evenwicht, naar het nieuwe evenwicht dat door de beschreven terugkoppeling ontstaat. Daarbij gaan we uit van gesimplificeerde omstandigheden (paragraaf 6.3.3).

Overigens moet worden opgemerkt dat in de natuur een evenwicht in de strikte zin van het woord niet voorkomt. Er zijn altijd fluctuaties in stroming en transport. Echter, als er, geïntegreerd over de tijdschaal van die fluctuaties, geen netto morfologisch effect is, spreekt met toch van een evenwicht of, liever, een dynamisch evenwicht.

6.3.3 Lange–termijn respons op ingrepen

Een rivier verkeert in morfologisch (dynamisch) evenwicht als nergens netto sedimentatie of erosie optreedt. Een verstoring van zo'n evenwicht zet een morfologisch proces in gang dat soms divergeert (zoals bij een meanderende rivier) of convergeert naar een nieuw evenwicht of herstel van het oude. Een aanwijzing dat zulke convergentie zich zou kunnen voordoen, zit in het voorbeeld van een verbreding van een rivier dat in de vorige paragraaf is genoemd (zie figuur 6.5). Daar hebben we gezien dat bij een constant debiet, een verbreding van de rivier leidt tot aanzanding ter hoogte van de verbreding omdat de stroomsnelheid en daarmee het sedimenttransport afneemt. Door die aanzanding neemt de waterdiepte af, waardoor de stroomsnelheid juist weer toeneemt. Dit suggereert een negatieve terugkoppeling. Voor convergentie naar een (nieuw) evenwicht is dat een noodzakelijke maar geen voldoende voorwaarde.

In deze paragraaf gaan we in op de vraag of een permanente verstoring van een bestaand evenwicht (zoals de verbreding die is geschetst in figuur 6.5) kan leiden tot een nieuw evenwicht en zo ja, hoe dat nieuwe evenwicht eruit ziet. Daartoe kijken we naar het verband tussen de afvoer (Q), het sedimenttransport (S), de waterdiepte (h), breedte (B) en het verhang (i) van de rivier. En we schematiseren een morfologisch dynamisch evenwicht tot een stationaire situatie. Dat wil zeggen dat nergens langs de as van de rivier erosie of sedimentatie optreedt.

We bouwen voort op de verbreding die is geschetst in figuur 6.5 en nemen aan dat die het resultaat is van menselijk ingrijpen in een rivier die voor die ingreep in morfologisch evenwicht verkeerde. Bovendien nemen we aan dat deze ingreep door de aanleg van beschoeiing of anderszins wordt gehandhaafd. Die verbreding is dus een permanent.

Het oorspronkelijke evenwicht wordt gekarakteriseerd door een specifieke verhouding tussen Q, S, h, B en i. Door de ingreep is de breedte B veranderd en de vraag is of die ingreep een nieuw morfologisch evenwicht toelaat. In dat eventuele nieuwe evenwicht moeten de afvoer Q en het sedimenttransport S gelijk zijn aan

die in de oorspronkelijke situatie. Als we uitgaan van sub–kritische stroming, is dat alleen mogelijk als zich stroomafwaarts van de verbreding een combinatie van waterdiepte h en verhang i kan instellen waarbij zich geen gradiënten voordoen in stroomsnelheid en transport van sediment.

In zo'n nieuw (evenwicht moeten Q en S aan weerszijden van de verbreding gelijk zijn. Met

$$\begin{aligned} S &= mBu^n \\ Q &= Bhu \end{aligned} \tag{6.8}$$

(waarin m een evenredigheidsfactor, zie (6.6)) kan S bij een verandering van B constant blijven mits de stroomsnelheid u conform verandert (aangenomen dat de evenredigheidsfactor m onafhankelijk is van de geometrie van de dwarsdoorsnede van de rivier, wat bij betrekkelijk geringe wijzigingen in die geometrie een redelijke eerste benadering is).

Om dit nader te duiden, vergelijken we de riviervakken boven– en benedenstrooms van de verbreding. In het bovenstroomse vak is de breedte B_1 en in het benedenstroomse vak is dat B_2. Op dezelfde manier onderscheiden we stroomsnelheden u_1 en u_2. Als S aan weerszijden van de verbreding gelijk is, dan moet gelden dat

$$S = mB_1u_1^n = mB_2u_2^2 \tag{6.9}$$

Dat wil zeggen dat als B in stroomrichting verandert met een factor α (dus $B_2 = \alpha B_1$), dan zou de stroomsnelheid u als gevolg van de daarmee gepaard gaande verondieping uiteindelijk met een factor $\alpha^{-1/n}$ moeten veranderen ($u_2 = \alpha^{-1/n}u_1$).

Tegelijkertijd moet de afvoer Q gelijk blijven:

$$Q = B_1h_1u_1 = B_2h_2u_2 \tag{6.10}$$

ofte wel, met de condities voor een constant transport S,

$$Q = B_2h_2u_2 = (\alpha B_1)\, h_2 \left(\alpha^{-1/n}u_1\right) = B_1h_1u_1 \quad \Longrightarrow \quad h_2 = \alpha^{(1-n)/n}h_1 \tag{6.11}$$

Voor een morfologisch evenwicht is het bovendien nodig dat boven– en benedenstrooms van de verbreding sprake is van eenparige stroming. Immers, als dat niet zo zou zijn, verandert de stroming in de loop van het riviervak en is het transport S daar dus niet constant.

Volgens Chézy geldt voor eenparige stroming dat de stroomsnelheid $u = C_h\sqrt{h|i|}$ (zie uitdrukking (2.40), met C_h de Chézy ruwheid, h de waterdiepte als benadering van de hydraulische straal R en i het verhang). Als we, net als voor de evenredigheidsfactor m, aannemen dat C_h niet noemenswaardig wordt beïnvloed

door betrekkelijk geringe veranderingen in de geometrie van de dwarsdoorsnede van de rivier, dan geldt met $Q = Bhu$ dat

$$\begin{aligned} Q = C_h B_1 h_1 \sqrt{h_1 |i_1|} &= C_h B_2 h_2 \sqrt{h_2 |i_2|} \\ &= C_h \ \alpha B_1 \ \alpha^{(1-n)/n} h_1 \sqrt{h_2 |i_2|} \end{aligned} \tag{6.12}$$

waaruit volgt dat

$$|i_2| = \alpha^{(n-3)/n} |i_1| \tag{6.13}$$

Kortom, het morfologisch evenwicht dat zich na verloop van tijd in het verbrede benedenstroomse riviervak instelt en waarbij de afvoer Q en het transport S gelijk zijn aan die bovenstrooms van de verbreding, wordt gekenmerkt door een aangepaste waterdiepte en een aangepast verhang volgens

$$\begin{aligned} h_2 &= \alpha^{(1-n)/n} h_1 \\ |i_2| &= \alpha^{(n-3)/n} |i_1| \end{aligned} \tag{6.14}$$

In dit voorbeeld hebben we gekeken naar het lange–termijn effect van een lokale verstoring van een bestaand evenwicht. Daarbij hebben we de rivier in twee vakken verdeeld. Een daarvan betreft het traject waar de verstoring is aangebracht. Impliciet hebben we aangenomen dat elk van de twee vakken op zich een prismatische waterloop is. We hebben gesteld dat als de stroming in een vak stationair is en zich geen gradiënten voordoen in stroomsnelheid en sedimenttransport, dus als Q, S, h, B en i over de volle lengte van het vak constant zijn, sprake is van een morfologisch evenwicht. Daarbij geldt dat

$$\begin{aligned} S &= mBu^n \\ u &= \frac{Q}{Bh} = C_h \sqrt{h|i|} \end{aligned} \tag{6.15}$$

Door eliminatie van de stroomsnelheid u reduceert dit tot

$$S = mQB^{1-n} h^{-n} = mC_h^n B h^{n/2} |i|^{n/2} \tag{6.16}$$

Er zijn oneindig veel combinaties van Q, S, h, B en i denkbaar die aan deze twee betrekkingen voldoen. In dit boek beperken we ons tot situaties waarin drie van deze vijf grootheden zijn voorgeschreven en dan kunnen de overige twee uit (6.16) worden bepaald (althans bij bekende voorgeschreven m en C_h).

In het voorbeeld van de verbreding is een breedte B voorgeschreven die afwijkt van het oorspronkelijke evenwicht. Als de morfologische respons op die ingreep leidt tot een nieuw evenwicht, moeten de afvoer Q en het transport S daarin identiek zijn aan die voor de verbreding. Dus Q en S zijn ook voorgeschreven. En daarmee liggen met (6.16) de waterdiepte h en het verhang i voor het nieuwe evenwicht vast (volgens (6.14)).

Op overeenkomstige manier kijken we in het navolgende naar nieuwe evenwichten die ontstaan na andersoortige ingrepen dan alleen in de breedte. Het gaat om

- geforceerde aanpassing van de dwarsdoorsnede van een rivier
- geforceerde aanpassing van de lengte van een rivier
- lokale, permanente onttrekking van water en/of sediment

en voor deze ingrepen gaan we na wat de consequenties zijn voor waterdiepte en verhang beneden– en bovenstrooms daarvan (waarbij wordt verondersteld dat steeds sprake is van subkritische stroming).

Aanpassing van de dwarsdoorsnede

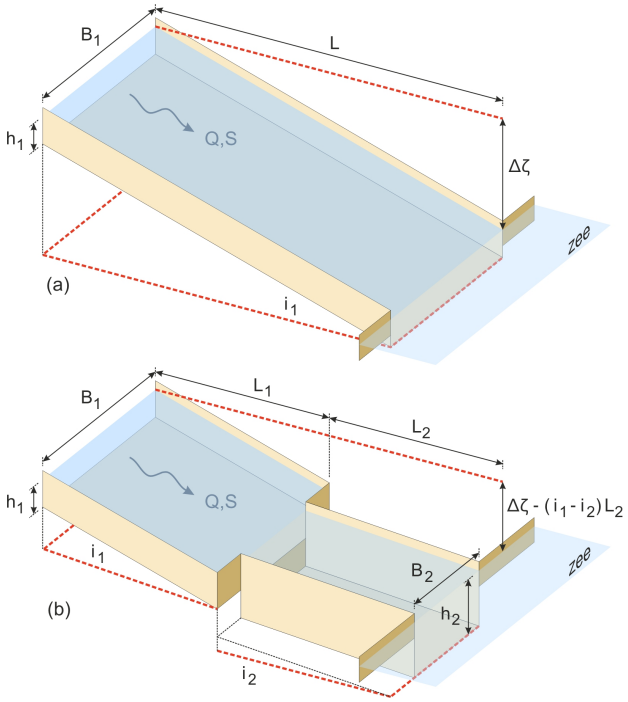
Om een beeld te krijgen van de lange-termijn morfologische consequenties van een ingreep in de dwarsdoorsnede van een rivier, veronderstellen we dat de rivier in morfologisch evenwicht verkeert op het moment dat de ingreep plaatsvindt. Die ingreep kan betrekking hebben op de breedte van de rivier of op de waterdiepte. We gaan ervan uit dat die ingreep in stand blijft en niet wordt beïnvloed door de morfologische respons op de ingreep.

Het evenwicht dat er was voor de ingreep, vergelijken we met het evenwicht dat zich na de ingreep uiteindelijk instelt. Het morfologisch proces dat door de ingreep wordt geïnitieerd en naar dat nieuwe evenwicht convergeert, laten we buiten beschouwing.

Dat aanvankelijke evenwicht is schematisch weergegeven in figuur 6.6(a). Het gaat om een riviervak met lengte L en verhang i_1 juist bovenstrooms van de monding in zee. De dwarsdoorsnede is geschematiseerd tot een rechthoek met breedte B_1 en waterdiepte h_1. Ter plaatse van de monding is de waterstand in de rivier gelijk aan die op zee.

Bijvoorbeeld door het getij varieert de waterstand op zee met de tijd en die variatie dringt door in de rivier. Dit is een periodieke fluctuatie waarbij ook dichtheidsgradiënten in de overgang van zoet naar zout water een rol spelen. Dat blijft buiten beschouwing. We gaan uit van een representatieve, constante waterstand op zee (gemiddeld zeeniveau). Voor de stroming in de rivier, die we sub–kritisch veronderstellen, is die waterstand een randvoorwaarde.

Met deze uitgangspunten gaan we na welk nieuw morfologisch evenwicht zich instelt nadat in het benedenstroomse deel van de rivier over een lengte L_2 een andere breedte dan B_1 wordt opgelegd of een andere waterdiepte dan h_1. Vanuit de veronderstelling dat de combinatie van breedte B_1, waterdiepte h_1 en verhang i_1 past bij een morfologisch evenwicht, vragen we ons af welke andere combinaties B_2, h_2, i_2 ook een evenwicht opleveren bij identieke afvoer Q en transport S. We doen dat in algemene zin, aan de hand van de evenwichtsrelaties (6.16) en we veronderstellen dat de evenredigheidsfactor m, de ruwheid C_h en de macht n zijn voorgeschreven en voor alle combinaties gelijk.



Figuur 6.6: Schematische weergave van de benedenloop van een rivier die uitmondt in zee, vóór (figuur (a)) en na (figuur(b)) aanpassing van de dwarsdoorsnede in een deel van die benedenloop. In beide gevallen is sprake van een morfo–dynamisch evenwicht. De waterspiegel is aangegeven met transparant blauw en de rode streeplijnen in de figuren zijn horizontaal. Voorts is $L = L_1 + L_2$.

Volgens die relaties leveren beide combinaties (B_1, h_1, i_1) en (B_2, h_2, i_2) dezelfde Q en S op indien

$$\begin{aligned} B_1^{1-n} h_1^{-n} &= B_2^{1-n} h_2^{-n} \\ B_1 h_1^{n/2} |i_1|^{n/2} &= B_2 h_2^{n/2} |i_2|^{n/2} \end{aligned} \tag{6.17}$$

Uit de bovenste van deze twee betrekkingen volgt dat

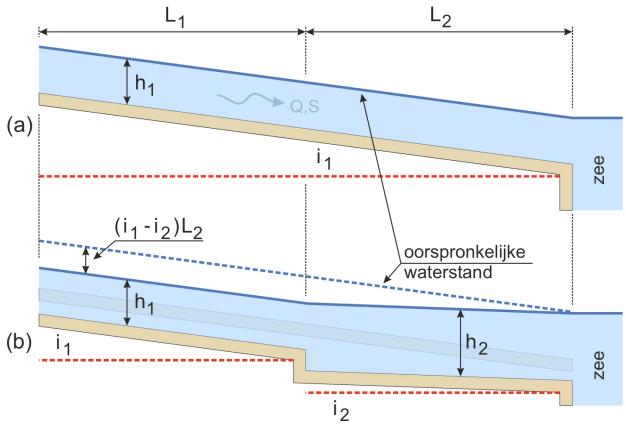
$$\frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^{\frac{1-n}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B_2}{B_1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \tag{6.18}$$

zodat, na invullen in de onderste betrekking

$$\frac{|i_2|}{|i_1|} = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^{-\frac{2}{n}} \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{-1} = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^{\frac{n-3}{n}} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\frac{n-3}{1-n}} \tag{6.19}$$

Dit komt overeen met (6.14) als je je bedenkt dat $\alpha = B_2/B_1$;

De factor n ligt in de meeste praktisch relevante situaties tussen 3 (voor betrekkelijk grof sediment) en 5 (voor betrekkelijk fijn materiaal). Voor waarden binnen dat interval leidt een verbreding ($B_2 > B_1$) tot een verondieping ($h_2 < h_1$) en een toename van het verhang ($|i_2| > |i_1|$). Naarmate het bodemmateriaal grover wordt ($n \to 3$) neemt de invloed van een verandering van de breedte op het verhang af.



Figuur 6.7: Schematische langsdoorsnede van het riviervak van figuur 6.6 in de oorspronkelijke situatie (het morfologisch evenwicht voor de ingreep; figuur (a)) en nadat zich een nieuw morfologisch evenwicht heeft ingesteld na versmalling van het benedenstroomse deel (figuur (b)). In de nieuwe situatie liggen bodem en waterstand bovenstrooms van de versmalling $L_2(|i_1| - |i_2|)$ lager dan voor de ingreep. De rode streeplijnen in de figuren zijn horizontaal.

Een versmalling, daarentegen, leidt tot een nieuw morfologisch evenwicht met een grotere diepte en een geringer verhang. Dit is geschetst in figuur 6.6(b). Het benedenstroomse riviervak van figuur 6.6(a) is over een lengte L_2 versmald van B_1 naar B_2. Als gevolg daarvan zijn de diepte en het verhang over die lengte veranderd. In figuur 6.6(b) is dat schematisch weergegeven als een abrupte overgang. In werkelijkheid verloopt die overgang geleidelijk.

Bovenstrooms van de aanpassing heeft de rivier de oorspronkelijk dwarsdoorsnede. Daar is immers niets aan de breedte en de diepte veranderd. Toch heeft zich daar een morfologische aanpassing voorgedaan en die heeft te maken met de randvoorwaarde dat de waterstand op zee constant is, onafhankelijk wat zich in de rivier afspeelt. Waar het versmalde deel uitmondt in zee, is de waterstand in de rivier identiek aan die op zee. Overeenkomstig is de waterstand aan het bovenstroomse uiteinde van het versmalde deel (op een afstand L_2 van de monding) identiek aan die bij het benedenstroomse uiteinde van het deel van de rivier waar de breedte niet is aangepast.

In de oorspronkelijke situatie (figuur 6.6(a)) lag de waterstand op een afstand L_2 bovenstrooms van de monding $L_2|i_1|$ boven zeeniveau. Bij het morfologisch evenwicht dat zich instelt nadat het benedenstroomse deel van de rivier over een lengte L_2 is versmald, is het verhang op dat traject afgenomen van $|i_1|$ tot $|i_2|$. Dat wil zeggen dat de waterstand ter plaatse van het bovenstroomse uiteinde van de versmalling is gedaald met $L_2(|i_1| - |i_2|)$. In het nieuwe morfologisch evenwicht liggen bovenstrooms van de versmalling zowel de waterstand als de bodem dit bedrag lager dan voor de ingreep. In de langsdoorsnede, geschetst in figuur 6.7, is die daling aangegeven.

Aanpassing van de lengte

Een voorbeeld van een aanpassing van de lengte van een rivier is het afsnijden van een meander. Als het afgesneden deel niet meer bijdraagt aan het afvoeren water en sediment, komt deze ingreep erop neer dat in de rivier twee sneden worden

gemaakt, het tussenliggende deel wordt verwijderd om vervolgens de zo ontstane uiteinden aan elkaar te knopen. Die twee uiteinden sluiten niet direct op elkaar aan. In zowel de waterstand als het bodemniveau is sprake van een hoogteverschil van $L|i|$, waarin L de lengte van het afgesneden deel en i het verhang.

De directe respons hierop is dat zich bovenstrooms van de aansluiting een verhanglijn zal instellen waarbij de waterstand ter plaatse van de aansluiting identiek is die direct benedenstrooms van de aansluiting. Net als de waterstand op zee in de vorige paragraaf, is de waterstand in het benedenstroomse deel ter plaatse van de aansluiting een randvoorwaarde voor het bovenstroomse deel.

Bij die verhanglijn hoort een waterdiepte die in stroomrichting geleidelijk afneemt. Omdat de afvoer constant is, gaat dit gepaard met een versnelling van de stroming en dus met een toename van het transport van sediment. Het deel van de rivier bovenstrooms van de aansluiting erodeert hierdoor. Dat proces gaat net zolang door totdat een nieuw evenwicht is bereikt en daarin is dit volledige deel $L|i|$ gedaald (aangenomen dat de breedte niet verandert).

Deze vergaande erosie kan worden voorkomen door de rivier rondom de aansluiting over enige lengte te verbreden. Als dat verbrede deel in morfologisch evenwicht verkeert, is het verhang daar groter dan i en dat maakt het mogelijk om met die verbreding een overgangstraject te creëren dat het abrupte hoogteverschil $L|i|$ ter plaatse van de aansluiting vervangt en bovenstrooms ervan geen morfologische gevolgen heeft.

We werken dit nader uit en schrijven het hoogteverschil als $\Delta\zeta = L|i|$. Als het overgangstraject een lengte L_v krijgt, dan moet het hoogteverschil over dit traject gelijk zijn aan $\Delta\zeta + |i|L_v$. Dat is de som van het hoogteverschil als gevolg van de afsnijding en het hoogteverschil dat zich over die lengte voordoet vanwege het verhang i in de rivier. Dat betekent dat het verhang i_v in het overgangstraject gelijk moet zijn aan $|i_v| = |i| + \Delta\zeta/L_v$.

Als we de breedte van dit overgangsgebied een factor α groter kiezen dan de breedte van de rivier, dan moet de lengte L_v van het overgangstraject zodanig worden gekozen dat

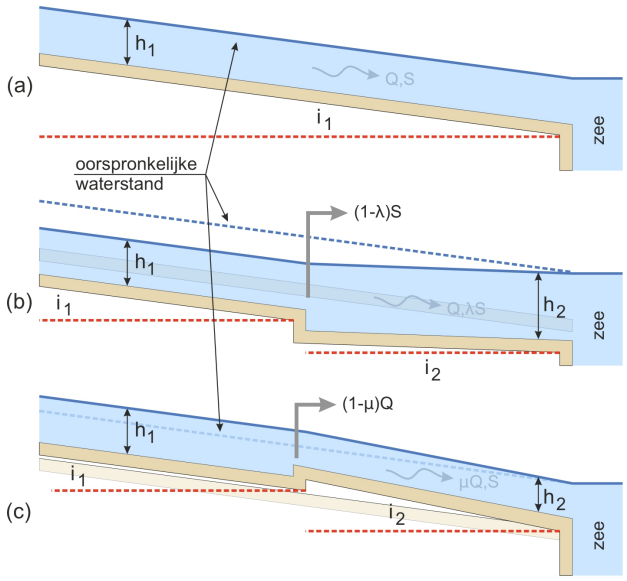
$$L_v = \frac{\Delta\zeta}{|i|}\left(\alpha^{\frac{n-3}{n}} - 1\right)^{-1}$$

(zie (6.19) met $|i_v|/|i|$ voor de verhouding $|i_2|/|i_1|$).

Een mogelijk nadeel van dit overgangstraject is dat de waterdiepte daar een factor $\alpha^{(n-1)/n}$ kleiner is dan elders in de rivier[52]. Dat kan belemmerend zijn voor scheepvaart, bijvoorbeeld.

Het omgekeerde werkt ook. Als de loop van een rivier zodanig wordt verlegd dat de lengte ervan toeneemt, treedt bovenstrooms van die verlegging aanzanding op en ontstaat na verloop van tijd een nieuw evenwicht waarbij dat bovenstroomse deel

[52]De verhouding tussen de waterdiepte h_v in het overgangstraject en de waterdiepte h elders, is gelijk aan $\alpha^{(1-n)/n}$. Dat is kleiner dan 1 en dus is $h_v < h$. Dus als we zeggen dat h_v een factor kleiner is dan h, dan is die factor gelijk aan de reciproke van $\alpha^{(1-n)/n}$.



Figuur 6.8: Schematische langsdoorsnede van het benedenstroomse deel van een rivier in het oorspronkelijke morfologisch evenwicht (figuur(a)) en nadat zich een nieuw morfologisch evenwicht heeft ingesteld bij permanente onttrekking van sediment (figuur (b)) of water (figuur (c)). De rode streeplijnen in de figuren zijn horizontaal.

hoger ligt dan oorspronkelijk. Dat kan worden voorkomen met een overgangstraject dat smaller is dan de rivier en daarbij is de waterdiepte groter.

Lokale, permanente onttrekking

Lokale onttrekking van water of sediment aan de rivier, bijvoorbeeld voor zandwinning of irrigatie, heeft ook morfologische consequenties. Als zulke onttrekkingen een permanent karakter hebben, kan dat invloed hebben op het morfologisch evenwicht. Meestal gaat het daarbij om een relatief klein deel van de totale afvoer of transport en zijn de gevolgen gering. Vaak is het zelfs de bedoeling om die gevolgen beperkt te houden en dan is het nodig om de onttrekking aan een maximum te koppelen.

Om een indruk te krijgen van de morfologische gevolgen van een lokale, permanente onttrekking, kijken we naar een rivier die bij aanvang van de onttrekking in morfologisch evenwicht verkeert. Als de onttrekking lang genoeg aanhoudt, kan zich een nieuw evenwicht ontwikkelen. Hoe zich dat verhoudt tot het oorspronkelijke evenwicht, hangt af van de omvang van de onttrekking.

De schets in figuur 6.8 van de langsdoorsnede van de rivier betreft het morfologisch evenwicht voorafgaand aan de onttrekking. Dat evenwicht wordt gekarakteriseerd door een breedte B_1, een waterdiepte h_1 en een verhang i_1. Als gevolg van een lokale, permanente onttrekking van water of sediment (of een combinatie van beide), stelt zich na verloop van tijd een nieuw morfologisch evenwicht waarin B_2, h_2 en i_2 achtereenvolgens de karakteristieke breedte, diepte en verhang zijn.

Om de invloed van de onttrekking op het morfologisch evenwicht te bepalen, kunnen we geen gebruik maken van de evenwichtsrelaties (6.16). Die gaan immers uit

van een constante afvoer en transport. Bij een onttrekking is Q en/of S benedenstrooms van de locatie van de onttrekking anders dan bovenstrooms daarvan. Dat wil zeggen dat het morfologisch evenwicht, als dat bestaat, aan weerszijden van de onttrekking past bij verschillende Q en S.

Om dit nader te duiden, kijken we eerst naar een lokale onttrekking van alleen sediment. De afvoer blijft constant en overal gelijk. Als een deel $1-\lambda$ (met $0 \leq \lambda \leq 1$) van het totale transport S wordt onttrokken, dan is bovenstrooms van de lokatie van de onttrekking het transport nog steeds S en benedenstrooms daarvan is dat λS. Ingeval van een morfologisch evenwicht, passen de bovenstroomse B_1, h_1 en i_1 bij Q en S, terwijl de benedenstroomse B_2, h_2 en i_2 passen bij Q en λS.

In plaats van (6.16) geldt voor deze situatie zodoende dat

$$\begin{aligned} S &= mQB_1^{1-n}h_1^{-n} = mC_h^n B_1 h_1^{n/2}|i_1|^{n/2} \\ \lambda S &= mQB_2^{1-n}h_2^{-n} = mC_h^n B_2 h_2^{n/2}|i_2|^{n/2} \end{aligned} \tag{6.20}$$

Volgens dezelfde redenering volgt voor een onttrekking van alleen een deel $(1-\mu)Q$ (met $0 \leq \mu \leq 1$) van de afvoer dat

$$\begin{aligned} S &= mQB_1^{1-n}h_1^{-n} = mC_h^n B_1 h_1^{n/2}|i_1|^{n/2} \\ S &= m\mu QB_2^{1-n}h_2^{-n} = mC_h^n B_2 h_2^{n/2}|i_2|^{n/2} \end{aligned} \tag{6.21}$$

Hieruit valt af te leiden dat voor een combinatie van een onttrekking van water en sediment (en aangenomen dat m en C_h in het oorspronkelijke en het nieuwe evenwicht gelijk zijn) geldt dat

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\mu}{\lambda^{1/n}}\left(\frac{B_2}{B_1}\right)^{\frac{1-n}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B_2}{B_1} = \left(\frac{\lambda}{\mu^n}\right)^{\frac{1}{1-n}}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \tag{6.22}$$

en

$$\frac{|i_2|}{|i_1|} = \frac{\lambda^{3/n}}{\mu}\left(\frac{B_2}{B_1}\right)^{\frac{n-3}{n}} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{2}{1-n}}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\frac{n-3}{1-n}} \tag{6.23}$$

Voor $\lambda = \mu = 1$ zijn deze relaties identiek aan (6.19) en (6.18). Dat was te verwachten omdat die laatste twee zijn afgeleid voor gelijke afvoer en transport.

Hoewel het nieuwe morfologisch evenwicht bovenstrooms van de onttrekking gekarakteriseerd wordt door de oorspronkelijke B_1, h_1 en i_1, doen zich daar wel veranderingen voor. Bij een onttrekking van alleen sediment, treedt bovenstrooms van de locatie van de onttrekking een daling op van waterspiegel en bodem (zie figuur 6.8). Bij een onttrekking van alleen water is dat een stijging.

Dit tegengestelde effect van en onttrekking van water en sediment suggereert dat een combinatie denkbaar is waarbij die effecten elkaar compenseren in die zin

dat bovenstrooms van de onttrekking geen morfologische veranderingen optreden. Daarvoor is het nodig dat $i_1 = i_2$, ofte wel dat

$$\frac{\lambda^{3/n}}{\mu}\left(\frac{B_2}{B_1}\right)^{\frac{n-3}{n}} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{2}{1-n}}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\frac{n-3}{1-n}} = 1$$

Zonder aanpassing van de breedte en de waterdiepte benedenstrooms van de onttrekking kan daaraan alleen worden voldaan als $\lambda = \mu = 1$, maar dan is er geen onttrekking.

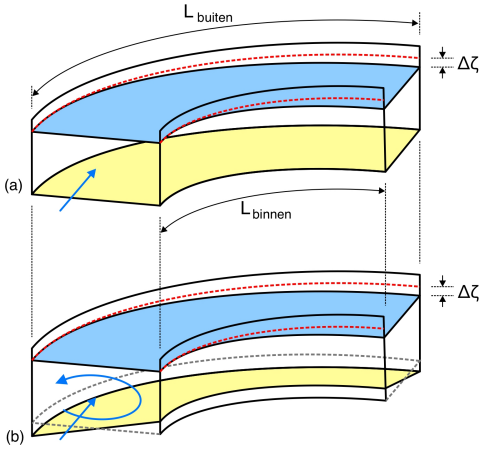
6.3.4 Dwarstransport in een bocht

Bij de bespreking (in de voorgaande paragraaf) van de lange-termijn morfologische respons op ingrepen in een rivier hebben we impliciet aangenomen dat de loop van de rivier ongewijzigd blijft. De breedte van de rivier kan veranderen en ook de waterdiepte en het verhang, maar de as van de rivier blijft waar die was. Dat is echter niet altijd het geval. Een voorbeeld daarvan is een meanderende rivier. In de inleiding (paragraaf 6.3.1) is deze vorm van rivierdynamiek kort genoemd. Als oevers en bodem van de rivier bestaan uit erodeerbaar materiaal, zullen bochten in de rivier zich naar buiten toe uitbouwen. In figuur 6.4(b) is dat schematisch weergegeven voor drie achtereenvolgende stadia en in de laatste daarvan (in de figuur aangegeven met de rode kromme) treedt bijna afsnijding op van de middelste bocht.

Het meanderen is een betrekkelijk traag maar persistent proces. Het convergeert niet in de zin dat het niet leidt tot een stationair evenwicht zoals we dat in de voorgaande paragraaf hebben gezien bij de lage-termijn respons op sommige lokale ingrepen.

Om het proces van uitbouwen van een bocht te begrijpen, is het nodig om in enig detail te kijken naar de stroming in een bocht en het daaraan gerelateerde transport van sediment. Aangenomen dat die stroming binnen de oevers blijft, volgt de over de dwarsdoorsnede gemiddelde stroming de as van de rivier. Daarnaast doet zich in elke dwarsdoorsnede van de bocht een circulatie voor waarbij de stroming in het bovenste deel van de waterkolom gericht is van de binnenbocht naar de buitenbocht en onderin de waterkolom is dat omgekeerd (zie paragraaf 3.6.3).

Deze circulatie zorgt ervoor dat sediment vanaf de oever van de buitenbocht langs de rivierbodem wordt getransporteerd naar de oever van de binnenbocht. Hierdoor erodeert de buitenbocht en sedimenteert de binnenbocht. Langs de buitenbocht wordt dus materiaal weggevoerd waardoor die bocht zich naar buiten uitbouwt. Dat materiaal wordt door de dwarscirculatie naar de binnenbocht getransporteerd en verzamelt zich daar. Daardoor bouwt die binnenbocht zich ook naar buiten uit. Het gezamenlijke effect is dat de rivierbocht zich als geheel naar buiten uitbouwt. Als dit verschijnsel zich langs de as van een rivier afwisselend naar links en naar rechts voordoet (zoals geschetst in figuur 6.4), spreekt men van meanderen.



Figuur 6.9: Schematische weergave van een bocht in een rivier. Het blauwe vlak stelt het wateroppervlak voor en het gele de bodem. De richting van de langsstroom is aangegeven met de rechte blauwe pijl en die van de dwarscirculatie met de gekromde pijl. In de bovenste figuur (a) is de bodem dwars op de as van de rivier horizontaal. In figuur (b) is het langs de buitenbocht dieper dan langs de binnenbocht. De rode en grijze streeplijnen liggen in een horizontaal vlak.

De erosie van de buitenbocht is niet beperkt tot de oever, maar betreft ook de bodem van de rivier. Door de dwarscirculatie erodeert ook de rivierbodem langs de buitenbocht waardoor deze steeds lager komt te liggen. Op dezelfde manier is sedimentatie van de binnenbocht niet beperkt tot de oever, maar leidt ook tot lokale verondieping. Dat betekent dat een rivierbodem niet alleen in langsrichting een helling vertoont, maar ook in dwarsrichting. Langs de buitenbocht is het dieper dan langs de binnenbocht. Dit is geschetst in figuur 6.9(b).

De variatie van de waterdiepte in een dwarsdoorsnede van een rivier heeft invloed op de verdeling van de diepte-gemiddelde langsstroom over de dwarsdoorsnede. Soms wordt verondersteld dat de stroomsnelheid langs de buitenbocht groter is dan die langs de binnenbocht vanwege het verschil in booglente van de buiten– en de binnenbocht. Maar dat is een misvatting. Impliciet wordt daarbij verondersteld dat waterdeeltjes als het ware hand in hand door de bocht gaan, dus als twee waterdeeltjes, de ene aan de buitenbocht en de andere aan de binnenbocht, op hetzelfde moment de bocht in gaan, zij er ook op hetzelfde moment weer uit moeten komen. Er is echter geen enkel fysisch mechanisme dat altijd tot zulk gedrag leidt.

Bij een bocht waarin de bodem in dwarsrichting horizontaal ligt (zoals geschetst in figuur 6.9(a)), neemt de snelheid van de binnenbocht naar de buitenbocht juist af omdat in die richting ook het langsverhang afneemt. Het verval $\Delta\zeta$ over het stukje rivierbocht dat in figuur 6.9 is geschetst, is over de hele dwarsdoorsnede gelijk. In dat geval is het verhang langs de buitenbocht gelijk aan $\Delta\zeta/L_{\text{buiten}}$ en langs de binnenbocht is het verhang $\Delta\zeta/L_{\text{binnen}}$. Omdat $L_{\text{buiten}} > L_{\text{binnen}}$, geldt dat $\Delta\zeta/L_{\text{buiten}} < \Delta\zeta/L_{\text{binnen}}$. Ergo, de kracht die de langsstroom aandrijft aan de buitenbocht is kleiner dan die aan de binnenbocht en daarom neemt de stroomsnelheid naar buiten toe af.

Hoewel de spiraalstroming (de combinatie van de langsstroom en de circulatie in de dwarsdoorsnede, zie paragraaf 3.6.3) in een rivierbocht typisch een 3-dimensionaal karakter heeft, kunnen we de lokale, diepte–gemiddelde langsstroming bij redelijke

benadering beschrijven met de 1–dimensionale impulsbalans

$$u|u| = -\frac{g}{c_f} h \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} \quad ; \quad c_f = \kappa^2 \left(-\ln \frac{z_0}{h} - 1 \right)^{-2} \tag{6.24}$$

voor stationaire, horizontaal uniforme stroming (zie uitdrukking (2.33)). Hieruit valt direct af te leiden dat als het verhang $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}x$ in radiale richting afneemt, de diepte–gemiddelde stroomsnelheid u dat bij constante waterdiepte h ook doet.

Voor een bodem die in dwarsrichting horizontaal is, klopt dit. In een bocht is er echter ook een circulatie in de dwarsdoorsnede. Zoals aangegeven in paragraaf 3.6.3 over bochtstroming, is die circulatie het resultaat van een balans tussen het centrifugaaleffect en een verhang waarbij de waterstand in radiale richting toeneemt. In die circulatie is de stroming in het bovenste deel van de waterkolom gericht naar de buitenbocht terwijl de stroming bij de bodem juist van de buitenbocht naar de binnenbocht is. Met die laatste wordt sediment van de buitenbocht naar de binnenbocht getransporteerd. Dat verklaart niet alleen het uitbouwen van een rivierbocht (meanderen) maar leidt er ook toe dat de rivierbodem langs de buitenbocht erodeert en langs de binnenbocht sedimenteert.

Als we rekening houden met dit morfologische effect van de circulatie in de dwarsdoorsnede, neemt de waterdiepte in radiale richting toe. Dat kan een significant effect hebben op de weerstand die de stroming in langsrichting ondervindt en daarmee ook op de verdeling van de diepte–gemiddelde langsstroomsnelheid over de dwarsdoorsnede van de bocht.

Om dat effect in beeld te brengen, herschrijven we (6.24) in termen van de poolcoördinaten (r, θ) die zijn aangegeven in figuur 3.31:

$$u_\theta |u_\theta| = -\frac{g}{c_f} h \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\theta} \tag{6.25}$$

Voor het gemak kiezen we de positieve θ-richting zodanig dat u_θ positief is en daar hoort bij dat $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}\theta < 0$. Met deze keuze kunnen we de bovenstaande uitdrukking herschrijven zonder absolute waarde:

$$\left(-g \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\theta} \right)^{-1} u_\theta^2 = \frac{h}{r c_f} \tag{6.26}$$

Vanwege de keuze met betrekking tot de θ-richting, heeft $-g\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}\theta$ een positive waarde. Bovendien is die waarde constant is over de dwarsdoorsnede van de rivierbocht.

De verandering van de diepte–gemiddelde stroomsnelheid u_θ over de dwarsdoorsnede kunnen we vinden door van (6.26) de afgeleide naar r te nemen. Dit geeft

$$\frac{\mathrm{d}u_\theta^2}{\mathrm{d}r} \propto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{h}{r c_f} \right) \tag{6.27}$$

Als het rechter lid in deze uitdrukking positief is, neemt de stroomsnelheid van de binnenbocht naar de buitenbocht toe en bij een negatief rechter lid neemt de snelheid af. Uitwerken van het rechter lid geeft

$$\frac{\mathrm{d}u_\theta^2}{\mathrm{d}r} \propto \frac{1}{r}\left(-\frac{h}{rc_f} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{h}{c_f}\right)\right) \tag{6.28}$$

en daaruit valt af te leiden dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{h}{c_f}\right) > \frac{h}{rc_f} \qquad u_\theta \text{ neemt toe met toenemende } r$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{h}{c_f}\right) = \frac{h}{rc_f} \qquad u_\theta \text{ verandert niet met } r$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{h}{c_f}\right) < \frac{h}{rc_f} \qquad u_\theta \text{ neemt af met toenemende } r$$

Kennelijk hangt het van de dwarshelling van de bodem af hoe de stroomsnelheid u_θ verloopt van de binnenbocht naar de buitenbocht. Als die dwarshelling gelijk is aan nul, veranderen h en c_f niet met r en is $\mathrm{d}u_\theta^2/\mathrm{d}r \propto -h/(r^2c_f)$. Dat is kleiner dan nul. Dat betekent dat als de bodem dwars op de as van de rivierbocht horizontaal is (zoals in figuur 6.9(a)), dan neemt u_θ naar buiten toe af. Die conclusie is eerder in deze paragraaf ook al getrokken op kwalitatieve gronden.

Hoe groot de dwarshelling kan worden, is vooral afhankelijk van de snelheid van de langsstroom, de kromtestraal van de bocht en het bodemmateriaal. De stroomsnelheid u_θ en de kromtestraal r zijn bepalend voor de centrifugaalversnelling u_θ^2/r en daarmee voor de intensiteit van de circulatie in de dwarsdoorsnede van de bocht. Door die circulatie wordt bodemmateriaal van de buitenbocht naar de binnenbocht getransporteerd en ontstaat de dwarshelling.

Bij toenemende steilheid van die helling, neemt ook de component langs de helling van het gewicht van de korrels waaruit de bodem is opgebouwd, toe. Die component is gericht naar de buitenbocht, tegengesteld aan het effect van de dwarscirculatie. Zolang de rivierbocht zich naar buiten toe blijft uitbouwen, kan zich in theorie geen evenwichtshelling vormen, maar hooguit een semi–evenwicht dat zich ontwikkelt op dezelfde tijdschaal als het uitbouwen van de bocht.

Los daarvan is er een bovengrens aan de dwarshelling die zich in een rivierbocht kan instellen. Als de bodem niet horizontaal is, ondervindt het sediment waaruit de bodem is opgebouwd als gevolg van gravitatie een kracht langs de bodem die gericht is naar de buitenbocht. De grootte van die kracht neemt toe met de dwarshelling van de bodem. De bovengrens van die helling wordt bereikt als die component van de zwaartekracht langs de bodem evenwicht maakt met de kracht die bodemdeeltjes ondervinden door de stroming die langs de bodem naar de binnenbocht is gericht.

Tot slot van deze paragraaf merken we op dat ook het Corioliseffect (zie paragraaf 5.2)) leidt tot een circulatie in de dwarsdoorsnede. Door dit effect heeft de

stroming de neiging om af te buigen naar een van de oevers waardoor de waterstand daar stijgt en op de tegenovergelegen oever daalt. Hierdoor ontstaat een drukgradiënt die tegengesteld gericht is aan de Coriolis schijnkracht. Net als bij het centrifugaaleffect op de stroming is in het bovenste deel van de waterkolom de schijnkracht groter dan de drukgradiënt en in het onderste deel van de waterkolom is dat juist omgekeerd. Bij stationaire stroming ontwikkelt dit zich in diepte–geïntegreerde zin tot een balans tussen de schijnkracht, de drukgradiënt en de bodemschuifspanning. Dit Coriolis effect doet zich overal in een rivier voor, niet alleen in bochten.

Op het noordelijk halfrond buigt de stroming als gevolg van het Corioliseffect af naar rechts (ten opzichte van de stroomrichting). Als de rivierbocht ook naar rechts is, versterken het Corioliseffect en het centrifugaaleffect elkaar. Echter, als de rivierbocht naar links is, werken beide effecten elkaar tegen en wordt de draairichting van de dwarscirculatie bepaald door welke van de twee dominant is. Een schatting daarvan kan worden ontleend aan een vergelijking tussen de centrifugaal versnelling u_θ^2/r en de Coriolis versnelling fu_θ (f is de Coriolis parameter, zie paragraaf 5.2.2). Als $u_\theta/r > f$ is het centrifugaaleffect dominant en als $u_\theta/r < f$ is dat het Corioliseffect. Voor de grote rivieren in Nederland, bijvoorbeeld, is u_θ in de orde van 1 m/s. Voorts is $f \approx 10^{-4}$ s^{-1}. Grosso modo kan voor deze rivieren zodoende worden gesteld dat als de bochtstraal kleiner is dan 10 km het centrifugaaleffect dominant is.

Meer dan een grove schatting is dit echter niet, onder meer omdat

- bij bochten waarin de versnellingen tegengesteld gericht zijn, is er een bochtstraal waarbij ze elkaar in diepte–gemiddelde zin compenseren. Dat betekent echter niet dat op elke hoogte in de waterkolom de netto versnelling gelijk is aan nul;
- in benedenrivieren waar het getij vanuit zee kan binnendringen, is de stroming afwisselend landwaarts en zeewaarts. Voor de richting van de centrifugaalversnelling in bochten maakt dat niet uit. Die is altijd naar de buitenbocht gericht. De richting van de Coriolisversnelling, daarentegen, is afhankelijk van de stroomrichting en wisselt met het getij van richting. In beginsel is dat van invloed op de ontwikkeling van de dwarshelling van de bodem in een bocht, maar die invloed is doorgaans gering.

In benedenrivieren waar het getij vanuit zee kan binnendringen, is de stroming afwisselend landwaarts en zeewaarts. Voor de richting van de centrifugaalversnelling in bochten maakt dat niet uit. Die is altijd naar de buitenbocht gericht. De richting van de Coriolisversnelling, daarentegen, is afhankelijk van de stroomrichting en wisselt met het getij van richting. In beginsel is dat van invloed op de ontwikkeling van de dwarshelling van de bodem in een bocht, maar die invloed is doorgaans gering.

6.4 Kustmorfologie

6.4.1 Inleiding

Ongeveer 70% van het aardoppervlak is bedekt met water en de overige circa 30% wordt in beslag genomen door landmassa's die van elkaar gescheiden zijn en sterk variëren in vorm en maat. De overgang tussen land en zee wordt kust genoemd. Tot hoever zeewaarts vanaf het land en landwaarts vanaf de zee wordt gesproken over kust, is context–afhankelijk. Desgevraagd zullen bijvoorbeeld ecologen, geologen, civiel ingenieurs of juristen enigszins verschillende omschrijvingen geven. In alle gevallen, echter, is de afmetingen van de kust langs de scheiding tussen land en water groter dan de afmeting dwars daarop. In engere zin wordt daarom ook gesproken van een kustlijn.

Door de versnippering van landmassa's en hun vaak grillige vorm, is er wereldwijd een enorme lengte aan kustlijn. Het is niet duidelijk hoeveel precies. Op Internet zijn schattingen te vinden die uiteenlopen van enkele honderdduizenden kilometers tot meer dan een miljoen. Veel van die verscheidenheid kan worden verklaard uit de mate van detail die bij het opmeten van de lengte van een kustlijn in beschouwing wordt genomen. Kustlijnen hebben van nature een grillige vorm. Naarmate je die grilligheid in toenemend detail meeneemt in de bepaling van de lengte, zal die lengte ook toenemen[53].

In de literatuur zijn meerdere invalshoeken te vinden waarmee een kust kan worden getypeerd. Zo kan onderscheid worden gemaakt op basis van materiaal (zoals slib, leem, zand, kiezel, rots of combinaties daarvan), vorm (boog, klif et cetera), ontstaansgeschiedenis en zo meer. En vaak hangen zulke kenmerken met elkaar samen. Zo bestond zo'n 5 eeuwen voor het begin van onze jaartelling de kust tussen de huidige Belgisch–Nederlandse grens en Den Haag uit zand met duinen, onderbroken door de mondingen van de Maas en de Schelde. En de getij–inlaat die we nu kennen als het Zwin, was er toen ook al (zie bijvoorbeeld de geologische kaarten op de website van de Rijksdient voor het Cultureel Erfgoed et al. (2022)). Stormvloeden hebben de duinenrij in de loop der eeuwen diverse malen doorbroken, waardoor het getij tot in het achterland kon doordringen. Die doorbraken hebben niet noodzakelijk een permanent karakter. Onder invloed van getij en golven kan bij gematigde condities zoveel sediment in de bres worden afgezet dat deze zich sluit en de duinenrij zich kan herstellen.

In de historie van dit gebied is echter ook relatieve stijging van de zeespiegel een

[53]Kustlijnen worden om deze reden vaak vergeleken met fractals. Dat zijn patronen die zichzelf in enige vorm herhalen als er op steeds kleinere schaal naar wordt gekeken (zie bijvoorbeeld Peitgen and Richter (1986) voor een kunstzinnige introductie in de wereld van fractals). Als die analogie met fractals volledig zou opgaan, zou de som van de lengtes van alle kustlijnen in de wereld oneindig groot zijn. In werkelijkheid is dat niet zo omdat de details van kustlijnen niet oneindig klein kunnen worden. Die kustlijnen zijn immers opgebouwd uit deeltjes met eindige afmetingen. Desalniettemin is die analogie wel stof tot nadenken (zie bijvoorbeeld Wikipedia (2024)).

factor van betekenis[54]. Door deze stijging worden de duinen ten opzichte van het zeeniveau allengs lager en daardoor gevoeliger voor stormvloeden. Tegelijkertijd kunnen duinen onder invloed van getij, golven en wind aangroeien, waarbij ook vegetatie een rol speelt. In het beschouwde kustvak kon die aangroei de stijging van de zeespiegel niet bijhouden, met als gevolg dat doorbraken langzaam maar zeker de overhand kregen. Zo is uiteindelijk de estuarine structuur ontstaan die vandaag de dag nog herkenbaar is[55].

In de fysische processen die verantwoordelijk zijn voor het morfo–dynamisch gedrag van een zandige kust, spelen vooral getij, golven, dichtheidsgradiënten (rond riviermondingen), wind en hun interacties een belangrijke rol. De invloed van golven op de grootschalige, lange–termijn ontwikkeling van de kustlijn wordt in de volgende paragrafen toegelicht. Andere effecten, zoals die van getij, dichtheidsgradiënten en wind blijven in dit boek buiten beschouwing.

In de beschouwing over de invloed van golven op het morfo–dynamisch gedrag van zandige kusten kijken we eerst naar golf–geïnduceerd transport van sediment. De stap naar de morfologische ontwikkeling van een kust maken we door te kijken naar ruimtelijke variaties in dat transport. Het zijn immers die variaties die lokaal tot sedimentatie of erosie leiden. In beginsel is dat niet anders dan wat in de voorgaande paragraaf 6.3 over riviermorfologie is genoemd. Het verschil is echter dat bij een globale beschouwing over riviermorfologie kan worden volstaan met een 1–dimensionale benadering, terwijl bij een kustgebied een 2–dimensionale aanpak nodig is. De reden daarvoor is dat de richting van golf–geïnduceerd transport van sediment niet samenvalt met die van de kustlijn. Er is wel een component van dat transport langs de kustlijn, maar ook een daar loodrecht op. Daarom maken we onderscheid tussen zogeheten langstransport en dwarstransport.

6.4.2 Golf-geïnduceerd transport

Inleiding

Het klassieke beeld van golf–geïnduceerd transport van sediment in de kustzone is dat sediment wordt opgewoeld als gevolg van breking of door de orbitaalbeweging langs de bodem en vervolgens door een netto stroming wordt getransporteerd. Dit klassieke beeld is in die zin een beetje simplistisch dat golf–gerelateerd transport niet zomaar de optelsom is van onderling onafhankelijke opwoeling door golven

[54]Met relatieve zeespiegelstijging wordt verwezen naar de stijging van het zeeniveau ten opzichte van het land. Veranderingen in het bodemniveau zijn daarin begrepen. In Nederland is sprake van bodemdaling, deels als gevolg van geologische processen en deels door menselijk handelen (zoals gaswinning en ontwatering van veengebieden). De relatieve zeespiegelstijging is daardoor groter dan de absolute. In bijvoorbeeld IJsland is dat juist omgekeerd. Door geologische processen stijgt de bodem daar sneller dan het zeeniveau, waardoor sprake is van relatieve zeespiegeldaling.

[55]In de loop der eeuwen is die structuur sterk door de mens beïnvloed. Ter wille van veiligheid tegen overstromen zijn grote delen van de kustlijn vastgelegd met dijken. En met de uitvoering van de Deltawerken zijn in de vorige eeuw enkele estuaria geheel of gedeeltelijk gescheiden van de Noordzee.

en meevoering door stroming. Maar voor een globale beschrijving van dit transport kunnen we wel van dat beeld uitgaan. Daarbij kijken we naar een lange, rechte kust met rechte, evenwijdige dieptelijnen en zonder obstakels. En we maken onderscheid tussen dwarstransport (transport loodrecht op de kustlijn) en langstransport (evenwijdig aan de kustlijn).

Dwarstransport

Stel dat golven loodrecht invallen op de lange-rechte kust die in de inleiding als uitgangspunt voor de beschouwing van golf–geïnduceerd transport is genoemd. Naarmate deze golven steeds dichter bij de kust komen en zich dus voortplanten naar steeds ondieper water, veranderen golflengte, voortplantingssnelheid en golfhoogte als gevolg van *shoaling* (zie paragraaf 4.5.2). Zolang golven niet breken, gaat dit gepaard met een geleidelijke toename van de golfspanning (de golf–gemiddelde overdracht van impuls, zie paragraaf 4.5.4).

Afhankelijk van waterdiepte, golfhoogte en –lengte zullen golven in de nadering van de waterlijn op enige afstand zeewaarts daarvan breken. Voor de relatief hoge golven gebeurt dat op grotere afstand van de waterlijn dan voor de relatief lage golven (zie paragraaf 4.7), maar grosso modo treedt golfbreking op in een redelijk af te bakenen zone parallel aan en zeewaarts van de waterlijn. Dit wordt de brekerzone genoemd. Omdat golfbreking gepaard gaat met dissipatie van golfenergie en dus met een afname van de energieflux F_{golf} in de golfrichting, neemt ook de golfspanning in die richting af. Het gevolg daarvan is dat in de brekerzone de golfspanning geleidelijk afneemt naar nul.

Kortom, dwars op de kust neemt de golfspanning in de richting van de waterlijn door *shoaling* buiten de brekerzone eerst toe en vervolgens door breking af naar nul. Deze verandering van golfspanning resulteert, vanwege behoud van impuls, buiten de brekerzone tot een stroming tegen de golfrichting in. Binnen de brekerzone is die stroming met de golven mee.

Omdat de kust een gesloten rand is, vertaalt deze stroming zich in een verhang (een drukgradiënt) dwars op de kust. In een stationaire situatie is dat verhang zodanig dat er netto geen stroming dwars op de kust is. Bij windopzet (paragraaf 3.6.2) hebben we iets soortgelijks gezien. Uiteindelijk zijn de veranderingen van de golfspanning en het verhang met elkaar in balans (zie uitdrukking (4.60)).

Dat er in een stationaire situatie geen netto stroming is, wil niet zeggen dat golven geen invloed hebben op het dwarsprofiel van de kust. In de zone waarin golven *shoalen* of breken is er een relatie tussen het brekertype, de korreldiameter van het bodemmateriaal en de gemiddelde helling in het kustdwarsprofiel. In figuur 4.20 in de paragraaf over het breken van golven (4.7) is dat aangegeven. Ruwweg kan een relatief grote waarde van de brekerparameter ($\xi_{\text{m}-1,0}$) worden geassocieerd met een steiler dwarsprofiel in de brekerzone dan een relatief kleine waarde.

Als we meer in detail kijken naar de brekerzone, dan zien we dat door het breken van golven in het bovenste deel van de waterkolom een stroming naar de kust

toe optreedt. Die wordt gecompenseerd door een kustafwaartse stroming langs de bodem. Met die laatste wordt bodemmateriaal van de kust af getransporteerd. Omdat dit proces zich afspeelt binnen de brekerzone, wordt bodemmateriaal hierdoor niet verder zeewaarts getransporteerd dan tot aan het zeewaartse uiteinde van de brekerzone.

Zeewaarts van die brekerzone doet zich een ander verschijnsel voor waarbij langs de bodem juist materiaal naar de kust toe wordt getransporteerd. Dat heeft te maken met niet–lineair gedrag van golven in *ondiep water* (Longuet-Higgins, 1953).

Bij elkaar genomen wordt, dwars op de kust, zowel vanuit zee als vanaf de waterlijn sediment getransporteerd naar de brekerlijn (de zeewaartse rand van de brekerzone). Dat sediment hoopt zich daar op waardoor een lokale verondieping ontstaat. Dat wordt een brekerbank genoemd.

Zo'n brekerbank bouwt zich ruwweg evenwijdig aan de waterlijn op en wordt hier en daar onderbroken door geulen dwars op de kust waarlangs water dat door brekende golven over die bank spoelt, terug kan stromen naar zee. Zulke geulen worden muien genoemd en de stroming daarin is de muistroom[56].

Omdat golfcondities op betrekkelijke korte termijn wisselen met weersomstandigheden en op iets langere termijn met seizoenen, heeft het dwarsprofiel van de kust geen constante vorm. Echter, als de golfcondities op grotere tijdschaal geen trendmatige verandering te zien geven, zal dat dwarsprofiel fluctueren rond een langjarig gemiddelde (althans voor wat betreft de invloed van golven). Het dwarsprofiel vertoont dan wel dynamische gedrag op korte termijn (tijdschaal van seizoenen of meer algemeen de jaarlijks terugkerende, klimaat–gebonden fluctuaties in golfcondities), maar niet op lange termijn (tijdschaal van jaren). Dit staat bekend als een dynamisch evenwicht[57]

Langstransport

Over het algemeen vallen golven niet loodrecht in op een kust. In de nadering van de kust zijn scheef invallende golven onderhevig aan zowel *shoaling* als refractie. In de voorgaande paragraaf over dwarstransport hebben we refractie buiten beschou-

[56] De zeewaartse stroming in een mui kan zo sterk zijn dat zelfs een geoefend zwemmer daar niet of nauwelijks tegenin kan. Daarom staan muien slecht bekend. Aan een muistroom valt te ontsnappen door eerst een stukje evenwijdig aan de kust te zwemmen. Daardoor kom je buiten het bereik van die sterke zeewaartse stroming en terecht in betrekkelijk rustig water waarin het makkelijker is om terug naar het strand te zwemmen.

[57] Zoals wel meer voetnoten in dit boek is ook deze een beetje *off-topic*. Bij een dynamisch evenwicht gaat het om fluctuaties die een soort van periodiek gedrag vertonen rond een waarde die op een veelvoud van de betreffende periode niet of nauwelijks met de tijd varieert. Het venijn zit vaak in dat nauwelijks. Denk bijvoorbeeld aan een signaal dat de superpositie is van twee sinusvormige componenten en een beetje ruis. Stel dat die twee sinusvormige componenten sterk verschillende perioden hebben en dat de amplitude van de component met de kleinste periode veel groter is dan die van de andere component. In een waarneming aan dat signaal over een tijdsinterval van enkele malen de de korte periode maar veel minder dan de lange, is die lang–periodieke component nauwelijks herkenbaar of wekt de indruk van een trend.

wing gelaten omdat we daar loodrecht invallende golven hebben verondersteld. De daar gegeven redenering over effecten van gradiënten in golfspanning breiden we in deze paragraaf uit naar scheef invallende golven.

Zoals uiteengezet in paragraaf 4.5.2 over refractie vertoont de golfstraal, als de waterdiepte in golfrichting afneemt, een kromming waarbij de hoek tussen de normaal op de dieptelijnen en de raaklijn aan de golfstraal afneemt (zie figuren 4.10 en 4.11). Bij het naderen van de kustlijn planten golven zich dus allengs steeds meer loodrecht op die kustlijn voort. Dat is het geval voor het gehele traject waarover *shoaling* en breking optreden. Golven vallen immers (althans in theorie) pas loodrecht op dieptelijnen in als de waterdiepte is afgenomen tot nul.

Dit wil zeggen dat nergens langs het traject waarlangs scheef invallende golven onderhevig zijn aan *shoaling*, de golfrichting loodrecht staat op de dieptelijn, zij het met uitzondering van de waterlijn waar de waterdiepte gelijk is aan nul. Dus overal langs dat traject heeft de gradiënt van de golfspanning een component dwars op de kustlijn en een component evenwijdig daaraan. Beide componenten leiden tot een overdracht van impuls van golven naar stroming (zoals uitgelegd in de voorgaande paragraaf).

Omdat de kust een gesloten rand vormt, vertaalt de component van de gradiënt in de golfspanning dwars op die kust zich in een *wave set–down* buiten de brekerzone en een *wave set–up* daarbinnen. In de voorgaande paragraaf 6.4.2 is dat verklaard vanuit de perceptie dat zich dwars op de kustlijn geen netto stroming kan voordoen omdat die kustlijn een gesloten rand vormt.

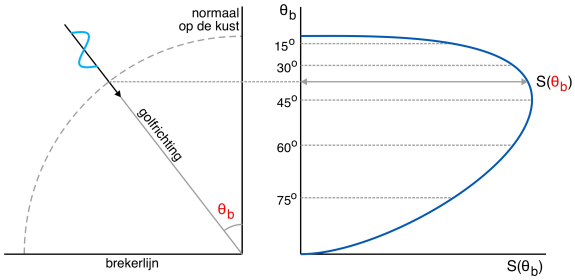
Voor de component evenwijdig aan de kustlijn ligt dat anders. Voor die component is er geen fysieke obstructie die een netto stroming verhindert. De kust–parallelle component van de gradiënt in de golfspanning leidt zodoende tot een stroming in dezelfde richting.

Met die stroming wordt sediment langs de kustlijn getransporteerd. Bij veel zandige kusten heeft dit golf–geïnduceerde transport een substantiële invloed op de morfologie. Mede daarom is naar de omvang van dit langstransport veel onderzoek gedaan. In de literatuur zijn diverse uitdrukkingen te vinden waarin het transport langs een lange, rechte kust wordt gerelateerd aan golfcondities en eigenschappen van het dwarsprofiel van de kust. Eén daarvan is de formule van Kamphuis (1991) voor het totale golf–geïnduceerde langstransport $S_{\mathrm{golf,b}}$ in de brekerzone:

$$S_{\mathrm{golf,b}} = 6,4 \times 10^4 \; H_{s,b}^2 T_p^{1,5} D_{50}^{-0,25} \tan^{0,75}(\alpha) \sin^{0,6}(2\theta_{\mathrm{b}}) \qquad (6.29)$$

waarin $H_{s,b}$ de significante golfhoogte ter hoogte van de brekerlijn (de zeewaartse rand van de brekerzone), T_p de piekperiode van de golven, θ_b de hoek tussen de golfrichting en de normaal op de kustlijn ter hoogte van de brekerlijn, D_{50} de mediane diameter van het zand in de kustzone en $tan(\alpha)$ een representatieve helling van het dwarsprofiel van de kust.

De factor $6,4 \times 10^4$ in de formule van Kamphuis is niet dimensieloos. Met deze factor is $S_{\mathrm{golf,b}}$ het transport in m^3/jaar indien $H_{s,b}$, T_p en D_{50} worden uitgedrukt



Figuur 6.10: Relatie tussen het totale langstransport $S_{\mathrm{golf,b}}$ in de brekerzone en de hoek van golfinval θ_b volgens Kamphuis (1991) voor gelijkblijvende golfhoogte, golfperiode, helling van het dwarsprofiel van de kust en korreldiameter.

in SI–eenheden. Als andere eenheden worden gebruikt, moet deze factor conform worden aangepast[58].

Een impressie van de relatie tussen het totale langstransport $S_{\mathrm{golf,b}}$ in de brekerzone en de hoek van golfinval θ_b is gegeven in figuur 6.10. In het rechter deel van deze figuur is het transport horizontaal uitgezet en de hoek van golfinval verticaal. De schaalverdeling langs de verticale as is gekozen in relatie tot het linker deel van de figuur. Als in dat linker deel een lijn wordt getekend die overeenkomt met de golfrichting en vervolgens het snijpunt van die lijn met de kwart cirkel (streeplijn) wordt geprojecteerd op de verticale as van de rechter grafiek, kan daar het bijbehorende totale langtransport worden afgelezen.

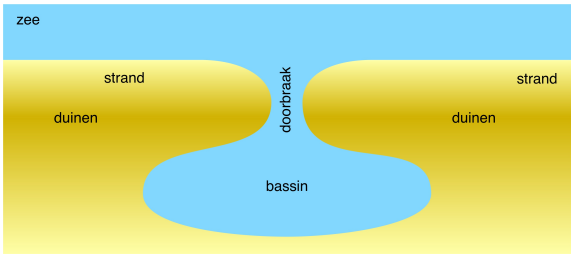
Loodrecht invallende golven genereren geen langstransport. Als golven ter hoogte van de brekerlijn onder een hoek van 45° ten opzichte van de normaal op de kust invallen, bereikt het transport voor gelijke $H_{s,b}$, T_p, α en D_{50} een maximum.

6.4.3 Morfologische ontwikkeling

Dwarsprofiel

In het algemeen past het dwarsprofiel van een kust zich betrekkelijk snel aan als golfcondities in de loop van de tijd veranderen. Als het bijvoorbeeld langs de Hollandse kust (tussen Hoek van Holland en Den Helder) vanuit het noordwesten stormt, kan door windopzet de waterlijn landwaarts verschuiven tot aan de duinen. Rondom die verschoven waterlijn is de helling van het kustprofiel relatief groot. Duinen zijn immers steiler dan het strand. Omdat die helling niet in balans is met de golfcondities, vindt een aanpassing plaats waarbij zand van de zeewaartse kant van de duinen wordt verplaatst naar het strand of verder zeewaarts. Dit wordt duinafslag genoemd.

[58] In de literatuur zijn heel wat verwijzingen naar de formule van Kamphuis te vinden waarin een andere factor wordt genoemd dan $6,4 \times 10^4$ en dat heeft niet alleen te maken met het gebruik van andere dan SI–eenheden. Wat ook uitmaakt is of het transport $S_{\mathrm{golf,b}}$ wordt uitgedrukt in massa per tijd, gewicht per tijd (waarbij onderscheid moet worden gemaakt in het gewicht onder of boven water) en volume per tijd (waarbij het gehalte aan poriën een rol speelt). Daarnaast is de gehanteerde tijdseenheid van belang (seconde, jaar of iets anders). De massadichtheid van het getransporteerde sediment is doorgaans minder aanleiding tot variatie van de factor. Daarvoor wordt doorgaans 2650kg/m^3 aangehouden.



Figuur 6.11: Schematische voorstelling van een bassin achter de duinenrij dat via een geul verbonden is met zee.

Waar duinen een natuurlijke bescherming tegen overstromen bieden, is duinafslag ongewenst maar vaak ook onvermijdelijk. Langs de Hollandse kust is dat het geval. Daarom wordt ernaar gestreefd dat overal langs deze kust zoveel zand in het dwarsprofiel van de kust (inclusief duinen) aanwezig is dat, zelfs bij een zware storm, duinafslag niet tot een doorbraak leidt. En dat is in principe mogelijk omdat die storm van eindige duur is.

Zo'n storm laat een dwarsprofiel van de kust achter dat niet in balans is met de gematigde condities die zich tussen stormen voordoen. Dat leidt doorgaans tot herstel van het gemiddelde profiel. Door een gecombineerde invloed van golven en wind groeien duinen weer aan.

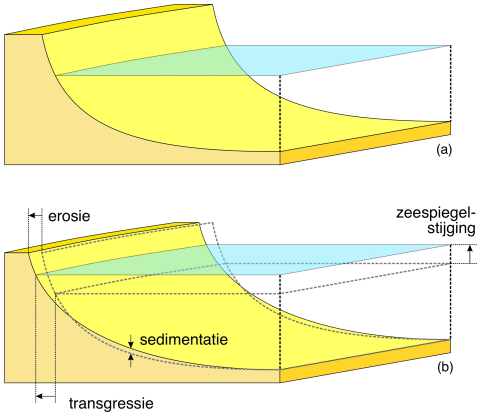
Op de tijdschaal waarop stormen en gematigde condities elkaar afwisselen is zodoende sprake van een dynamisch evenwicht van het dwarsprofiel van de kust.

In tropische gebieden variëren golfcondities aan de kust vaak met de moesson, waarbij de wind het ene halfjaar overwegend uit een significant andere richting komt dan het andere halfjaar. En dat geldt dan ook voor golven die door de wind worden gegenereerd, niet alleen qua richting maar vaak ook qua golfhoogte en –periode. Zo'n periodieke verandering van golfcondities is terug te vinden in een al even periodieke verandering in het dwarsprofiel van de kust.

Zulk dynamisch gedrag van het dwarsprofiel van de kust speelt zich af op tijdschalen in de orde van een jaar. En het blijft zich herhalen tenzij zich een incident voordoet dat geen ruimte laat voor herstel of als een proces gaande is dat zich afspeelt op een grotere tijdschaal en dat invloed heeft op de ligging van het dynamisch evenwicht of uiteindelijk de aanzet is tot een incident.

Een voorbeeld van een incident is een doorbraak van de duinenrij. Afhankelijk van de omvang van de doorbraak kan het getij doordringen tot in het gebied achter de duinen waardoor daar een bassin ontstaat dat via een geul is verbonden met de zee (zie figuur 6.11). Met de getijstroom wordt sediment uitgewisseld tussen bassin en zee. Afhankelijk van de omvang van het bassin, de afmetingen van de dwarsdoorsnede van de geul en het volume aan water dat met het getij vanuit zee naar het bassin en weer terug stroomt (het zogeheten getijprisma), kan zo'n systeem zich uitbouwen tot een evenwicht waarbij er netto geen erosie of sedimentatie optreedt, of het kan verzanden (Escoffier, 1940).

Dit type incident ligt aan de basis van het ontstaan van bijvoorbeeld de Wad-



Figuur 6.12: Schematische voorstelling van de Regel van Bruun. De bovenste figuur (a) toont een stukje kust waarvan de vorm van het dwarsprofiel rond de waterlijn past bij de heersende golfcondities. Als de zeespiegel stijgt, treedt sedimentatie op bij de vooroever en erosie bij de duinen (figuur (b)). De totale hoeveelheid zand in het dwarsprofiel blijft daarbij constant. De waterlijn verschuift landwaarts (transgressie).

denzee. De inlaten tussen de eilanden zijn ooit ontstaan uit doorbraken van de oorspronkelijk gesloten duinenrij. Het gebied achter die duinen bestond voornamelijk uit betrekkelijk makkelijk erodeerbaar veen waardoor de bijbehorende bassins konden groeien en met elkaar in verbinding komen. De stabiliteit van zulke gekoppelde systemen is aanzienlijk complexer dan van een enkelvoudig systeem met één geul en één bassin. In een systeem met twee geulen, bijvoorbeeld, kan de ene zich handhaven ten koste van de andere (Van de Kreeke and Brouwer, 2017).

Een ander voorbeeld van een inlaat is het Zwin op de grens van België en Nederland. Eeuwen terug had de Belgische stad Brugge via deze inlaat een open verbinding met de Noordzee en kon zich mede daardoor ontwikkelen tot een belangrijke handelsstad. Door inpoldering is de balans tussen het getijprisma en de afmetingen van de inlaat zodanig verstoord dat het systeem is gaan verzanden. Tegenwoordig wordt de inlaat kunstmatig in stand gehouden ter wille van het behoud van het achterliggende natuurgebied.

Naast een incident kan het morfo–dynamisch evenwicht van het dwarsprofiel van de kust ook worden verstoord door een proces dat zich afspeelt op een grotere tijdschaal dan die van de dynamiek van dat profiel. Een actueel voorbeeld daarvan is (relatieve) stijging van de zeespiegel.

Omdat het dwarsprofiel van de kust zich relatief snel aanpast aan golfcondities, heeft dat dwarsprofiel op de tijdschaal van zeespiegelstijging een vrijwel constante vorm. En die vorm stijgt mee met de zeespiegel. Dat gaat gepaard met sedimentatie van de vooroever (het gebied juist zeewaarts van de waterlijn) ten koste van het hoog gelegen deel van het strand en de duinen. Daar treedt erosie op omdat de totale hoeveelheid zand in het kustprofiel niet verandert (zie figuur 6.12). Dit mechanisme is voor het eerst beschreven door Bruun (1962) en staat bekend als de Regel van Bruun.

Als de zeespiegel stijgt, verschuiven zowel de waterlijn als het dwarsprofiel van de kust zich zodoende omhoog en landwaarts. De landwaartse verplaatsing van de waterlijn wordt transgressie genoemd. Omdat daarbij zand van de duinen naar zee

wordt verplaatst, neemt de mate waarin de duinenrij bijdraagt aan de veiligheid tegen overstromen van het achterland af.

Langs grote delen van de Nederlandse kust wordt die afname (deels) gemitigeerd door zand vanaf de zeebodem (doorgaans rond de 20m dieptelijn) naar de vooroever of het strand te brengen. Zo'n ingreep wordt een vooroever– of strandsuppletie genoemd[59] genoemd, afhankelijk van waar het zand wordt aangebracht. Om transgressie blijvend te mitigeren, moeten zulke suppleties bij tijd en wijle worden herhaald, zolang de zeespiegel stijgt.

Langsprofiel

Golf–geïnduceerd langstransport is op tal van manieren van invloed op de morfologische ontwikkeling van zandige kusten. In deze paragraaf beperken we ons tot één daarvan, en wel het effect van gradiënten in dat langstransport op de ligging van de kustlijn. We veronderstellen dat overal langs de kust op *diep–water* de golfhoogte en –periode gelijk zijn en dat ook de golfrichting daar niet varieert. Voorts nemen we aan dat er geen ruimtelijke variaties zijn in de sedimentaire samenstelling van vooroever, strand en duinen (dus dat de representatieve korreldiameter van het sediment langs de kustlijn niet varieert).

Onder zulke omstandigheden varieert het golf–geïnduceerde langstransport alleen met de hoek waaronder de golven invallen op de kust. Dat volgt direct uit de formule van Kamphuis (6.29) voor de omvang van dat transport. Langs een rechte kust is het transport overal gelijk, maar bij een gekromde kustlijn is dat niet zo omdat de hoek van inval daar langs de kustlijn varieert (zie figuur 6.13).

Voor zo'n situatie kijken we naar de morfologische ontwikkeling van de kust op een tijdschaal waarop de ligging van de kustlijn zich manifesteert. Die is groot ten opzichte van de tijdschaal waarop het dwarsprofiel van de kust zich aanpast aan veranderende omstandigheden, zodat dat dwarsprofiel bij goede benadering als een constante kan worden gezien[60]. Dit is vergelijkbaar met wat in de voorgaande paragraaf is gemeld over de respons van het dwarsprofiel van de kust op een stijging van de zeespiegel.

Met deze overweging over verschillen in tijdschalen kunnen we de beschrijving van de lange-termijn morfologische ontwikkeling van de kust, de waterlijn (of een andere dieptelijn daar in de buurt) representatief veronderstellen voor de positie van de kustlijn in het horizontale vlak. Eventuele gradiënten in langstransport

[59] In de Engelstalige literatuur heet dit een *nourishment*. Deze term is in die zin toepasselijk dat wordt weergegeven dat het dwarsprofiel van de kust wordt gevoed met sediment, waardoor de weerbaarheid toeneemt.

[60] Onder meer voor morfologische processen blijkt er een verband te zijn tussen tijdschalen en lengteschalen waarop veranderingen zich afspelen. In het algemeen geldt dat des te groter de lengteschaal, hoe groter de tijdschaal. In de morfologische ontwikkeling van bijvoorbeeld het kustvak tussen Scheveningen en IJmuiden, is de afmeting van het dwarsprofiel van de kust in de orde van een kilometer, terwijl de kustlijn in dit traject een lengte heeft van ongeveer 50 km. Vanwege de genoemde relatie tussen tijd– en lengteschalen past het dwarsprofiel van de kust zich veel sneller aan veranderingen in golfcondities aan dan de kustlijn.



Figuur 6.13: Foto van de gekromde oever van een meer waarop golven zich overal in ongeveer dezelfde richting voortplanten, maar door de kromming van de oever niet overal onder dezelfde hoek invallen op de waterlijn (de foto is gemaakt aan de noordoostelijke kant van het Tolbo meer, gelegen in het westen van Mongolië).

manifesteren zich in die schematisatie als een verplaatsing cq. vervorming van de waterlijn in dat vlak. In de modellering van de morfologische ontwikkeling van een gesloten kust wordt dit concept de *één–lijn* benadering genoemd[61].

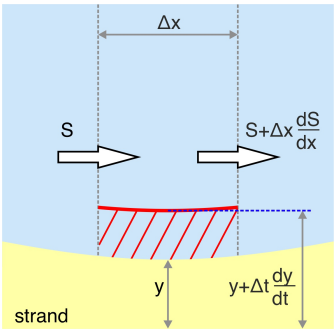
In deze paragraaf gaan we nader in op de één–lijn benadering voor de langetermijn morfologische ontwikkeling van een lange, ononderbroken, zandige kust onder invloed van ruimtelijke variaties in het golf–geïnduceerde langstransport. Een toepassing daarvan komt aan bod in paragraaf 7.4 over bescherming tegen kusterosie.

Als golfcondities langs een kustlijn variëren, verandert ook de omvang van het golf–geïnduceerde langstransport. Dat wil zeggen dat op de ene plaats meer of minder sediment wordt getransporteerd dan een stukje verderop. Als in de richting van het transport de omvang daarvan toeneemt, zal de kust eroderen en verschuift het dwarsprofiel van de kust landwaarts. Het omgekeerde geldt ook. Bij een afname van het langstransport treedt sedimentatie op, wat leidt tot een zeewaartse verplaatsing van het kustdwarsprofiel.

De mate waarin die kustlijn zee– of landwaarts verschuift, is afhankelijk van de omvang van de gradiënt in het langstransport volgens behoud van volume van sediment. Dit is schematisch weergegeven in figuur 6.14. In die figuur is een stukje kust geschetst met een lengte Δx. Het langstransport is van links naar rechts en er is sprake van een gradiënt $\mathrm{d}S/\mathrm{d}x$.

In een tijdsinterval met duur Δt neemt het volume aan sediment in het stukje kust toe met $\Delta t \Delta x \mathrm{d}S/\mathrm{d}x$. Daardoor verschuift de kustlijn zeewaarts. Als y de positie van de kustlijn is, dan is die verschuiving in duur Δt gelijk aan $\Delta t \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$. Omdat

[61] Er zijn ook meer geavanceerde benaderingen waarin de deformatie in het horizontale vlak van meerdere dieptelijnen simultaan in beschouwing wordt genomen. In de veronderstelling dat het dwarsprofiel van de kust een constante vorm heeft, heeft zo'n meer–lijn aanpak geen toegevoegde waarde. Als de morfologische modellering echter gericht is op een tijdschaal die niet groot is ten opzichte van die van aanpassingen van het dwarsprofiel, biedt de meer–lijn aanpak de mogelijkheid om ook aanpassingen van het dwarsprofiel in beeld te brengen. Voorwaarde daarvoor is dat een adequate mathematische beschrijving van de (tijdsafhankelijke) fysische processen die verantwoordelijk zijn voor het transport van sediment in het dwarsprofiel, in het model wordt geïncorporeerd.



Figuur 6.14: Bovenaanzicht van een deel van een kust waar de waterlijn gekromd is. Als gevolg van een gradiënt $\mathrm{d}S/\mathrm{d}x$ van het golf–geïnduceerde langstransport, verschuift de kustlijn zeewaarts of landwaarts. In deze figuur is de transportgradiënt negatief. Aan de linkerkant komt meer sediment het kustvak met lengte Δx binnen dan er aan de rechterkant uitgaat. Hierdoor neemt het volume aan sediment dat in het kustvak geborgen is toe, met als gevolg dat de kustlijn in het kustvak zeewaarts verplaatst. Na een periode Δt is de kustlijn in het kustvak opgeschoven naar de horizontale rode lijn. De toename van het volume is aangegeven met de rode arcering.

we kijken op een tijdschaal waarop we redelijkerwijs kunnen veronderstellen dat de vorm van het dwarsprofiel van de kust constant is, verschuift dat gehele profiel over een afstand $\Delta t\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$. Er is zodoende sprake van een toename van de hoeveelheid sediment die is geborgen in de dwarsdoorsnede van de kust van $h\Delta t\Delta x\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, waarin h de hoogte is van het dwarsprofiel van de kust.

Vanwewge behoud van volume geldt dat

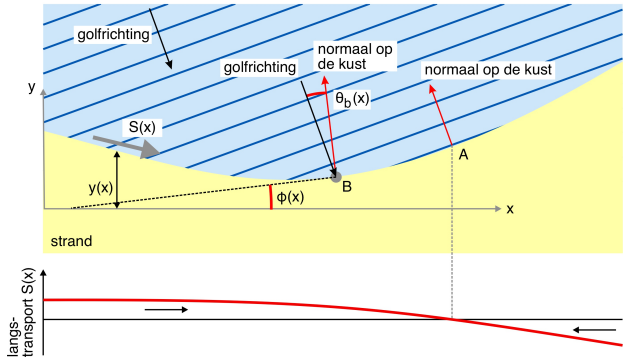
$$h\Delta t\Delta x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \Delta t\Delta x\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{6.30}$$

Na delen door $\Delta t\Delta x$ wordt dit

$$h\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \tag{6.31}$$

Er zijn tal van redenen waarom de golfcondities en daarmee het golf–geïnduceerde langstransport langs een kustlijn kunnen variëren. Voor de lange-termijn morfologische ontwikkeling van een kust is primair het golfklimaat van belang. Hoewel de golfcondities van dag tot dag kunnen variëren, zijn de daaruit voortvloeiende, dagelijkse morfologische veranderingen van een kustlijn doorgaans zo klein dat alleen het cumulatieve effect over langere tijd significant is. Uitzonderingen daarop zijn bijvoorbeeld de eerder genoemde incidenten die leiden tot een langdurig of zelfs permanent effect op de kust. Zulke incidenten laten we in deze beschouwing van het langsprofiel buiten beschouwing. We beperken ons tot een lange, ononderbroken kust en een ruimtelijk uniform golfklimaat op *diep water*. We nemen dus aan dat op geruime afstand uit de kustlijn het golfklimaat geen ruimtelijke variaties vertoont.

Bovendien schematiseren we de golfcondities op *diep water* tot een over het klimaat gemiddelde periode, hoogte en richting. Dat maakt de beschrijving van de lange–termijn morfologische ontwikkeling van een kust in de één–lijn benadering toegankelijker zonder af te doen aan onderliggende principes. We komen daar later op terug.



Figuur 6.15: Het golf–geïnduceerde langstransport S is afhankelijk van de hoek θ_b waaronder golven op de brekerlijn invallen. Door de kromming van de kustlijn varieert die hoek en dus ook S (onderste figuur). Bij punt A vallen de golven loodrecht in en is $\theta_b = 0$ en $S = 0$. In het algemeen is de hoek θ_b afhankelijk van de golfrichting op *diep water* en de richting van de raaklijn aan de kust. In punt B maakt die raaklijn een hoek ϕ met de x–as.

De veronderstelling dat zich op *diep water* geen ruimtelijke variaties voordoen in de klimaat–gemiddelde golfcondities, wil niet zeggen dat de golfcondities langs een kustlijn niet kunnen variëren. In de nabijheid van een kust kan de golfvoortplanting lokaal worden beïnvloed door bijvoorbeeld een eiland of een lokale ondiepte, al of niet erodeerbare landtongen, beschermingsconstructies zoals strandhoofden en kust–parallelle golfbrekers (waarover meer in paragraaf 7.4) en meer van zulke obstakels. In deze paragraaf laten we zulke obstakels buiten beschouwing.

In plaats daarvan kijken we naar het effect van een kromming van de kustlijn op gradiënten in het langstransport. Als gevolg van die kromming vallen golven, alhoewel ze op *diep water* overal uit dezelfde richting komen, niet langs de gehele kust ter hoogte van de brekerlijn in onder dezelfde hoek met de lokale normaal op de kustlijn. In paragraaf 6.4.2 is die hoek θ_b genoemd en is gesteld dat de omvang van het lokale golf–geïnduceerde langstransport daarvan afhankelijk is.

Dit is geïllustreerd in figuur 6.15. Bij punt A valt de normaal op de kust samen met de golfrichting en is er geen langstransport. Aan weerszijden van A is het transport naar dat punt toe gericht, althans in deze schets van een holle kustlijn. We werken dat nader uit.

In figuur 6.15 is de ligging van de kustlijn aangeduid met $y(x)$. Daarin is $(x, y(x))$ de positie van de kustlijn op de lokatie x ten opzichte van een willekeurig gekozen x–as. Met andere woorden, $(x, y(x))$ zijn de coördinaten van een punt van de kustlijn ten opzichte van een willekeurig gekozen assenstelsel. Bij een licht gekromde kustlijn kunnen we dat assenstelsel zo kiezen dat de raaklijn aan de kustlijn overal weinig afwijkt van evenwijdig aan de x–as. De hoek ϕ in figuur 6.15 is dan overal klein en dan geldt bij goede benadering dat $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \tan(\phi) \approx \phi$. In de uitwerking van de relatie tussen de transportgradiënt en de kromming van de kust maken we van deze benadering gebruik.

Voorts gaan we uit van een kleine hoek θ_b van golfinval ten opzichte van de normaal op de kust ter hoogte van de brekerlijn. Voor lange, licht gekromde kusten is dat een redelijk uitgangspunt. In de nadering van de waterlijn neigen golven immers

als gevolg van refractie (zie paragraaf 4.5.2) steeds meer naar voortplanting in een richting die loodrecht staat op de dieptelijnen. In die nadering zijn golven tegelijkertijd onderhevig aan *shoaling* (zie paragraaf 4.5.2) waarbij de golfhoogte uiteindelijk allengs toeneemt. In de nabijheid van de waterlijn breken golven (zie paragraaf 4.7) en dan is het proces van refractie over het algemeen al zo ver gevorderd dat θ_b inderdaad klein is.

Voor kleine θ_b geldt bij redelijke benadering dat $S \propto \theta_b$ en dan is[62]

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta_b}\frac{\mathrm{d}\theta_b}{\mathrm{d}x} \propto \frac{\mathrm{d}\theta_b}{\mathrm{d}x} \tag{6.32}$$

De $\mathrm{d}\theta_b/\mathrm{d}x$ in deze uitdrukking kunnen we relateren aan de kromming van de kust. Zoals te zien in figuur 6.15 is er een direct verband tussen θ_b en de hoek ϕ die de raaklijn aan de kust maakt met de x–as. Als ϕ toeneemt in x–richting, neemt θ_b met hetzelfde bedrag af en omgekeerd. Ergo, voor kleine ϕ geldt dat

$$\frac{\mathrm{d}\theta_b}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \approx -\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \tag{6.33}$$

Zodoende kunnen we schrijven dat

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \propto -\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \tag{6.34}$$

Combinatie met de sedimentbalans 6.31 leidt tot een diffusievergelijking voor de tijdsafhankelijke ontwikkeling van een kustlijn (Pelnard-Considère, 1956):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = K\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{6.35}$$

Hierin is K een diffusiecoëfficiënt die afhangt van de golfcondities, de hoogte h van het kustdwarsprofiel en andere eigenschappen van de kust die van invloed zijn op het golf–geïnduceerde langstransport. In de literatuur wordt K wel de kustconstante genoemd. Een paar opmerkingen over deze constante:

[62] Volgens de formule van Kamphuis (zie (6.29)) en ook andere formules voor het golf–geïnduceerde langstransport die in de literatuur te vinden zijn, is het langstransport S evenredig met $\sin^m(2\theta)$, waarin m een of andere macht is (in de formule van Kamphuis is $m = 0,6$). Daarmee is

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \propto \sin^{m-1}(2\theta_b)\cos(2\theta_b)\frac{\mathrm{d}\theta_b}{\mathrm{d}x}$$

Voor kleine θ_b is $\sin(2\theta_b) \approx 2\theta_b$ en $\cos(2\theta_b) \approx 1$, zodat bij benadering

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \propto \theta_b^{m-1}\frac{\mathrm{d}\theta_b}{\mathrm{d}x}$$

Voor $m < 1$, zoals in de formule van Kamphuis, leidt dit voor een lokatie langs een gekromde kust ($\mathrm{d}\theta_b/\mathrm{d}x \neq 0$) waar golven loodrecht invallen ($\theta_b = 0$) tot een oneindig grote transportgradiënt. Fysisch is dat niet juist. Daarmee is niet gezegd dat de formule van Kamphuis onzin is. Het is een geparameteriseerde beschrijving van de omvang van het langstransport en geen mathematisch model van het onderliggende fysisch proces.

- Zolang de hoeken θ_b en ϕ daadwerkelijk klein zijn, biedt (6.35) met constante K binnen de context van het één–lijn model een goede beschrijving van de ontwikkeling van de kustlijn. Bij sterke kromming van de kustlijn en/of betrekkelijk scheef invallende golven, dus als θ_b en ϕ niet allebei klein zijn, wordt K afhankelijk van die twee hoeken.
- De grootte van de kustconstante K is een indicator voor de tijdschaal waarop een kustlijn zich ontwikkelt. Bij gelijke kromming $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ is de snelheid $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ waarmee de kustlijn zich zeewaarts of landwaarts verplaatst evenredig met K.
- In de afleiding van de diffusievergelijking (6.35) hebben we gebruik gemaakt van een volumebalans (6.31) waarin de verplaatsing van de kustlijn is gerelateerd aan de gradiënt in het langstransport. Die gradiënt is mede afhankelijk van de golfcondities. Volgens alle formules voor golf–geïnduceerd langstransport is de omvang van dat transport afhankelijk van de golfhoogte ter plaatse van de brekerlijn. En dat geldt dan ook voor de gradiënt van dat transport. Dat wil zeggen dat de golfhoogte van invloed is op $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$. Daarom is K afhankelijk van de golfhoogte. Hoe hoger de golven, hoe sneller de kust zich ontwikkelt.
- Uit die volumebalans (6.31) blijkt tevens dat K afhankelijk is van de hoogte h van het kustdwarsprofiel waarvan we hebben verondersteld dat het zich (gemiddeld over langere termijn) onvervormd zeewaarts of landwaarts verschuift onder invloed van gradiënten in het golf–geïnduceerd langstransport. Impliciet hebben we die hoogte constant verondersteld, alsof het kustdwarsprofiel de overgang is tussen een eindeloze horizontale landvlakte en een al even eindeloze horizontale zeebodem. Doorgaans is dat alleen voor beperkte horizontale verplaatsingen van de kustlijn een redelijke aanname[63].

In de literatuur zijn voor diverse gevallen analytische oplossingen te vinden voor de diffusievergelijking (6.35). Een daarvan gaat over een oneindig lange kustlijn met een uitstulping in de vorm van een Gauss–kromme, gegeven door

$$y(x, t = 0) = \alpha \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_0}\right)^2\right) \tag{6.36}$$

Deze uitdrukking betreft de initiële vorm (op $t = 0$). Het meest zeewaartse punt van de uitstulping ligt op $y(x = 0, t = 0) = \alpha$ en σ_0 is een maat voor hoe geprononceerd die is.

[63] Deze beperking geldt ook en eigenlijk nog meer voor de regel van Bruun (zie figuur 6.12) voor de respons van het dwarsprofiel van een kust op een stijging van de zeespiegel. Ook Bruun gaat uit van een tijds–gemiddeld vormvast dwarsprofiel. Dat stijgt mee met de zeespiegel en vanwege behoud van volume gaat dat gepaard met een landwaartse verschuiving. De vraag die hierbij rijst, is tot hoever zeewaarts dat vormvaste dwarsprofiel reikt. In de literatuur wordt het zeewaartse uiteinde geassocieerd met een dieptelijn waarvan wordt verondersteld dat daaroverheen nauwelijks transport van sediment van en naar dieper water plaatsvindt. Dit wordt de sluitingsdiepte (*closure depth* in het Engels) genoemd. Over hoe groot die precies is, is heel wat discussie. Op conceptueel niveau doet dat niets af aan de redenering van Bruun dat zeespiegelstijging gepaard gaat met transgressie.

In de afleiding van (6.35) hebben we verondersteld dat de raaklijn aan de kust overal een kleine hoek ϕ met de x–as maakt. Bij een kustlijn in de vorm van een Gauss–kromme bereikt die hoek een maximum bij $x = \pm\sigma_0$ (dat is ter plaatse van de buigpunten van de Gauss–kromme, waar $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 0$). Ter plaatse van die maxima geldt dat $\tan\phi = +\alpha\exp(-1/2)$ (als $x = -\sigma_0$) of $\tan\phi = -\alpha\exp(-1/2)$ (als $x = +\sigma_0$). Een en ander wil zeggen dat we de ontwikkeling van de uitstulping in de vorm van de Gauss–kromme (6.36) bij goede benadering met de diffusievergelijking (6.35) kunnen beschrijven als ten minste α beperkt is. Daarnaast is het ook nodig dat overal θ_b klein is.

Naast de initiële situatie (6.36) zijn ook twee randvoorwaarden nodig om de diffusievergelijking (6.35) te kunnen oplossen. Voor een lokale uitstulping ergens langs een oneindig lange kust, is het aannemelijk dat de ligging van de kustlijn op grote afstand van die uitstulping weinig zal merken van de ontwikkeling daarvan met de tijd. Tegen deze achtergrond is het redelijk om ervan uit te gaan dat

$$y(x = -\infty, t) = y(x = \infty, t) = 0 \tag{6.37}$$

De initiële situatie (6.36) voldoet daaraan.

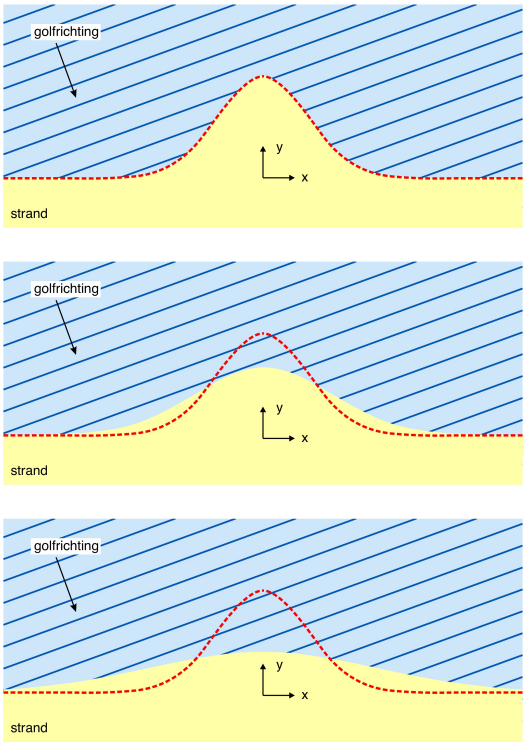
Met deze randvoorwaarden en de initiële kustlijn (6.36) volgt uit (6.35) voor de tijdsafhankelijke ontwikkeling van die kustlijn vanaf $t = 0$ dat

$$y(x,t) = \alpha\frac{\sigma_0}{\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right) \quad ; \quad \sigma = \sqrt{2Kt + \sigma_0^2} \quad ; \quad t \geq 0 \tag{6.38}$$

Ter illustratie van deze oplossing zijn in figuur 6.16 drie stadia van de ontwikkeling van de uitstulping geschetst. Dit lijkt een beetje op de Zandmotor aan de Zuidhollandse kust tussen Monster en Kijkduin. Dat is een kunstmatige uitstulping in het kustvak tussen de strekdam bij Hoek van Holland en het zuidelijke havenhoofd bij Scheveningen. Door golf–geïnduceerd langstransport moet het zand in deze uitstulping zich in de loop van jaren verspreiden tussen de beide harde begrenzingen van het kustvak. Daarmee wordt in dit gebied het dwarsprofiel van de kust versterkt ten gunste van de veiligheid tegen overstromen. En omdat natuurlijke processen zorgen voor de verspreiding van het zand, spreekt men van 'bouwen met de natuur'.

Wat opvalt aan de tijdsafhankelijke ontwikkeling (6.38) van de uitstulping op de kust, is dat het meest zeewaartse punt daarvan niet langs de kust verschuift en dat ook de symmetrie behouden blijft, onafhankelijk van de golfrichting op *diep water*. Wellicht is dat contra–intuïtief. Het is echter het directe gevolg van de vereenvoudigende veronderstellingen die hebben geleid tot een diffusiecoëfficiënt K die niet varieert met de locatie langs de kust, in combinatie met randvoorwaarden op grote afstand van de uitstulping. Hiermee is σ de enige factor die varieert met de tijd en deze heeft alleen invloed op de schaal van de uitstulping en niet op de vorm en de ligging[64].

[64] Bedenk dat de $y(x,t)$ in uitdrukking (6.38) ook kan worden geschreven als $\sigma(t)\; y((x/\sigma(t)), t)$, waaruit blijkt dat zowel x als y schalen met de tijdsafhankelijke σ.



Figuur 6.16: Drie stadia in de ontwikkeling van een uitstulping in de vorm van een Gauss-kromme op een oneindig lange kustlijn. De bovenste figuur toont de initiële ligging van de kustlijn rond het meest zeewaarts gelegen punt van de uitstulping. In de middelste figuur is de ligging van de kustlijn getoond nadat deze zich vanaf de initiële situatie onder invloed van golf–geïnduceerd langstransport over enige tijd heeft ontwikkeld. In de onderste figuur is die ligging in een volgend stadium van ontwikkeling weergegeven. Ter vergelijk is in alle drie de figuren de initiële situatie met een rode streepjeslijn aangegeven.

Bij de afleiding van de tijdsafhankelijke ontwikkeling (6.38) is gesteld dat op grote afstand aan weerszijden van de uitstulping de kustlijn op de initiële positie blijft. Dat is weerspiegeld in de randvoorwaarden $y(x = -\infty, t) = y(x = \infty, t) = 0$. Dat wil zeggen dat op zowel $x = -\infty$ als op $x = +\infty$ de kustlijn evenwijdig is aan de x–as. Op die twee locaties is het golf–geïnduceerde langstransport dus even groot. Omdat de golfcondities langs de gehele kust gelijk zijn, komt per eenheid van tijd aan het ene uiteinde precies evenveel sediment het kustvak binnen als er aan het andere uiteinde uitgaat. In afwezigheid van een netto aan– of afvoer van sediment dwars op de kust, geldt voor het kustvak zodoende behoud van volume. De tijdsafhankelijke ontwikkeling (6.38) voldoet daaraan. Met de aanname dat het dwarsprofiel overal langs de kust een gelijke, vaste vorm heeft, is het horizontale oppervlak van de uitstulping een maat voor het volume daarvan. Dat oppervlak wordt gegeven door

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha \frac{\sigma_0}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}x = \alpha\sigma_0\sqrt{2\pi} \tag{6.39}$$

en dat verandert niet met de tijd[65].

In het voorbeeld van de Zandmotor zijn naast gradiënten in golf–geïnduceerd

[65] Voor de berekening van de integraal wordt verwezen naar de literatuur. Met de zoekterm 'Gaussian integral' zijn op Internet diverse berekeningen te vinden. Een hele charmante gaat uit

langstransport ook andere factoren van invloed op de tijdsafhankelijke, morfologische ontwikkeling. Zo gaat het getij gepaard met een periodiek variërende stroming langs de kust die ook bijdraagt aan langstransport en gradiënten daarin. Daarnaast is sprake van transport van sediment dwars op de kustlijn onder invloed van golven en wind, et cetera. Zulke effecten zijn niet begrepen in (6.38). Die uitdrukking voor de tijdsafhankelijke uitdrukking moet daarom worden gezien als een eerste orde benadering die op hoofdlijnen inzicht geeft in een te verwachten morfologische ontwikkeling. In paragraaf 7.4 over constructies die erosie van een kustlijn moeten tegengaan, komt die eerste orde benadering terug.

van het kwadraat van de integraal:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Overgang naar poolcoördinaten (r,ϕ) volgens $r^2 = x^2 + y^2$ en $\tan\phi = y/x$ geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = 2\pi\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r\mathrm{d}r = \pi\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\mathrm{d}(r^2) = \pi$$

Daarmee is de integraal van $\exp(-x^2)$ gelijk aan $\sqrt{\pi}$.

7

Dijken, golfbrekers, strandhoofden en bodembescherming

7.1 Inleiding

Veel waterbouwkundige constructies zijn (ook) bedoeld om bescherming te bieden tegen ongewenste invloeden van golven, stroming of hoge waterstanden. In dit hoofdstuk besteden we aandacht aan vier typen van zulke constructies. We gaan in op enkele aspecten van het ontwerp van dijken, golfbrekers en bodembescherming. Daarnaast kijken we naar hoe strandhoofden en golfbrekers kunnen worden toegepast om kusterosie tegen te gaan.

Dijken zijn waterkeringen langs de kust of de oever van een meer, rivier of kanaal. Ze zijn bedoeld om het achterland te beschermen tegen overstromen. Aan de kust en soms ook langs de oever van een meer kunnen dijken naast een hoge waterstand ook belast worden door invallende golven, terwijl dat langs rivieren en kanalen veel minder het geval is. Dat verschil is bijvoorbeeld terug te vinden in de vorm van de dwarsdoorsnede. Bij dijken die door golven worden belast is een betrekkelijk flauw talud gunstig omdat de golfoploop daardoor wordt beperkt en daarmee de benodigde kruinhoogte.

Net als dijken kunnen golfbrekers onderdeel zijn van een kust– of oeververdediging, maar het zijn geen waterkeringen. Hun functie is het tegengaan van golfindringing in het achterliggende gebied. Rond de ingang van een haven worden vaak golfbrekers aangelegd om te voorkomen dat in– en uitgaande schepen hinder ondervinden golven en ook om het havenbekken golfluw te houden.

Hoewel strandhoofden in die zin op golfbrekers lijken dat ze door golven worden belast, hebben zij een geheel andere functie. Strandhoofden steken vanaf het strand

zeewaarts en vormen een obstakel voor de golf–geïnduceerde en getij–gerelateerde stroming langs de kust. Daarmee wordt erosie van die kust tegengegaan.

Strandhoofden ontlenen hun effect aan beïnvloeding van het fysisch mechanisme dat tot erosie leidt. Ze verstoren de stroming waarmee bodemmateriaal wordt getransporteerd. Een andere manier om erosie tegen te gaan is het aanbrengen van een beschermlaag op een bodem of oever die het onderliggende materiaal vasthoudt.

7.2 Dijken

7.2.1 Inleiding

Bij het ontwerp van veel waterbouwkundige constructies die in het water worden geplaatst, speelt de interactie tussen constructie en golven een wezenlijke rol. De constructie moet bestand zijn tegen belastingen die worden veroorzaakt door invallende golven. Tegelijkertijd worden aard en omvang van die belasting beïnvloed door de geometrie van die constructie. In deze paragraaf kijken we naar één aspect van die geometrie: het buitentalud.

Golven die op een talud invallen, lopen daartegen op. Dit verschijnsel wordt golfoploop genoemd en daarbij kan een niveau worden bereikt dat aanmerkelijk hoger ligt dan de toppen van de golven vlak voor het talud. Als het talud onvoldoende ver naar boven doorloopt, kan golfoploop leiden tot golfoverslag. Afhankelijk van de beoogde functionaliteit van de constructie waar het talud deel van uitmaakt, kan dat nadelig zijn. Zo wordt bij een dijk doorgaans veel minder overslag geaccepteerd dan bij een havenhoofd.

Bij dijken, dammen en golfbrekers kunnen golfoploop en -overslag door adequaat ontwerp wel worden beperkt, maar niet volledig uitgesloten. Eigenschappen van het talud zoals helling, ruwheid, permeabiliteit en het al dan niet aanwezig zijn van een berm zijn van invloed op oploop en overslag. Daarnaast speelt dat in een natuurlijk golfveld niet alle golven even hoog zijn, ze niet allemaal dezelfde lengte hebben en niet allemaal uit dezelfde richting komen. Daarom gaan sommige golven wel en andere juist niet gepaard met een oploop tot boven de kruin van de constructie. Als dat wel het geval is, spoelt water over constructie heen en dat kan, als het om grote hoeveelheden gaat, leiden tot schade aan het binnentalud. Voor de stabiliteit van de constructie is dat niet wenselijk. Daarom wordt het niveau van de kruin doorgaans zo gekozen dat de oploop van slechts een beperkt deel van de inkomende golven boven de kruin uitkomt. Voor dijken is dat beperkte deel vastgesteld op 2%. Ervaring heeft geleerd dat een met gras bekleed binnentalud van een dijk voor de duur van een zware storm goed bestand is tegen de bijbehorende overslag. Bij grotere overslag moet de bekleding van het binnentalud daarop worden aangepast.

Uit theoretisch en experimenteel onderzoek is gebleken dat de golfoploop, naast de al genoemde eigenschappen van het talud, afhankelijk is van de taludhelling ten

opzichte van de golfsteilheid. Deze verhouding staat bekend als de brekerparameter of Iribarren parameter (zie (4.70) in paragraaf 4.7 over golfbreking), genoteerd als ξ en gegeven door

$$\xi = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{s}} \quad ; \quad s = \frac{2\pi H}{gT^2} \tag{7.1}$$

waarin α de hellingshoek van het talud, s de golfsteilheid, H de golfhoogte en T de golfperiode.

De relatie tussen golfoploop en -overslag enerzijds en de brekerparameter ξ anderzijds is onderwerp van doorlopend, wereldwijd onderzoek. Het belang van dat onderzoek is erg groot omdat het inzicht oplevert dat cruciaal is voor verantwoord ontwerp van waterkeringen en dus voor bijvoorbeeld veiligheid tegen overstromen. In 2007 zijn onder de titel EurOtop (Van der Meer et al., 2018) resultaten gepubliceerd van grootschalig onderzoek dat in Europees verband is uitgevoerd en waarbij uitgebreid gebruik is gemaakt van metingen aan schaalmodellen en prototypen. Deze publicatie staat bekend als de Overtopping Manual (Van der Meer et al., 2018) en wordt doorlopend aangevuld met nieuwe inzichten die zijn verkregen uit vervolgonderzoek. Tevens kan online worden gerekend aan golfoploop en -overslag voor waterkeringen met uiteenlopende dwarsdoorsneden.

In navolging van dit onderzoek gebruiken we H_{m0} als karakteristieke golfhoogte en $T_{m-1,0}$ als karaketristieke golfperiode (zie paragraaf 4.6 voor de definitie van H_{m0} en $T_{m-1,0}$). Daarmee is de brekerparameter

$$\xi_{m-1,0} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{s_{m-1,0}}} \tag{7.2}$$

en de golfsteilheid

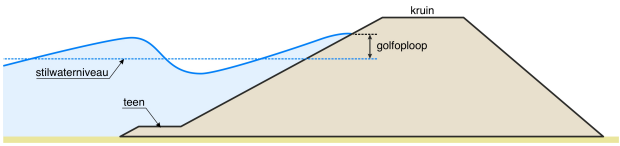
$$s_{m-1,0} = \frac{2\pi H_{m0}}{gT_{m-1,0}^2} \tag{7.3}$$

Bij dijken ligt $\xi_{m-1,0}$ doorgaans tussen 0,5 en 4,0, zodat bij het bepalen van golfoploop met alle drie genoemde brekertypen rekening gehouden moet worden. Kleinere waarden dan 0,5 (spilling breaker) komen in de natuur wel voor, zoals bij sommige stranden, maar vrijwel nooit bij waterbouwkundige constructies. Grotere waarden kunnen bij constructies wel voorkomen. In het extreme geval van een verticale wand geldt dat $\xi_{m-1,0} \to \infty$, onafhankelijk van de golfcondities. Dan is echter geen sprake meer van een talud.

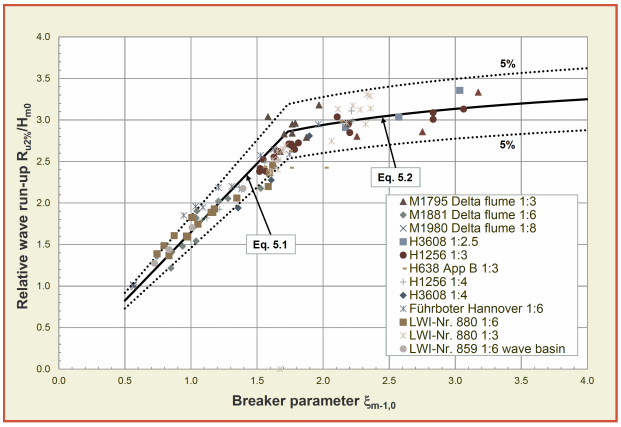
In de volgende paragrafen gaan we in op de berekening van golfoploop en -overslag voor het ontwerp van dijken. De methoden die worden besproken, zijn uitkomsten van Van der Meer et al. (2018) en zijn voor Nederland vigerende ontwerprichtlijnen.

7.2.2 Golfoploop

Bij de bespreking van golfoploop beperken we ons tot vlakke taluds, eventueel voorzien van een berm. Dat is een horizontale of bijna horizontale onderbreking



Figuur 7.1: Golfoploop op een talud wordt verticaal gemeten ten opzichte van het stilwaterniveau.



Figuur 7.2: Uitkomsten van onderzoek naar het verband tussen de brekerparameter en de relatieve golfoploop op vlakke taluds (met dank aan Van der Meer et al. (2018) voor het beschikbaarstellen van deze grafiek; auteursrechtelijk beschermd). De verwijzingen naar Eq. 5.1 en Eq. 5.2 hebben betrekking op de bron, niet op dit boek.

van het talud. Het deel van het talud boven een berm wordt bovenbeloop genoemd en het deel eronder benedenbeloop. In navolging van EurOtop (Van der Meer et al., 2018) spreken we van een berm als de helling niet groter is dan 1:15 en van een talud bij een helling van minimaal 1:8 en maximaal 1:1.

Golfoploop wordt gemeten ten opzichte van het zogeheten stilwaterniveau. Dat is de over de golven gemiddelde waterstand. De verticale afstand tussen dit niveau en het hoogste punt op het talud dat een daartegen oplopende golf bereikt, is de golfoploop. Deze definitie is geïllustreerd in figuur 7.1.

In de onderzoeken die in Van der Meer et al. (2018) zijn gebruikt, is onder meer de relatie tussen de oploop die door 2% van de invallende golven wordt overschreden (genoteerd als $R_{u,2\%}$, waarin de R verwijst naar de Engelse term *run-up*), de golfhoogte H_{m0} en de brekerparameter $\xi_{m-1,0}$ in beeld gebracht. De uitkomsten van deze onderzoeken zijn weergegeven in figuur 7.2, waarin de relatieve oploop $R_{u,2\%}/H_{m0}$ is uitgezet tegen de brekerparamter.

In figuur 7.2 is te zien dat de relatieve oploop toeneemt met de brekerparameter, maar in het onderzochte domein niet overal in gelijke mate. Bij *plunging breakers* neemt de relatieve oploop veel sneller toe met de brekerparameter dan bij *collapsing breakers* en *surging breakers*. Dit onderscheid is terug te vinden in de manier waarop in EurOtop (Van der Meer et al., 2018) de onderzoeksresultaten zijn samengevat in een algebraïsche relatie die zich leent voor ontwerpdoeleinden. Deze relatie heeft de vorm

$$\frac{R_{u,2\%}}{H_{m0}} = \min\left\{ c_1 \xi_{m-1,0} \quad ; \quad c_2 \left(4,0 - \frac{1,5}{\sqrt{\xi_{m-1,0}}} \right) \right\} \tag{7.4}$$

Volgens deze relatie varieert de relatieve oploop bij *plunging breakers* lineair met de brekerparameter terwijl deze bij *collapsing breakers* en *surging breakers* asymptotisch toeneemt met $\xi_{m-1,0}$. Als de golfsteilheid zeer klein wordt (dus bij grote $\xi_{m-1,0}$), neemt de relatieve oploop niet meer toe met de brekerparameter. De relatieve oploop is in dat geval vrijwel onafhankelijk van de taludhelling en de golfsteilheid.

Met de coëfficiënten $c_1 = 1,65$, $c_2 = 1,00$ wordt een goede weergave van het gemiddelde van de onderzoeksresultaten verkregen. De getrokken lijn in figuur 7.2 hoort bij deze waarden van de coëfficiënten. De kennelijke spreiding in die resultaten wordt in (7.4) tot uitdrukking gebracht door de twee coëfficiënten te zien als normaal verdeelde stochastische variabelen. De genoemde waarden zijn gemiddelden. De bijbehorende standaardafwijking bedraagt 0,10 voor c_1 en voor c_2 is dat 0,07. Invulling van de gemiddelden in (7.4) levert de verwachtingswaarde van de relatieve oploop bij een voorgeschreven $\xi_{m-1,0}$.

Voor probabilistisch ontwerp (waarover iets in paragraaf 9.2) kan gebruik worden gemaakt van de normaal verdeelde c_1 en c_2. Voor een deterministische aanpak beveelt EurOtop aan om uit te gaan van de gemiddelden plus één maal de standaardafwijking. Dit resulteert in

$$\frac{R_{u,2\%}}{H_{m0}} = \min \left\{ 1,75\xi_{m-1,0} \quad ; \quad 1,07 \left(4,0 - \frac{1,5}{\sqrt{\xi_{m-1,0}}} \right) \right\} \tag{7.5}$$

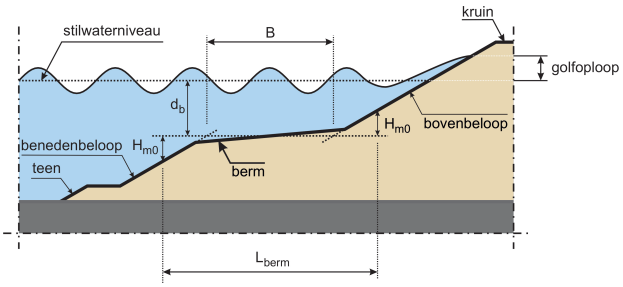
De overgang tussen de beide delen van relatie tussen relatieve oploop en brekerparameter ligt bij $\xi_{m-1,0} \approx 1,8$ (Van der Meer et al. (2018), TAW (2002b) en diverse andere publicaties). Dat is een benadering van het snijpunt van de beide delen. Voor rekenkundige toepassingen is het doorgaans beter om uit te gaan van een meer nauwkeurige benadering, zoals $\xi_{m-1,0} = 1,75$. Het onderscheid is niet fundamenteel. In dit boek hanteren we voorts $\xi_{m-1,0} = 1,75$ voor het snijpunt[66].

De relatieve oploop volgens (7.5) betreft rechte, gladde taluds waarop golven loodrecht invallen. De invloed op deze oploop van de ruwheid van het talud, de aanwezigheid van een berm en de hoek van golfinval wordt in uitdrukking verwerkt met behulp van zogeheten invloedsfactoren. Met inbegrip van deze factoren wordt (7.5)

$$\frac{R_{u,2\%}}{H_{m0}} = \begin{cases} 1,75\gamma_f\gamma_\beta\gamma_b\xi_{m-1,0} & ; \quad 0,50 \le \gamma_b\xi_{m-1,0} \le 1,75 \\ 1,07\gamma_{f,surging}\gamma_\beta \left(4,0 - \frac{1,5}{\sqrt{\gamma_b\xi_{m-1,0}}} \right) & ; \quad \gamma_b\xi_{m-1,0} > 1,75 \end{cases} \tag{7.6}$$

waarin γ_b de invloedsfactor voor een berm is, γ_β die voor de hoek van golfinval en γ_f is de invloedsfactor voor de ruwheid van het talud. Deze invloedsfactoren zijn

[66] In publicaties over golfoploop wordt $1,07(4,0 - 1,5/\sqrt{\xi_{m-1,0}})$ soms uitgewerkt tot $4,3 - 1,6/\sqrt{\xi_{m-1,0}}$. Daar zit een afronding in op 1 decimaal en als die wordt aangehouden, ligt het snijpunt bij $\xi_{m-1,0} = 1,77$, afgerond 1,8.



Figuur 7.3: Schematische weergaven van het dwarsprofiel van een buitentalud met berm.

empirisch bepaald. Omdat in het onderzoek naar deze factoren hun onderlinge samenhang nog niet volledig is belicht, moet volgens de Van der Meer et al. (2018) voor ontwerpdoeleinden de conservatieve restrictie $\gamma_f \gamma_\beta \gamma_b \geq 0,4$ worden aangehouden. De bepaling van de invloedsfactoren komt in de volgende drie paragrafen aan de orde.

Het effect van een berm wordt bij de berekening van de relatieve oploop in rekening gebracht met een reductie van de brekerparameter. Als het talud wordt onderbroken door een berm, wordt gerekend met $\gamma_b \xi_{m-1,0}$ in plaats van alleen $\xi_{m-1,0}$. Tot op zekere hoogte zou je kunnen zeggen dat door de aanwezigheid van een berm de helling van het buitentalud over het geheel genomen flauwer is dan dat van het boven- en benedenbeloop. Omdat de brekerparameter evenredig is met die helling geeft een berm aanleiding om die parameter te reduceren. Met een overeenkomstige redenering zou ook de hoek van golfinval tot een reductie van de brekerparameter moeten leiden. Bij scheef invallende golven is de helling van het talud, gemeten in de golfrichting immers flauwer dan bij loodrecht invallende golven.

7.2.3 Effect van een berm

Een berm is een (vrijwel) horizontale onderbreking van het talud. Volgens EurOtop (Van der Meer et al., 2018) is sprake van een berm bij een helling van maximaal 1:15. In figuur 7.3 is een talud met berm schematisch weergegeven. In die figuur zijn ook de maten aangegeven waarmee een berm wordt beschreven en die worden gebruikt bij de berekening van het effect van een berm op de relatieve oploop.

De grootte van de invloedsfactor γ_b hangt af van de geometrie van de berm en de vertikale positie ten opzichte van het stilwaterniveau (Van der Meer et al., 2018):

$$\gamma_b = \max \left\{ 1 - \frac{B}{L_{\text{berm}}}(1 - r_{db}) \quad ; \quad 0,6 \right\} \tag{7.7}$$

De definities van de breedtematen B en L_{berm} zijn te vinden in figuur 7.3. De verhouding B/L_{berm} in (7.7) geeft de invloed op γ_b weer van de inbedding van de berm in het dwarsprofiel. De reducerende invloed van een berm op de brekerparameter neemt af naarmate de helling van de berm toeneemt. Dit wordt verrekend

door uit te gaan van de breedte van een fictieve horizontale berm die wordt verkregen door het bovenbeloop naar beneden door te zetten en het benedenbeloop naar boven. Daarnaast neemt de effectiviteit van een berm af naarmate de hellingen van boven- en bedenbeloop afnemen. Dit is weergegeven met L_{berm}. Deze maat neemt toe met afnemende helling van de taluds aan weerszijden van de berm (zie figuur 7.3). Steeds flauwere taluds leiden zodoende tot een steeds grotere L_{berm} en daarbij nadert γ_b steeds dichter tot 1.

Met de term $1 - r_{db}$ in (7.7) wordt de invloed van de verticale positie van de berm op de brekerparameter beschreven. Hierbij wordt r_{db} gegeven door

$$r_{db} = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos\left(\pi \frac{d_b}{R_{u,2\%}}\right) & ; \quad \text{berm boven stilwaterniveau} \\ 0,5 - 0,5 \cos\left(\pi \frac{d_b}{2H_{m0}}\right) & ; \quad \text{berm onder stilwaterniveau} \end{cases} \tag{7.8}$$

waarin d_b de verticale afstand is tussen het stilwaterniveau en de gemiddelde hoogteligging van de berm (zie figuur 7.3). Bedenk dat het argument van de cosinus in (7.8) wordt uitgedrukt in radialen.

Bij een berm boven het stilwaterniveau is de invloedsfactor γ_b voor de oploop afhankelijk van die oploop zelf. Voor die situatie leidt combinatie van (7.7), (7.8) en de bovenste uitdrukking in (7.6) tot een impliciete vergelijking voor de oploop $R_{u2\%}$ die langs iteratieve weg kan worden opgelost. Met de beginschatting $\gamma_b = 1$ kan een oploop worden berekend, waarmee vervolgens een nieuwe schatting voor γ_b kan worden bepaald, et cetera. Een alternatieve beginschatting is $R_{u,2\%} = 2H_{m0}$.

Het effect van een berm neemt af met de afstand d_b tussen berm en het stilwaterniveau. Een berm die boven het stilwaterniveau ligt, heeft geen enkel effect als de oploop tegen het benedenbeloop niet tot aan de berm reikt. Voor die situatie geldt daarom de restrictie dat $\gamma_b = 1$ als d_b groter is dan of gelijk aan de $R_{u,2\%}$ voor een talud zonder berm en met dezelfde helling als het benedenbeloop.

Anderzijds, als de berm onder het stilwaterniveau ligt, kan de beperkte waterdiepte op de berm aanleiding geven tot breking. Dat reduceert de golfhoogte bij het bovenbeloop en daarmee de golfoploop. Dat effect neemt af met toenemende waterdiepte op de berm en om daar uitdrukking aan te geven, geldt tevens de restrictie dat $\gamma_b = 1$ als d_b groter is dan of gelijk aan $2H_{m0}$.

Een berm is het meest effectief als deze op het stilwaterniveau ligt. In dat geval is $d_b = 0$ zodat ook $r_{db} = 0$ en $\gamma_b = 1 - B/L_{\text{berm}}$. Combinatie met de restrictie dat $\gamma_b \geq 0,6$ levert de optimale bermbreedte $B = 0,4L_{\text{berm}}$. Voor een helling van beneden- en bovenbeloop gelijk aan $1{:}m$, vinden we dat $L_{\text{berm}} = B + 2mH_{m0}$ en in dat geval is de optimale bermbreedte $B = H_{m0}\ 4m/3$.

Als geen berm aanwezig is, is $B = 0$ en dus $\gamma_b = 1$. Voor $B > 0$ neemt de effectiviteit van de berm toe met de breedte B. Uit empirisch onderzoek is naar voren gekomen dat die toename verwaarloosbaar is als $B > 0,25gT_{m-1,0}^2/(2\pi)$. Daarom mag bij de berekening van de invloedsfactor γ_b ten hoogste $0,25gT_{m-1,0}^2/(2\pi)$ voor B in rekening worden gebracht (Van der Meer et al., 2018).

type bekleding	invloedsfactor γ_f
glad (beton of asfalt)	1
dichte, vlakke steenzetting	1
gras (3cm)	0,95
betonblokken met afgeschuinde hoeken of gaten erin	0,9
basalton	0,9
breuksteen, gepenetreerd met cementbeton	0,8
enkele laag stortsteen ($1,5 \leq H_{m0}/D_{n,50} \leq 6,0$)	0,55 .. 0,60
dubbele laag stortsteen ($1,5 \leq H_{m0}/D_{n,50} \leq 6,0$)	0,50 .. 0,55

Tabel 7.1: Voorbeelden van taludbekledingen en bijbehorende invloedsfactoren voor golfoploop (TAW (2002a), auteursrechtelijk beschermd).

7.2.4 Ruwheid van het talud

De golfoploop op een talud kan ook worden beperkt door dat talud van een ruwe bekleding te voorzien. Naarmate het oplopende water meer weerstand ondervindt, kan het minder hoog op het talud komen. Dat is echter niet de enige manier waarop met bekleding van het talud oploop kan worden beperkt. Met een hoge porositeit kan worden bereikt dat een deel van het oplopende water in de bekleding zijgt en vervolgens afstroomt. Anderzijds kan met obstakels op het talud een deel van het oplopende water worden geblokkeerd. Inmiddels zijn vele typen bekleding ontwikkeld die op een of andere manier gebruik maken van deze principes of een combinatie daarvan. In berekeningen aan golfoploop wordt het effect van bekleding weergegeven met de invloedsfactor γ_f (zie (7.6)). Bij een glad talud is γ_f gelijk aan 1 en naarmate de ruwheid van het talud de oploop beter beperkt, neemt γ_f af. Per type bekleding wordt de bijbehorende waarde van γ_f empirisch bepaald. Enkele voorbeelden zijn te vinden in tabel 7.1. Voor een uitgebreid overzicht wordt verwezen naar de Technische Adviescommissie voor de Waterkeringen (TAW, 2002a).

Ruwe bekleding is vooral effectief als deze wordt toegepast rond het stilwaterniveau. In de praktijk blijkt dat ruwe bekleding alleen zinvol is tussen $0,25R_{u2\%,\text{glad}}$ onder het stilwaterniveau en $0,50R_{u2\%,\text{glad}}$ daarboven. Hierbij is $R_{u2\%,\text{glad}}$ de golfoploop die onder voorts gelijke omstandigheden zou optreden bij een glad talud. In berekening van de oploop met (7.6) mag alleen rekening worden gehouden met ruwe bekleding die tussen deze grenzen is toegepast.

Binnen deze grenzen kunnen verschillende typen bekleding worden gecombineerd door ze in stroken aan te brengen. Een bijpassende integrale invloedsfactor voor de ruwheid wordt in zulke gevallen verkregen uit het gewogen gemiddelde van de factoren van de betreffende bekledingen. De weegfactoren zijn de afstanden waarover de bekledingen zijn toegepast. Die afstanden worden verticaal gemeten, dus niet langs het talud, maar net zoals de golfoploop in figuur 7.1. Dit gewogen gemiddelde wordt gegeven door

$$\gamma_f = \frac{\sum_i \gamma_{f,i} L_i}{\sum_i L_i} \tag{7.9}$$

waarin de index i verwijst naar een strook van de bekleding en L is de verticale afmeting de strook.

In de Van der Meer et al. (2018) is aangegeven dat ruwe bekleding op de berm niet wezenlijk bijdraagt aan reductie van de oploop. Voor het ontwerp van het buitentalud van een dijk houdt dit in dat een gladde berm als net zo effectief moet worden gezien als een ruwe. Aangezien een gladde bekleding doorgaans goedkoper is dan een ruwe, verdient een gladde berm zodoende om financiële reden de voorkeur boven een ruwe.

Combinatie van deze kanttekening bij de ruwheid van de bekleding van de berm met (7.9) laat zien dat een hellende berm altijd invloed heeft op de reductiefactor γ_f. Immers, in verticale zin heeft een hellende berm enige afmeting L in verticale zin en daaraan moet een $\gamma_f = 1$ worden gekoppeld. Dat wil zeggen dat een hellende berm, mits die valt binnen het traject tussen $0,25R_{u2\%,\mathrm{glad}}$ onder het stilwaterniveau en $0,50R_{u2\%,\mathrm{glad}}$ daarboven, het effect van een ruwe taludbekleding vermindert. Daarmee is natuurlijk niet gezegd dat een berm geen zin heeft, want op zich heeft die een reducerend effect op de oploop dat in een degelijk ontwerp altijd opweegt tegen het lokale verlies aan effect van een ruwe bekleding.

Voor samengestelde bekledingen vermelden Van der Meer et al. (2018) dat uit onderzoek naar voren is gekomen dat een combinatie van een gladde bekleding boven het stilwaterniveau en een ruwe daaronder, geen wezenlijke reductie van de golfoploop teweeg brengt. Voor zulke situaties moet worden gerekend met $\gamma_f = 1$, ook al kan volgens (7.9) met een lagere waarde worden gerekend.

Daarnaast heeft de mate waarin golven op het talud breken een wezenlijke invloed op het effect van de ruwheid van de taludbekleding op de golfoploop. De waarden voor de invloedsfactor die in tabel 7.1 zijn genoemd en het gewogen gemiddelde volgens (7.9) voor samengestelde bekledingen, zijn van toepassing voor *plunging breakers* ($\gamma_b\xi_{m-1,0} \leq 1,75$). Bij *collapsing breakers* en *surging breakers* (dus voor $\gamma_b\xi_{m-1,0} > 1,75$) neemt het effect van een ruwe bekleding af met toenemende $\gamma_b\xi_{m-1,0}$. Voor $\gamma_b\xi_{m-1,0} > 10$ heeft de ruwheid van het talud geen merkbare invloed meer op de golfoploop en voor tussenliggende waarden van $\gamma_b\xi_{m-1,0}$ kan in ontwerpberekeningen lineair worden geïnterpoleerd volgens

$$\gamma_{f,surging} = \begin{cases} \gamma_f + (\gamma_b\xi_{m-1,0} - 1,75)\frac{1-\gamma_f}{8,25} & ; \quad 1,75 \leq \gamma_b\xi_{m-1,0} \leq 10 \\ 1 & ; \quad \gamma_b\xi_{m-1,0} > 10 \end{cases} \tag{7.10}$$

waarin γ_f de invloedsfactor is die voor $\gamma_b\xi_{m-1,0} \leq 1,75$ in rekening gebracht zou worden[67].

[67] In de Van der Meer et al. (2018) is aangegeven dat moet worden geïnterpoleerd tussen $1,8 \leq \xi_{m-1,0} \leq 10$ in plaats van $1,75 \leq \gamma_b\xi_{m-1,0} \leq 10$ zoals vermeld in uitdrukking (7.10). Het verschil zit in de benadering van de $\xi_{m-1,0}$ die de overgang van *plunging* naar *surging breakers* markeert.

7.2.5 Hoek van golfinval

Golven die scheef op een talud invallen leiden tot geringere oploop dan loodrecht invallende golven. Het effect van scheve inval kan volgens Van der Meer et al. (2018) worden beschreven met een invloedsfactor γ_β volgens

$$\gamma_\beta = \begin{cases} 1 - 0,0022|\beta| & ; \quad 0^o \leq |\beta| \leq 80^o \\ 0,824 & ; \quad 80^o < |\beta| \end{cases} \tag{7.11}$$

waarin β (in graden) de hoek is tussen de richting van golfvoortplanting en de normaal op het talud.

7.2.6 Kruinhoogte van een dijk

Met een maatgevende waterstand (stilwaterniveau) en golfcondities ligt het ontwerp van het profiel van het buitentalud van een dijk helemaal niet vast. Er zijn tal van combinaties van taludhelling, wel of geen berm, type bekleding en kruinhoogte denkbaar die voldoen aan de eis dat de overslag onder maatgevende omstandigheden beperkt blijft tot 2%. Dat biedt mogelijkheden om het dwarsprofiel ook te laten voldoen aan andere eisen of wensen. Ter illustratie kijken we aan de hand van een eenvoudig voorbeeld naar het effect van het variëren van de helling van het buitentalud en de keuze om wel of geen berm aan te leggen.

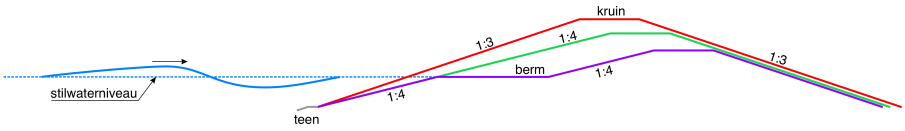
In dit voorbeeld gaan we uit van een waterdiepte van 10m ter plaatse van de teen van de dijk in combinatie met loodrecht invallende golven (H_{m0} = 7m en $T_{m-1,0}$ = 10s). Voorts kiezen we op voorhand voor een kruin met een breedte van 20m en een binnentalud met helling 1:3. Voor de benodigde kruinhoogte van de dijk maakt deze keuze niet uit. Voor het buitentalud kijken we naar 3 varianten:

1. vlak talud met een helling 1:3,
2. vlak talud met een helling 1:4 en
3. vlak talud (helling 1:4) in combinatie met een berm op stilwaterniveau.

met, ter wille van de eenvoud, in alle gevallen een gladde bekleding ($\gamma_f = 1$). In de praktijk kan natuurlijk ook worden gevarieerd met de bekleding, maar dat laten we in dit voorbeeld buiten beschouwing.

Omdat bij alle varianten $\xi_{m-1,0} < 1,75$, wordt de golfoploop gegeven door $R_{u,2\%} = 1,75\gamma_b\xi_{m-1,0}H_{m0}$. Voor de varianten 1 en 2 is $\gamma_b = 1$ omdat daar geen berm aanwezig is. Bij variant 3 is dat wel zo. Daar hebben we gekozen voor een berm op stilwaterniveau en om maximale reductie op de oploop te realiseren, kiezen we bovendien voor een zodanige bermbreedte B dat $\gamma_b = 0,6$. Daarvoor is het nodig dat $B = 0,4L_{\text{berm}}$. Met de voorgeschreven golfcondities (H_{m0} = 7m) en de gekozen taludhelling (1:4) volgt dat de berm minimaal 37,3m breed moet zijn.

Bij de bepaling van de invloedfactor γ_b geldt dat voor de bermbreedte B ten hoogste $L_0/4$ in rekening mag worden gebracht. Als de gevonden B=37,3m daar niet aan voldoet, kunnen we niet uitgaan van $\gamma_b = 0,6$, maar is $\gamma_b = 1 - 0,25L_0/L_{\text{berm}}$



Figuur 7.4: Drie varianten van het dwarsprofiel van een dijk: een vlak buitentalud met een helling van 1:3 (rood) of 1:4 (groen) of een tauldhelling van 1:4 in combinatie met een berm (paars). De kruinbreedte en de helling van het binnentalud zijn voor alle drie varianten gelijk.

en dat is groter dan 0,6. In dit voorbeeld is dat echter niet aan de orde omdat $L_0/4 = 39,0m$.

Met deze overwegingen is de golfoploop $R_{u,2\%}$ voor de drie varianten achtereenvolgens 19,3m, 14,5m en 8,7m. De bijbehorende dwarsprofielen zijn getekend in figuur 7.4, waarbij voor ieder profiel de teen op dezelfde plaats is gekozen. De tekening is vrij netjes op schaal en geeft daardoor een goed beeld van de profielen en hun onderlinge verschillen.

Vanuit economisch perspectief lijkt de variant met een berm op het eerste gezicht het meest aantrekkelijk vanwege het relatief kleine volume. Daar staat echter tegenover dat de lengte van het buitentalud, gerekend vanaf de teen tot aan de rand van de kruin aan zeezijde en inclusief de berm, groter is dan bij de beide andere varianten (lengte respectievelijk 92,7m, 101,0m en 114,5m). De kosten van het bekleden van het buitentalud zijn bij de variant met berm het grootst en het verschil in volume weegt daar niet per definitie tegen op. En naast kosten kunnen ook landschappelijke en andere functionele overwegingen een rol spelen. Zo kan een betrekkelijk hoge dijk worden gezien als horizonvervuiling en kan een berm worden gebruikt voor recreatie of worden ingericht voor wegverkeer en zo meer.

In de drie varianten hebben we de kruin van de dijk steeds op een hoogte $R_{u,2\%}$ boven stilwaterniveau gekozen, waarmee juist is voldaan aan de eis dat onder maatgevende omstandigheden de overslag niet meer dan 2%. bedraagt. In de praktijk wordt echter altijd een overhoogte toegepast van minimaal 0,5m. Voor een deel heeft dat te maken met veiligheid, maar het is ook bedoeld om bijvoorbeeld buistoten op te kunnen vangen. Dat zijn plotselinge veranderingen in de waterstand als gevolg van kleinschalige variaties in luchtdruk die zich bij de passage van een front voor kunnen doen.

De breedte van de kruin hebben we in het voorbeeld in deze paragraaf geheel arbitrair op 20m gesteld. De minimaal benodigde kruinbreedte wordt in de praktijk bepaald door wat nodig is voor aanleg en onderhoud. De kruin moet ruimte bieden aan machines en voertuigen die nodig zijn voor grondwerk, aanvoer en plaatsing van bekleding, inspectie et cetera. Bovendien is het niet ongebruikelijk om de kruin te combineren met een verkeersweg.

Maar naast zulke functionele nevendoelen speelt ook veiligheid een wezenlijke rol. Dat heeft te maken met de 2% golfoverslag die wordt toegelaten in de ontwerp-

richtlijn. Die overslag kan erosie van de kruin veroorzaken, te beginnen aan de randen aan zowel de zee- als de landzijde. Uiteindelijk leidt die erosie tot een verlaging van de feitelijk aanwezige kruinhoogte. Het gevolg daarvan is dat de golfoverslag toeneemt, waardoor de kruin verder erodeert en uiteindelijk ook het binnentalud. Dit is een vorm van progressief bezwijken[68]. Op hoofdlijnen kan dat op twee manieren worden voorkomen.

Een daarvan is versterking van de randen van de kruin zodat deze minder gevoelig zijn voor erosie. Dat is in die zin lastig omdat de overgang van de versterking naar de reguliere bekleding niet zelden ook gevoelig is voor erosie. De andere manier is om de kruin zo breed te maken dat de tijd die nodig is om de kruin over de volle breedte te laten eroderen, groter is dan de tijd waarover de erosieve (ontwerp-)omstandigheden zich voordoen. Daarmee blijft de feitelijke kruinhoogte in stand, maar moet achteraf, zodra de belasting op de dijk dat toelaat, herstelwerk worden verricht.

Tot slot van deze paragraaf nog de opmerking dat er een onderscheid is tussen de aanleghoogte en de ontwerphoogte van de kruin van de dijk. De hoogte van de kruin die nodig is om aan de eisen met betrekking tot overslag en veiligheid te voldoen, is de ontwerphoogte. Bij de constructie van de dijk moet een grotere hoogte worden aangehouden. Die constructie bestaat vooral uit het aanbrengen zand of grond (soms voor een deel klei) om het gewenste profiel te bereiken. Door klink in het opgebrachte materiaal en zettingen in de ondergrond (als gevolg van een toename van de bovenbelasting) kan de aangelegde kruinhoogte na verloop van tijd afnemen waardoor het werkelijke profiel van de dijk niet meer past bij het ontwerp. Om dat te voorkomen, wordt bij de aanleg een overhoogte toegepast (bovenop het eerder genoemde minimum van 0,5m voor buistoten en dergelijke) van circa 10% van de dikte van de aangebrachte laag. Die 10% moet worden gezien als een vuistregel die volstaat voor een schetsontwerp van een dijk. Het definitieve ontwerp behoeft precisering op basis van geotechnisch onderzoek en modellering.

7.2.7 Golfoverslag

Een zeker niet onbelangrijk bezwijkmechanisme van dijken begint met erosie van het binnentalud als gevolg van golfoverslag. Zodra de bekleding van het binnentalud niet bestand is tegen afstroom die wordt veroorzaakt door overslag, komt het onderliggende, doorgaans meer erosieve grondlichaam bloot te liggen. Het gevolg is progressieve erosie waardoor de dijk vanaf de landzijde als het ware wordt opgegeten en uiteindelijk volledig bezwijkt. Precies om deze reden wordt veel onderzoek verricht naar de weerstand van diverse typen taludbekleding tegen afstomend water. Dat onderzoek richt zich met name op natuurvriendelijke bekleding zoals gras. Dat sluit aan bij huidige maatschappelijke inzichten en past, althans in Nederland, bij de traditie om het binnentalud van een dijk te laten begrazen. Dat is minder

[68] Progressief bezwijken is een proces waarbij de effecten van verlies aan constructieve veiligheid doorlopend leiden tot meer verlies van die veiligheid.

restrictief dan het wellicht lijkt omdat kan worden gevarieerd in grassoort en ook in taludhelling. Resistentie neemt toe met afnemende taludhelling, maar dat gaat weer gepaard met toenemend ruimtebeslag (de totale breedte van het dijkprofiel neemt toe met afnemende taludhelling) en toenemende kosten (het volume van de dijk neemt ook toe). Bij het ontwerp van een dijkprofiel moeten deze voors en tegens in maatschappelijke context tegen elkaar worden afgewogen.

Van der Meer et al. (2018) gaat niet in op zulke overwegingen, maar geeft wel een empirische formule voor het overslagdebiet q (uitgedrukt in volume per tijd per eenheid van lengte gerekend langs de kruin van de dijk, in SI-eenheden $\mathrm{m^3 s^{-1} m^{-1}}$) dat mag worden verwacht bij voorgeschreven golfcondities en dijkprofiel:

$$\frac{q}{\sqrt{gH_{m0}^3}} = \frac{0,067}{\sqrt{\tan\alpha}}\gamma_b\xi_{m-1,0}\exp\left[-4,3\frac{R_c}{\xi_{m-1,0}\gamma_b\gamma_f\gamma_\beta\gamma_\nu}\right] \tag{7.12}$$

waarin R_c de hoogte van de kruin is ten opzichte van het stilwaterniveau. Deze relatie is het resultaat van empirisch onderzoek voor debieten tot $q = q_{\max}$ met $q_{\max}$ volgens

$$\frac{q_{\max}}{\sqrt{gH_{m0}^3}} = 0,2\exp\left[-2,3\frac{R_c}{\xi_{m-1,0}\gamma_f\gamma_\beta}\right] \tag{7.13}$$

De invloedsfactor γ_ν in de uitdrukking voor q heeft betrekking op een zogeheten hanekam. Dat is een richel die bovenop de kruin van dijk kan worden geplaatst om golfoverslag te beperken, bijvoorbeeld in de vorm van een damwand of een betonnen muur. Voor de bepaling van de grootte van deze invloedsfactor wordt verwezen naar Van der Meer, Allsop, Bruce, De Rouck, Kortenhaus, Pullen, Schüttrumpf, Troch, and Zanuttigh (2018).

7.3 Golfbrekers

7.3.1 Inleiding

Golfbrekers zijn primair bedoeld om een gebied te beschermen tegen nadelige effecten van golven. Volgens het Groot Woordenboek der Nederlandse Taal, beter bekend als de *Dikke Van Dale*[69] (zie Geerts and Heestermans (1992)) is een golfbreker een "stenen hoofd, strekdam enz., dienende om de kracht van de golven te breken".

Het mooie (in ieder geval in civiel–technische zin) van deze omschrijving is dat *hoofden* en *strekdammen* zijn inbegrepen, want qua type constructie liggen die dicht bij elkaar. De overwegingen en richtlijnen die in dit boek worden genoemd

[69] Het is best *off-topic* om te vermelden, maar 'Van Dale' verwijst naar Johan Hendrik van Dale (1828-1872), een veelzijdig persoon die in het dorp Sluis op de grens van Zeeuws Vlaanderen en België onder meer naam heeft gemaakt als hoofdonderwijzer. Hij was zeer begaan met taal en initiator van het woordenboek dat zijn naam (bij het schrijven van dit boek al bijna twee eeuwen) in zich draagt.

met betrekking tot golfbrekers, kunnen ook worden gebruikt voor hoofden en strekdammen.

Van oudsher zijn golfbrekers aangelegd om rond de ingang van zeehavens een golf– en stromingsluwe omgeving te creëren zodat schepen daar betrekkelijk veilig de haven in of uit kunnen navigeren. Het gaat daarbij om constructies die vanuit de kust over een afstand van orde 100 meter tot soms enkele kilometers zeewaarts steken. Meestal worden dat havenhoofden genoemd.

Bijvoorbeeld rond de ingang van de haven van Scheveningen zijn havenhoofden aangelegd. Die haven is begin 20^{e} eeuw gerealiseerd en sindsdien is er veel aan veranderd, waaronder twee keer een uitbreiding en een verlenging van de havenhoofden.

Die verlenging was onder meer nodig om aanzanding in, en dus verondieping van de haven te beperken. De ingang van deze haven met de beide havenhoofden, vormen een obstructie in een dynamische, zandige kust. Langs deze kust wordt doorlopend sediment getransporteerd onder invloed van golven en getij. Door de havenhoofden wordt dit transport lokaal voor een deel onderbroken. Omdat het netto transport bij Scheveningen in noordelijke richting is, treedt sedimentatie op ten zuiden van het zuidelijke havenhoofd en erosie ten noorden van het noordelijke hoofd (zie paragraaf 6.4.3). Naarmate dit proces vordert, passeert een steeds groter deel van het langstransport de ingang van de haven.

Een gevolg hiervan is dat bij vloed steeds meer sediment de haven in wordt getransporteerd. Bij eb gaat niet al dat sediment de haven weer uit. Dat heeft te maken met asymmetrie van het getij[70] Bij elke getijcyclus blijft zodoende wat sediment achter in de haven.

Hoe verder de havendammen vanaf de kustlijn zeewaarts steken, hoe kleiner dit effect is (zie paragraaf 6.4.3). Als het gaat om reductie van aanzanding in een haven zoals die van Scheveningen, heeft verlengen van havenhoofden dus zin.

In andere toepassingen van golfbrekers is het beïnvloeden van golfgeïnduceerd transport van sediment geen bijwerking maar juist een bedoeld effect. Strandhoofden zijn daar een voorbeeld van. Strikt genomen zijn dat geen golfbrekers omdat die niet tot doel hebben om de kracht van golven te breken (zoals het in Van Dale (Geerts and Heestermans, 1992) staat). Het primaire doel van strandhoofden is het blokkeren van langstransport van sediment. In die functie staan ze bloot aan golfbelasting en daar moeten ze dus tegen bestand zijn, net als golfbrekers.

Om golfgeïnduceerd langstransport plaatselijk te blokkeren of in ieder geval te reduceren, worden ook zogeheten kust-parallelle golfbrekers toegepast (zie ook paragraaf 6.4.3). Ook al wordt er hetzelfde effect mee beoogd, zijn dit in de strikte zin van het woord wel golfbrekers, anders dan strandhoofden.

[70] Hoewel het volume water dat bij vloed de haven ingaat gelijk is aan het volume dat bij eb uitstroomt, zijn de bijbehorende stroomsnelheden niet gelijk. Bij vloed is de stroomsnelheid groter dan die bij eb omdat de waterdiepte bij vloed gemiddeld kleiner is dan die bij eb.

Waar het gaat om het weren van golven, zijn golfbrekers en zeedijken (zie paragraaf 7.2) tot op zekere hoogte aan elkaar verwant. Beide typen constructies worden blootgesteld aan golfbelastingen en in beide gevallen spelen die condities, naast waterstand, een primaire rol in de ontwerpcriteria. Een wezenlijk verschil is de toelaatbaarheid van een eventueel verlies aan functionaliteit.

Bij een dijk heeft verlies aan functionaliteit veel ernstiger consequenties dan bij een golfbreker. Een dijk is bedoeld om kwetsbaar gebied te beschermen tegen overstroming. Die kwetsbaarheid heeft te maken met aanwezigheid van mensen, natuur, infrastructuur en ga zo maar door. Het achterland van een doorsnee golfbreker is niet overeenkomstig kwetsbaar.

Als een havenhoofd bij zwaar weer schade oploopt, heeft dat tot gevolg dat de golfcondities rond de ingang van de haven tijdelijk (voor de duur van het zware weer) ongunstig zijn voor schepen die de haven willen aandoen of verlaten. Dat staat in geen verhouding tot de schade die zich voordoet bij een overstroming als gevolg van verlies aan functionaliteit van een dijk. Dit verschil in schadetolerantie tussen een golfbreker en een dijk toont zich onder meer in de ontwerprichtlijnen die voor beide constructies worden gehanteerd. In paragraaf 7.3.2 komen we hierop terug.

Golfbrekers zijn er in diverse uitvoeringen (zie bijvoorbeeld Verhagen et al. (2009)). Zonder volledigheid te pretenderen noemen we er drie:

stortstenen golfbrekers , opgebouwd uit stortsteen met aan de buitenkant een laag betrekkelijk grote elementen (natuursteen of beton) die hun stabiliteit ontlenen aan gewicht en onderling verband (haakweerstand);

caisson golfbrekers zijn op betrekkelijk grote waterdiepte economisch vaak aantrekkelijker dan stortstenen golfbrekers vanwege een beperkter volume;

drijvende golfbrekers hebben primair een dempend effect, zijn bij grote waterdiepten economisch aantrekkelijker dan stortstenen of caisson golfbrekers en lenen zich goed voor multifunctionele toepassingen[71].

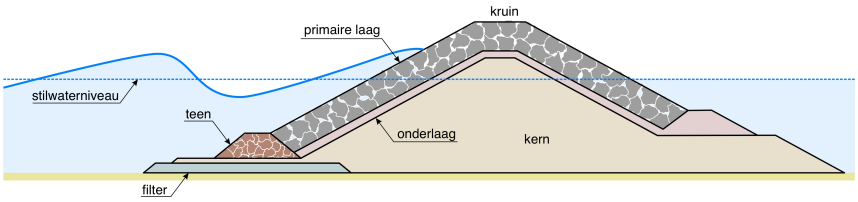
In de volgende paragraaf kijken we naar de opbouw van stortstenen golfbrekers en het ontwerp van de primaire (buitenste) laag. Andere uitvoeringen blijven in dit boek buiten beschouwing.

7.3.2 Stortstenen golfbreker

Een typische dwarsdoorsnede van een traditionele stortstenen golfbreker is geschetst in figuur 7.5. In deze figuur komen de golven van links en is de golfbreker bedoeld om doordringing van golven in het gebied rechts te voorkomen.

De kern van dit type golfbreker wordt gewoonlijk opgebouwd uit zogeheten *quarry run*. Dat is materiaal uit een steengroeve dat achter blijft bij de productie van be-

[71] Een voorbeeld daarvan is de drijvende golfbreker bij de haven van Monaco die ook plaats biedt aan een wandelpromenade en een parkeergarage. Voorts zijn drijvende constructies in ontwikkeling die het dempen van golven combineren met het winnen van golfenergie.



Figuur 7.5: Principe van de dwarsdoorsnede van een traditionele stortstenen golfbreker.

trekkelijk grote stenen en fracties met specifieke graderingen. Normaal gesproken is dit materiaal niet bestand tegen de (golf)condities waarop de golfbreker wordt ontworpen omdat het om betrekkelijk kleine, lichte stenen gaat. Het is daarom niet geschikt voor de buitenste lagen van die constructie, maar wel voor de opbouw van de kern.

Twee kanttekeningen die hierbij kunnen worden gemaakt, zijn

- dat niet alle *quarry run* geschikt is voor de kern van een golfbreker of soortgelijke constructie. Tijdens de aanleg, operationele fase en uiteindelijke verwijdering cq. vervanging van de constructie kan een deel van het materiaal van de kern vrijkomen en schade aan het milieu berokkenen. Daarbij gaat het voornamelijk om relatief fijn materiaal dat makkelijk wordt uitgespoeld. Om dat te voorkomen of op z'n minst te beperken, kan het materiaal vooraf worden gefilterd. Daarnaast zijn technieken ontwikkeld (en nog steeds in ontwikkeling) om ongewenste verspreiding van met name fijn materiaal tijdens aanleg en verwijdering tegen te gaan om schadelijke invloed op het milieu te voorkomen.
- dat volgens moderne inzichten de dwarsdoorsnede van een golfbreker niet vormvast hoeft te zijn (wat wel zo is bij een traditionele golfbreker waar we in deze paragraaf vanuit gaan). De gedachte hierachter is dat de natuur (in casu de golven) die dwarsdoorsnede best een beetje mag boetseren zolang de functionaliteit onder ontwerpcondities op orde blijft. Een belangrijke overweging hierbij is dat dit boetseren doorlopend kan worden gevolgd zodat waar en wanneer nodig reparatief kan worden ingegrepen.

De primaire, buitenste laag van een golfbreker moet bestand zijn tegen de golfcondities waarop de constructie is ontworpen. Deze laag strekt zich uit over het grootste deel van het buitentalud (aan de kant waar de golven vandaan komen) tot over de kruin naar een deel van het binnentalud. De reden om de primaire laag door te zetten naar het binnentalud heeft onder meer te maken met golfoverslag en dat golfaanval vanaf de lijzijde niet kan worden uitgesloten.

Onderaan het buitentalud moet een filterconstructie voorkomen dat door een combinatie van stroming langs de golfbreker en golf-geïnduceerde stroming de bodem onder de teen van de golfbreker erodeert. Die teen vormt het fundament van de primaire laag en als die bezwijkt door erosie van de bodem is de stabiliteit van de primaire laag niet langer gewaarborgd.

Het steengewicht dat nodig is voor de teen is doorgaans kleiner dan dat in de primaire laag omdat de golfbelasting op de constructie afneemt met de afstand tot het stilwaterniveau.

Afhankelijk van het steengewicht dat nodig voor de primaire laag en wat aanwezig is in de kern, kunnen tussen beide een of meerdere onderlagen worden toegepast. Die onderlagen moeten voorkomen dat relatief fijn materiaal van de kern via de poriën in de primaire laag wordt uitgespoeld. Qua functionaliteit zijn die onderlagen vergelijkbaar met een geometrisch dicht granulair filter (zie paragraaf 7.5).

Voor een schetsontwerp van de primaire laag kan gebruik worden gemaakt van de formule van Hudson (1953):

$$W = \frac{\rho g H^3}{k_D \Delta^3 \cot \alpha} \tag{7.14}$$

waarin W het steengewicht, H de golfhoogte, α de hellingshoek van het buitentalud[72] en k_D is een schadefactor. Deze factor is een maat voor de schade aan de golfbreker die toelaatbaar is bij blootstelling aan ontwerpcondities.

Anders dan bijvoorbeeld bij een dijk, is enige schade aan de constructie bij een golfbreker best toelaatbaar. De reden daarvoor is dat het effect van vermindering van functionaliteit bij een golfbreker als regel veel geringer is dan bij een dijk. Als bijvoorbeeld een golfbreker die dienst doet als havenhoofd bij zulke condities verlies aan functionaliteit oploopt, betekent dit dat de betreffende haven voor zolang als de ontwerpcondities aanhouden minder bereikbaar is voor schepen en dat minder schepen kunnen uitvaren. Dat is doorgaans van een heel andere orde dan schade die gepaard gaat met verlies aan functionaliteit van een dijk omdat een het achterland (deels) overstroomt. Er wordt wel gezegd dat een golfbreker die bij blootstelling aan ontwerpcondities geen schade oploopt, eigenlijk te duur is.

Voorwaarde bij deze redenering is dat de schade aan de golfbreker wordt hersteld zodra de golf– en stromingscondities dat toelaten. Om te bepalen welke omvang van schade dan toelaatbaar is, moet een economische afweging worden gemaakt tussen kosten van aanleg en die van herstel. Naarmate de golfbreker op steeds zwaardere condities wordt ontworpen, nemen de kosten van aanleg toe. Tegelijkertijd zal herstel van schade minder vaak nodig zijn en de daaraan gerelateerde kosten nemen dus af[73]. Als vuistregel voor stortstenen golfbrekers geldt $k_D \approx 3$.

Met de overweging dat het steengewicht W evenredig is met de derde macht van een of andere karakteristieke diameter D, als in

$$\frac{W}{\rho g} \propto D^3 \tag{7.15}$$

[72] Bedenk dat $\cot \alpha = 1/\tan \alpha$.

[73] Dit lijkt op de economische afweging bij de optimalisatie van het ontwerp van maatregelen ter voorkoming van overstroming zoals uiteen gezet in paragraaf 9.3.

kan de formule van Hudson worden geschreven als

$$\frac{H}{\Delta D} \propto (k_D \cot\alpha)^{1/3} \tag{7.16}$$

Het linker lid van deze uitdrukking staat voor de verhouding van de golfbelasting H en sterkte ΔD en is daarmee van dezelfde vorm als uitdrukking (6.1) voor de Shields parameter. Deze verhouding wordt de stabiliteitsparameter genoemd.

De formule van Hudson is gebaseerd op schaalproeven waarbij alleen is gekeken naar regelmatige, betrekkelijk steile golven. Bovendien gaat de formule voorbij aan de invloed van de golfperiode op de belasting. Dat beperkt de toepasbaarheid van de formule. Voor een eerste schatting van de stenen die nodig zijn voor de primaire laag van een stortstenen golfbreker kan de formule wel worden gebruikt met $D_{n,50}$ voor de steendiameter D en $1,27H_s$ (dat is de hoogte die door circa 10% van de golven wordt overschreden) voor de golfhoogte H (zie CIRIA, CUR, CETMEF (2007)). Daarmee wordt (7.16)

$$\frac{H_s}{\Delta D_{n,50}} = \frac{(k_D \cot\alpha)^{1/3}}{1,27} \tag{7.17}$$

Voor een gedetailleerd ontwerp van stortstenen golfbrekers wordt tegenwoordig meestal gebruik gemaakt van de formule van Van der Meer (1988). Deze formule is gebaseerd op resultaten van een omvangrijke serie schaalproeven met onregelmatige golven. Voor golfcondities waarbij ter hoogte van de teen van de golfbreker sprake is van *diep water* (zie hoofdstuk 4), is uit deze resultaten afgeleid dat

$$\frac{H_s}{\Delta D_{n,50}} = \begin{cases} c_p P^{0,18} \left(\frac{S}{\sqrt{N}}\right)^{0,2} \xi_m^{-0,5} & ; \quad \xi_m < \xi_{cr} \\ c_s P^{-0,13} \left(\frac{S}{\sqrt{N}}\right)^{0,2} \xi_m^P \sqrt{\cot\alpha} & ; \quad \xi_m \geq \xi_{cr} \end{cases} \tag{7.18}$$

waarin $c_p = 6,2$, $c_s = 1,0$ en

$$\xi_{cr} = \left(\frac{c_p}{c_s} P^{0,31} \sqrt{\tan\alpha}\right)^{\frac{1}{P+0,5}} \tag{7.19}$$

In deze formule is $\xi_m = \tan\alpha / \sqrt{2\pi H_s/(gT_m^2)}$ de brekerparameter[74]. De kritische waarde ξ_{cr} markeert het onderscheid tussen *plunging breakers* ($\xi_m < \xi_{cr}$) en *surging breakers* ($\xi_m \geq \xi_{cr}$; zie ook paragraaf 4.7 over breking van golven).

Voorts is P een coëfficiënt voor de doorlatendheid van de golfbreker (tussen 0,1 voor nauwelijks doorlatende constructies en 0,6 voor goed doorlatende), N is het

[74] Zie ook (7.2); bedenk dat ξ_m en $\xi_{m-1,0}$ wel vergelijkbaar zijn, maar niet identiek. Ze zijn gebaseerd op verschillende karakteristieke waarden van de golfperiode. T_m is de gemiddelde periode.

aantal golven dat op de golfbreker invalt en S is een parameter voor de omvang van schade die zich bij golfaanval voordoet. Deze parameter is gedefinieerd als $S = A/D_{n,50}^2$ waarin A het oppervlak van de schade is (gemeten in de dwarsdoorsnede van de golfbreker). Hierbij gaat het om de afname van de totale oppervlakte van de dwarsdoorsnede van de golfbreker doordat stenen daaruit zijn losgeraakt bij golfaanval. Dat die losgeraakte stenen wellicht elders toevoegen aan de dwarsdoorsnede, doet in dit verband niet ter zake.

Toepassing van de formules van Hudson en Van der Meer is niet beperkt tot stortstenen golfbrekers van het traditionele type zoals afgebeeld in figuur 7.5. Ook voor het ontwerp van dammen en oeverbekleding die bloot staan aan golfaanval kunnen deze formules worden gebruikt.

7.4 Bescherming tegen kusterosie

7.4.1 Inleiding

Kusterosie is het verminderen van het areaal aan strand of duin als gevolg van natuurlijke processen waarin bijvoorbeeld golven, getij of wind een rol spelen, of door menselijke ingrepen die natuurlijke processen zodanig beïnvloeden dat erosie ontstaat of wordt versterkt. In veel gevallen is kusterosie ongewenst, bijvoorbeeld als het gepaard gaat met een reductie van veiligheid tegen overstromen, aantasting van infrastructuur of verlies van natuurwaarden.

In paragraaf 6.4.2 is geschetst hoe gradiënten in golf–geïnduceerd langstransport van invloed zijn op de morfologische ontwikkeling van een kust. Op basis van het diffusiemodel van Pelnard-Considère (1956) (zie uitdrukking (6.35)) is gesteld dat, in het algemeen, een holle kust de neiging heeft om aan te zanden terwijl een bolle kust erodeert. Dat diffusiemodel verbeeldt de interactie tussen transportgradiënten enerzijds en de ontwikkeling van de kustlijn anderzijds. De morfologische ontwikkeling die zich voordoet onder invloed van golven leidt tot een verandering van het effect van die golven. Immers, als de kustlijn als gevolg van transportgradiënten van vorm verandert, doet de hoek waaronder golven op de kustlijn invallen dat ook en dat heeft weer consequenties voor de ruimtelijke variaties in golf–geïnduceerd langstransport. In afwezigheid van andere invloeden dan golven, leidt deze interactie uiteindelijk tot een evenwicht in de vorm van een rechte kustlijn waarlangs het golf–geïnduceerde transport geen gradiënten vertoont.

In de praktijk is die natuurlijke neiging naar een evenwicht lang niet altijd een argument om te berusten in optredende erosie. Een voorbeeld daarvan is het kustvak tussen Hoek van Holland en Scheveningen. Voor aanleg van de Zandmotor had de kustlijn daar een overwegend bolle vorm[75] en was onderhevig aan erosie.

[75]Het zuidelijke deel van dit kustvak heeft sinds de jaren '70 van de vorige eeuw een holle vorm. Zand dat indertijd vrijkwam bij de aanleg van Europoort is bij Hoek van Holland op de kust gebracht in een circa 150 hectare grote driehoek. Dit gebied staat bekend als de Van Dixhoorndriehoek, genoemd naar de bedenker van deze ingreep die tot doel had de kust ter plaatse te versterken. In de afgelopen decennia heeft deze driehoek zich grotendeels van nature

Als die erosie ongehinderd voort zou gaan, zou, althans in theorie, onder invloed van golven op termijn een rechte, stabiele kustlijn in dit kustvak ontstaan (aangenomen dat golven hierin dominant zijn). De vraag is echter waar die uiteindelijke kustlijn ligt ten opzichte van woongebieden en infrastructuur achter de duinen. Bovendien is het de vraag of een stabiele kustlijn in dit geval kan bestaan. De ontwikkeling van de kustlijn wordt immers niet uitsluitend door golf–geïnduceerde transport bepaald, maar ook door transport dwars op de kust en over de randen (de strekdam bij de Nieuwe Waterweg in het zuiden en het zuidelijke havenhoofd van Scheveningen in het noorden), beide door getij en golven. En op de tijdschaal van de morfologische ontwikkeling van de kust kan transgressie als gevolg van zeespiegelstijging (zie paragraaf 6.4.2) niet op voorhand worden verwaarloosd.

Kwalitatief en kwantitatief inzicht in het complex van deze processen ligt aan de basis van een beslissing om wel of niet in te grijpen en zo ja, hoe. In het voorbeeld van het kustvak tussen Hoek van Holland en Scheveningen heeft men in het verleden gekozen voor ingrijpen in de vorm van het aanleggen van een serie strandhoofden (de zogeheten Delflandse hoofden). Dat zijn dammen dwars op de kustlijn die vanaf het strand enkele tientallen meters zeewaarts reiken en het golf–geïnduceerd langstransport onderbreken of tenminste afremmen. Hoe dat effectief kan zijn in preventie van kusterosie, is het onderwerp van paragraaf 7.4.2.

Strandhoofden worden niet alleen in Nederland maar op tal van plaatsen in de wereld toegepast. Een willekeurig voorbeeld is Jumeirah Beach in Dubai waar in de afgelopen decennia intensief is gewerkt aan stabilisering van de kustlijn en landaanwinning. Langs die kust worden ook zogeheten kust–parallelle golfbrekers toegepast om erosie tegen te gaan. Zulke constructies zijn erop gericht om lokaal het golf–geïnduceerd langstransport te onderdrukken door golven reeds zeewaarts te laten breken van de brekerlijn die er zou zijn zonder die golfbrekers. Dit komt erop neer dat energie van invallende golven deels wordt gedissipeerd en daardoor niet beschikbaar is voor het genereren van een langsstroom waarmee sediment wordt getransporteerd. In paragraaf 7.4.3 gaan we kwalitatief in op de werking van dit type bescherming tegen kusterosie.

Een ander voorbeeld van kust–parallelle golfbrekers is te vinden in Spanje, bij Puerto Benús (Marbella). Ook in Italië, bij Isola Sacre (Rome), zijn golfbrekers toegepast om kusterosie te pareren. Daar liggen de golfbrekers niet evenwijdig aan maar onder een geringe hoek met de kustlijn. Bovendien liggen ze zo dicht bij elkaar dat de kust er zo ongeveer mee is dichtgetimmerd. En dat nadert tot een andersoortig alternatief: de kustlijn volledig vastleggen met een harde verdediging (zie paragrafen 7.3) en 7.5.

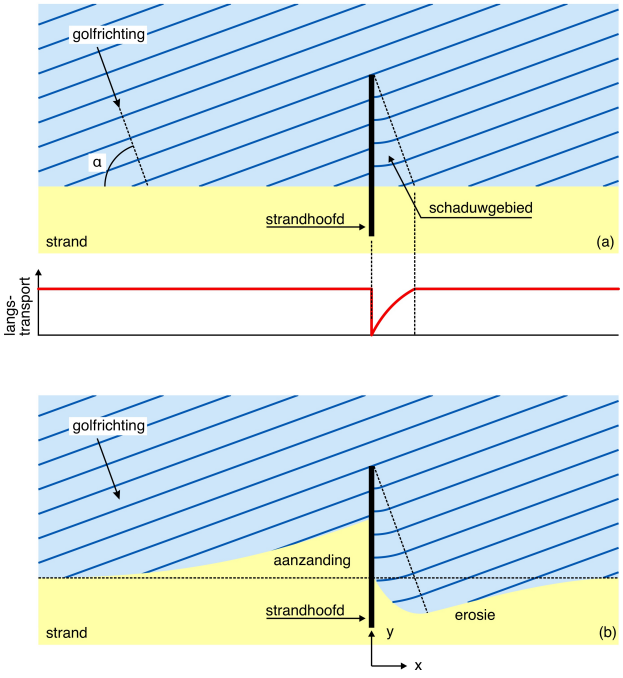
7.4.2 Strandhoofden

Een strandhoofd verstoort het golf–geïnduceerde langstransport en heeft daarmee invloed op de morfologische ontwikkeling van een zandige kust. Om daar

ontwikkeld tot een rijk duinlandschap.

een indruk van te krijgen, maken we gebruik van het diffusiemodel van Pelnard-Considère (1956) (zie paragraaf 6.4.3 over langstransport). We gaan uit van een aanvankelijk rechte kustlijn waarbij op een enkele locatie het golf–geïnduceerde langstransport wordt onderbroken door een strandhoofd. Dit is geschetst in figuur 7.6(a). Voor aanleg van het strandhoofd was de kustlijn recht en was het langstransport overal even groot en van links naar rechts. Er waren dus geen gradiënten in langstransport en de kustlijn was stabiel in de zin dat er geen zee– of landwaartse verschuivingen optraden.

De tijd die nodig is om het strandhoofd te realiseren, is klein ten opzichte van de tijdschaal van morfologische veranderingen van de kustlijn die erdoor teweeg worden gebracht. In de modellering van die veranderingen kunnen we de aanleg van het strandhoofd daarom zien als een plotselinge ingreep. Op $t = 0$ was dat ding er opeens. Gemakshalve veronderstellen we dat het langstransport door het strandhoofd volledig wordt geblokkeerd. Dat wil zeggen dat het langstransport ter plaatse van het strandhoofd vanaf $t = 0$ plotseling en blijvend gelijk is aan nul. In figuur 7.6(a) is dat aangegeven in de grafiek waarin het verloop van het langstransport langs de (initiële) kustlijn is geschetst.



Figuur 7.6: De aanleg van een strandhoofd leidt tot een onderbreking van het golf–geïnduceerde langstransport (figuur (a)), wat leidt tot aanzanding aan de kant van het strandhoofd waar het langstransport vandaan komt. In het schaduwgebied aan lijzijde van het strandhoofd wordt het golfpatroon en dus ook het golf–geïnduceerde langstransport bepaald door diffractie rond het zeewaartse uiteinde van het strandhoofd. Initieel neemt het langstransport in dat schaduwgebied met de afstand tot het strandhoofd geleidelijk toe tot het oorspronkelijke niveau. Dat leidt tot erosie.
Figuur (b) geeft een impressie van de ligging van de kustlijn als dat proces van aanzanding en erosie over enige tijd is gevorderd. De vorm van de kustlijn links van het strandhoofd wordt beschreven door Pelnard-Considère (1956) (uitdrukking (7.21)).

We kijken eerst naar het gebied links van het strandhoofd, dus aan de kant waar het transport vandaan komt (links in figuur 7.6). Voor specifiek de situatie van een

aanvankelijk rechte kustlijn waarbij het langstransport plotseling op een of andere locatie volledig wordt onderbroken, heeft Pelnard-Considère (1956) een analytische oplossing van de diffusievergelijking (7.21) afgeleid. Die oplossing is gebaseerd op de randvoorwaarden dat

- op zeer grote afstand links van het strandhoofd de kust op de oorspronkelijke positie blijft,
- het langstransport ter plaatse van het strandhoofd gelijk is aan nul (dus dat de kustlijn daar loodrecht staat op de golfrichting) vanaf het moment ($t = 0$) dat het strandhoofd het langstransport onderbreekt en
- de kustlijn tot dat moment $t = 0$ recht is.

Voor de mathematische beschrijving van de ontwikkeling van de kustlijn vanaf het moment $t = 0$ waarop het strandhoofd het langstransport onderbreekt, kiezen we een x–as waarvan de richting samenvalt met die van de oorspronkelijke, rechte kustlijn en $x = 0$ overeenkomt met de positie van het strandhoofd. Bovendien neemt x toe in de richting van het langstransport zoals dat overal langs de kustlijn optrad voor aanleg van het strandhoofd. De ligging y van de kustlijn is afhankelijk van plaats x en tijd t, dus $y = y(x, t)$. Voor aanleg van het strandhoofd wordt de kustlijn gegeven door $y(x, t \leq 0) = 0$.

Met deze keuzen luiden deze randvoorwaarden achtereenvolgens

$$\lim_{x\to-\infty} y(x,t) = 0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0,t\geq 0} \perp \text{golfrichting} \quad ; \quad y(x, t < 0) = 0 \tag{7.20}$$

waarbij x een coördinaat langs de kust is, positief in de richting van het oorspronkelijke sedimenttransport en met $x = 0$ ter plaatse van het strandhoofd (zie figuur 7.6) en y de ligging van de kustlijn is als functie van locatie x langs de kust en tijd t.

De oplossing voor $x \leq 0$ en $t \geq 0$, luidt

$$y(x,t) = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{4Kt}\,\exp\left(-\frac{x^2}{4Kt}\right) + x\sqrt{\pi}\left(1+\text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Kt}}\right)\right)\right) \tag{7.21}$$

waarin α de hoek is tussen de richting van golfvoortplanting en de x–as (zie figuur 7.6(a)). Voorts is $\text{erf}(u)$ de error–functie, gedefinieerd als

$$\text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{7.22}$$

Deze analytische oplossing is afgeleid voor de kant van het strandhoofd waar het golf–geïnduceerde langstransport vandaan komt (links in figuur 7.6). De kustlijn neemt de vorm aan van een boog waarbij het golf–geïnduceerde langstransport naar het strandhoofd toe geleidelijk afneemt naar nul ter plaats van dat hoofd. Dat is het gevolg van een al even geleidelijke afname van de golfgedreven langsstroom in de brekerzone (zie paragraaf 4.5.4). Die laatste gaat, vanwege continuïteit, gepaard met een zeewaartse stroming over de volle lengte van de zich ontwikkelende holle

kustboog. Omdat de bijbehorende stroomsnelheden gering zijn en in zeewaartse richting afnemen omdat de waterdiepte in die richting toeneemt, wordt doorgaans nauwelijks sediment meegevoerd. Dat blijft achter waardoor de kustlijn zeewaarts kan uitbouwen.

Aan lijzijde van het strandhoofd (rechts in figuur 7.6) treedt erosie op. Op het moment dat het strandhoofd is aangelegd ($t = 0$) is er ter plaatse van dat strandhoofd geen langstransport maar onder invloed van invallende golven direct rechts daarvan wel. Deze discontinuïteit in het langstransport leidt rechts van het strandhoofd tot erosie. Als het strandhoofd het golfpatroon niet zou beïnvloeden, zou de kustlijn aan lijzijde zich ontwikkelen volgens het spiegelbeeld van de oplossing van Pelnard-Considère (1956) voor de aanzanding.

Door het strandhoofd wordt het golfpatroon echter wel verstoord. Zo kunnen golven op het strandhoofd breken en er deels overheen slaan. Als het strandhoofd een beetje open structuur heeft, kan ook transmissie optreden. Doorgaans belangrijker voor de morfologische ontwikkeling is dat in een gebied aan lijzijde van het strandhoofd het golfpatroon in hoge mate wordt bepaald door diffractie (zie paragraaf 4.5.3) rond het zeewaartse uiteinde van het strandhoofd. In figuur 7.6(a) is dat het schaduwgebied genoemd.

In dat schaduwgebied neemt het langstransport onder invloed van de invallende golven met de afstand tot het strandhoofd (langs de kust gemeten) toe tot het oorspronkelijke niveau. Direct rechts van het strandhoofd vallen de golven loodrecht op de oorspronkelijke ligging van de kustlijn in. Op die plaats is er geen langstransport maar wel een gradiënt in dat transport waardoor erosie optreedt. Verder naar rechts neemt de hoek waaronder de golven invallen op de oorspronkelijke kustlijn toe en dat geldt grosso modo ook voor de golfhoogte op de brekerlijn. Beide factoren leiden ertoe dat direct na aanleg van het strandhoofd het langstransport geleidelijk toeneemt van nul direct naast het strandhoofd tot wat het in de ongestoorde situatie was aan de rand van het schaduwgebied (zie het verloop van het initiële langstransport in figuur 7.6(a)).

Na verloop van tijd ontwikkelt dit zich tot een vorm van de kustlijn aan lijzijde van het strandhoofd zoals geschetst in figuur 7.6(b). De stippellijn in deze figuur markeert de grens van het schaduwgebied waarin het golfpatroon wordt bepaald door diffractie rond het zeewaartse uiteinde van het strandhoofd. Langs die stippellijn is de golfrichting gelijk aan die in de ongestoorde situatie. Waar die stippellijn de waterlijn snijdt, vallen de golven loodrecht in en staat de raaklijn aan die waterlijn loodrecht op de golfrichting. Verder aan lijzijde van het strandhoofd ontwikkelt de kust zich ongeveer conform het spiegelbeeld van de oplossing (7.21) voor de aanzanding.

Bovenstaande beschouwing laat zien dat, letterlijk, enerzijds van een strandhoofd aanzanding optreedt en anderzijds erosie. Toepassing van een enkel strandhoofd om kusterosie tegen te gaan is dus slechts aan één kant daarvan effectief en heeft als bijsluiter dat de erosie aan de andere kant toeneemt. Als dat niet acceptabel is, kan een serie van strandhoofden worden toegepast. Om de werking daarvan

te illustreren, kijken we naar een serie van twee strandhoofden langs een initieel rechte kust. Dit is geschetst in figuur 7.7. In die figuur zijn de strandhoofden in de richting van het golf–geïnduceerd langstransport genummerd ① en ②.

Gemakshalve veronderstellen we dat de strandhoofden geen sediment doorlaten. Dat betekent dat direct na aanleg van de beide hoofden het sediment in het tussengelegen kustvak daar is opgesloten (althans in de veronderstelling dat er dwars op de kustlijn geen transport is). Gradiënten in het golf–geïnduceerde langstransport leiden in dit kustvak tot een herverdeling van sediment die uitmondt in de kustlijn waarlangs de golven overal loodrecht invallen. Dit is geschetst in figuur 7.7(a). Tegelijkertijd treedt links van strandhoofd ① aanzanding op en rechts van strandhoofd ② erosie.

Omdat het volume sediment in het kustvak tussen ① en ② constant is, stabiliseert de kustlijn zich daar na verloop van tijd. Dat geldt echter niet voor de aanzanding links van ① en de erosie rechts van ②. Die beide processen gaan door.

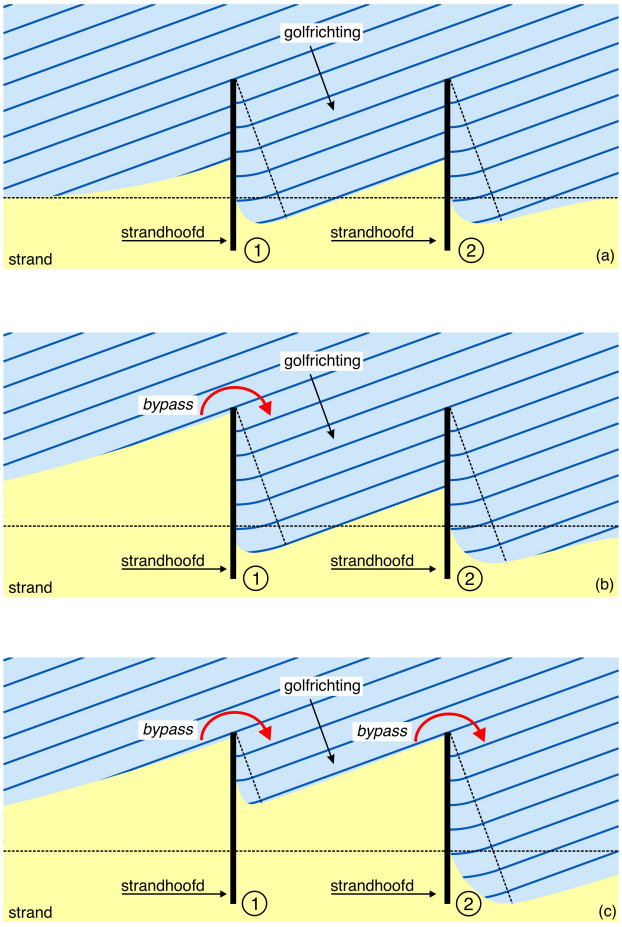
Na verloop van tijd zal de aanzanding links van strandhoofd ① het zeewaartse uiteinde daarvan bereiken en kan sediment langs dat uiteinde worden getransporteerd naar het kustvak tussen ① en ② (zie figuur 7.7(b)). Doorgaans gaat een deel van het transport rond de kop van ① verloren naar dieper water en het andere deel komt terecht in het kustvak tussen ① en ②. Daardoor zal de kustlijn in dat vak zich zeewaarts verplaatsen zonder van vorm te veranderen. De tijdschaal waarop de herverdeling van sediment zich binnen dat kustvak afspeelt is klein ten opzichte van die van de zeewaartse verplaatsing van de kustlijn.

Deze zeewaartse verplaatsing van de kustlijn in het kustvak tussen de beide strandhoofden zal er uiteindelijk toe leiden dat die kustlijn net links van strandhoofd ② het zeewaartse uiteinde daarvan bereikt. Zodra zich dat voordoet zal ook rond de kop van dat strandhoofd sediment worden getransporteerd dat deels terecht komt op de kust rechts van ②.

Gedurende dit gehele proces is de kust rechts van strandhoofd ② vanaf het moment van aanleg van de strandhoofden onderhevig aan erosie. Pas als zich een *bypass* rond strandhoofd ② voordoet, wordt die erosie afgeremd. De mate waarin dat gebeurt is afhankelijk van het verlies van sediment naar dieper water langs het gehele veld van strandhoofden. Zolang sprake is van verlies, zal de erosie voortduren. In de literatuur wordt dit het probleem van de *end-groyne* genoemd (*groyne* is het Engelse woord voor strandhoofd). Dit kan worden gemitigeerd door kunstmatig sediment op de kust aan te brengen in het gebied waar de erosie zich voordoet.

Tot slot van deze paragraaf merken we op dat

- ook voor een serie van strandhoofden analytische oplossingen bestaan voor de tijdsafhankelijke ontwikkeling van de kustlijn. Bijvoorbeeld Valsamidis and Reeve (2020) geven zulke oplossingen waarin ook rekening is gehouden met *bypasses* en permeabiliteit van strandhoofden, maar niet met diffractie in het schaduwgebied naast een strandhoofd.



Figuur 7.7: Drie opeenvolgende stadia in de ontwikkeling van een initieel rechte kustlijn (aanggeven met de streeplijn) in een veld met twee strandhoofden ① en ②. In het kustvak tussen de beide hoofden neemt de kustlijn een stabiele vorm aan waarbij de golven overal loodrecht invallen, terwijl links van ① aanhoudend aanzanding optreedt en rechts van ② erosie (figuur (a)).
Na verloop van tijd heeft de aanzanding links van strandhoofd ① het zeewaartse uiteinde daarvan bereikt en treedt een *bypass* op waarbij een deel van het langstransprt links van ① terecht komt in het kustvak tussen de beide strandhoofden (figuur (b)). Daardoor verplaatst de kustlijn in dat vak zich zeewaarts totdat ook rond het zeewaartse uiteinde van strandhoofd ② een *bypass* optreedt (figuur (c)). Ondertussen erodeert de kust rechts van strandhoofd ② doorlopend.
Alleen als beide *bypasses* het volledige langstransport omvatten, stopt die erosie na het ontstaan van de *bypass* rond het uiteinde van strandhoofd ②. De omvang van de resterende erosie is in dat geval gelijk aan de omvang van de totale aanzanding links van strandhood ① en die in het kustvak tussen de beide hoofden.

- golf–geïnduceerd langstransport vaak een dominante rol speelt in de ontwikkeling van de kustlijn in een veld van strandhoofden, maar niet noodzakelijk de enige. Zo wordt de getijstroom langs de kust door zo'n veld enigszins zeewaarts geforceerd waardoor geulen langs de kust kunnen ontstaan of reeds bestaande geulen kunnen groeien. Dat hoeft geen probleem te zijn maar is wel een punt van aandacht. Daarnaast genereert die getijstroom neren in kustvakken tussen opeenvolgende strandhoofden waarmee sediment vanuit zo'n kustvak zeewaarts kan worden getransporteerd[76]. Dat is van invloed op de tijdschaal waarop de kustlijn zich ontwikkelt. Die wordt groter naarmate meer sediment zeewaarts wordt getransporteerd.

7.4.3 Kust–parallelle golfbrekers

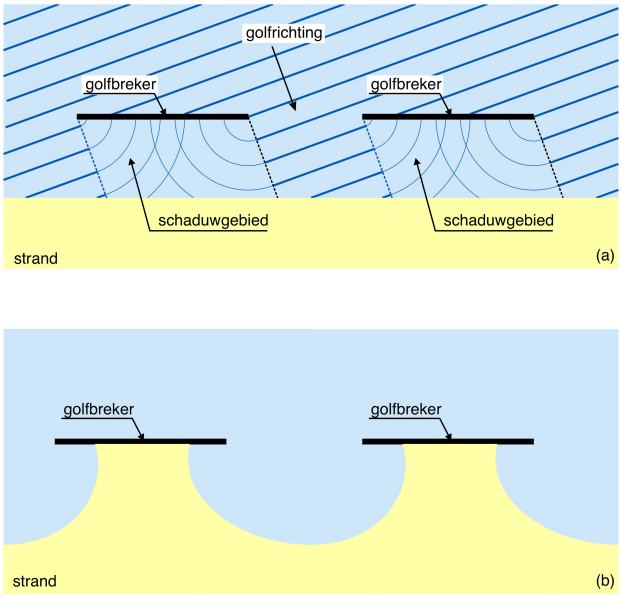
In plaats van het toepassen van strandhoofden om kusterosie tegen te gaan, kan de kust worden afgeschermd van de kust tegen invallende golven door parallel daaraan een reeks van golfbrekers plaatsen. Een deel van de energie van de invallende golven wordt op deze constructies gedissipeerd. Bovendien wordt de golfrichting beïnvloed in het gebied waar golven langstransport genereren.

Een schets van een deel van zo'n reeks golfbrekers is gegeven in figuur 7.8(a). In het schaduwgebied aan landzijde van de golfbrekers worden de golfcondities vrijwel volledig bepaald door overslag en diffractie rond de uiteinden (zie paragraaf 4.5.3 over diffractie rond de kop van een golfbreker). Een indruk van het golfpatroon dat zich voordoet tussen strand en golfbrekers als gevolg van golfinval tussen de golfbrekers door en diffractie rondom hun uiteinden is ook geschetst in figuur 7.8(a). Het werkelijke golfpatroon is complexer omdat het effect van diffractie zich niet beperkt tot de schaduwgebieden achter de golfbrekers (zie paragraaf 4.5.3). En afhankelijk van de lengte van de golfbrekers en de openingen daar tussenin, kan interferentie van golven die diffracteren rond de uiteinden en resulteren uit overslag over de golfbrekers, een wezenlijke invloed hebben op het golfpatroon.

Een generiek kenmerk van dat complexe golfpatroon is dat het gepaard gaat met een ophoping van sediment in het schaduwgebied. Daardoor bouwt de kust lokaal uit. In elk schaduwgebied ontstaat een uitstulping die groeit ten koste van de ruimte tussen naast elkaar gelegen schaduwgebieden en uiteindelijk de golfbreker kan bereiken. Zo'n uitstulping wordt een tombolo genoemd.

Als we alleen kijken naar de invloed van golf–geïnduceerd langstransport op de ontwikkeling van de kust, forceert de aanleg van een reeks kust–parallelle golfbrekers de vorming van een serie baaien (zie figuur 7.8(b)). De morfologische stabiliteit daarvan hangt mede af van de uitwisseling van sediment tussen die baaien en dieper water, zeewaarts van de golfbrekers. Daarop zijn golven van invloed, maar bijvoorbeeld ook een getijstroom langs de kust, net zoals dat bij een reeks van

[76] In rivieren waarin kribben zijn aangelegd om stroming en sedimenttransport te geleiden, kan in principe hetzelfde gebeuren. Door de stroming in de rivier, al of niet versterkt door de retourstroom van passerende schepen kunnen neren in kribvakken worden gegenereerd die gepaard gaan met oevererosie.



Figuur 7.8: Om kusterosie tegen te gaan, kunnen evenwijdig aan de kust golfbrekers worden aangelegd om het golfpatroon nabij de kust, waar die golven langstransport genereren, te beïnvloeden. In het gebied tussen golfbrekers en strand ontstaat een golfpatroon dat wordt bepaald door directe inval van golven vanuit dieper water (zeewaarst van de golfbrekers), overslag over de golfbrekers en diffractie rond de uiteinden daarvan. Een impressie van het diffractiepatroon is geschetst in figuur (a). De donkerblauwe lijnen daarin verbeelden golfkammen. Effecten van refractie zijn in deze figuur niet meegenomen.
De verstoring van het oorspronkelijke (van voor aanleg van de golfbrekers) golf–geïnduceerde langstransport leidt tot een uitbouw van de kust in de schaduwgebieden achter de golfbrekers. Als die uitbouw zich uitstrekt tot aan de golfbrekers ontstaat uiteindelijk een serie baaien zoals geschetst in figuur (b).

strandhoofden het geval is.

Een andere overeenkomst met strandhoofden ter preventie van kusterosie is dat een reeks van kust–parallelle golfbrekers het probleem van erosie verplaatst naar de lijzijde van die reeks. In paragraaf 7.4.2 is dat in de context van strandhoofden het *end–groyne* probleem genoemd.

7.5 Bodem en oeverbescherming

In veel gevallen bestaat de bodem van meren en zeeën en die van natuurlijke en kunstmatige waterlopen uit los–korrelig materiaal zoals zand en grind. Onder meer door stroming kan dit materiaal in beweging komen en worden getransporteerd. Ruimtelijke gradiënten in dat transport leiden tot erosie of sedimentatie (zie hoofdstuk 6 over transport van sediment). In deze paragraaf komen enkele maatregelen aan bod die genomen kunnen worden als zich sedimentatie of erosie voordoet op plaatsen waar dat niet gewenst is. De nadruk ligt daarbij op het bekleden van een zandige bodem of oever om erosie te voorkomen.

Sedimentatie

Sedimentatie is bijvoorbeeld ongewenst als die de functionaliteit van een (waterbouwkundige) constructie nadelig beïnvloedt of onderdeel is van een ongunstige ontwikkeling van een (natuurlijk) systeem. Zo kan sedimentatie leiden tot verondieping van een scheepvaartgeul. Dat is bijvoorbeeld het geval in de Westerschelde waar het natuurlijke evenwicht tussen geulen en platen, zoals dat daar wordt gedomineerd door de combinatie van het getij en de afvoer van de rivier De Schelde, gepaard gaat met een andere geuldiepte dan wenselijk voor de toegankelijkheid van de haven van Antwerpen. Door te baggeren wordt de vaargeul op de gewenste diepte gehouden. De bijsluiter van deze operatie is dat het estuarium als morfologisch systeem continu een afwijking van het natuurlijk evenwicht krijgt opgedrongen. De natuurlijke respons daarop is sedimentatie van de vaargeul en het materiaal dat daarvoor nodig is, wordt door de natuur onttrokken aan de zeebodem rond de monding van het estuarium en van de platen daarin.

Erosie van die platen is echter ook niet wenselijk, met name vanwege hun ecologische waarde en hun betekenis voor de veiligheid tegen overstromen. De hoogte van de platen langs de oevers is van invloed op de golfbelasting op de waterkering langs die oevers. Hoge platen leiden tot meer golfbreking vóór de kering dan lage en zijn dus gunstiger. Om dit soort redenen wordt het op diepte houden van de vaargeul gecombineerd met een strategie voor het terugstorten van het gebaggerde materiaal waarmee zulke nadelige bijwerkingen redelijkerwijs worden voorkomen.

Dit voorbeeld laat zien dat baggeren een probaat middel kan zijn om ongewenste sedimentatie te pareren, maar het is een beschermende ingreep en niet een beschermingsconstructie. Kribben in rivieren zijn dat bijvoorbeeld wel. Kribben zorgen ervoor dat, althans onder gematigde condities, de afvoer zich concentreert in een beperkt deel van de dwarsdoorsnede van de rivier en de stroming zodoende weghoudt van de oevers. Dit gaat zowel erosie van de buitenbocht in een rivier tegen als sedimentatie van de binnenbocht, waardoor de neiging tot meanderen wordt geremd (zie ook 6.3). Daarmee leveren kribben een bijdrage aan de fixatie van de loop van een rivier[77] en afhankelijk van wat zich in de omgeving van die rivier bevindt of afspeelt, kan dat prettig, wenselijk of zelfs noodzakelijk worden gevonden.

Erosie

Ongewenste erosie kan worden gepareerd met het aanbrengen van sediment, net zoals baggeren een antwoord kan zijn op ongewenste sedimentatie. Voor het onderhoud van de Nederlandse kust in het kader van veiligheid tegen overstromen, bijvoorbeeld, wordt dat op grote schaal gedaan. Jaarlijks wordt door Rijkswater-

[77] Hiermee is niet gezegd dat kribben erosie en sedimentatie blokkeren. Door de afvoer van de rivier en de waterbeweging rond passerende schepen, treden in kribvakken (het gebied tussen twee naast elkaar gelegen kribben aan dezelfde oever) allerhande circulaties op die gepaard gaan met transport van sediment. Die circulaties kunnen leiden tot erosie of sedimentatie.

staat circa 10 miljoen m^3 zand op de kust gebracht ter compensatie van opgetreden erosie (zie Rijkswaterstaat (2023)).

In de waterbouwkundige praktijk is het, naast compenseren, ook gebruikelijk om erosie op plaatsen waar dat niet gewenst is, te voorkomen. Dat kan op diverse manieren. Een daarvan is het interveniëren in het proces dat tot erosie leidt. De eerder genoemde kribben langs de oever van een rivier zijn hiervan een voorbeeld. Een ander voorbeeld zijn strandhoofden langs een kust die zijn bedoeld om gradiënten in golf-geïnduceerd transport van sediment langs die kust (zie paragraaf 6.4) te belemmeren en zo kusterosie te voorkomen.

Een ander type interventie is fixatie van het erodeerbare materiaal door het te bedekken met een laag die niet, of in ieder geval aanmerkelijk minder gevoelig is voor aanwezige eroderende invloeden. Hierbij kan onderscheid worden gemaakt tussen beschermlagen die wel of niet waterdoorlatend zijn.

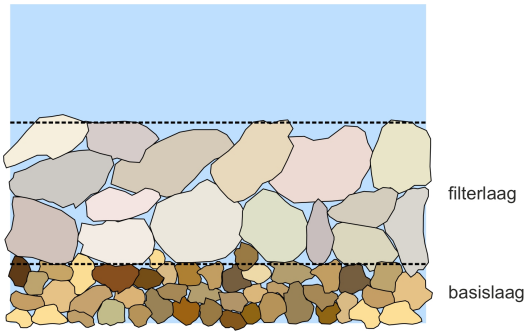
Voor ondoorlatende beschermlagen worden in de waterbouwkunde vaak bitumineuze materialen gebruikt. Die zijn goed bestand tegen (zout) water, ze kunnen onder water worden aangebracht en zijn ook enigszins plastisch vervormbaar. Door dat laatste is het materiaal beter dan bijvoorbeeld beton, geschikt voor toepassing op plaatsen waar zich zettingen kunnen voordoen in de te beschermen onderlaag. De vervormbaarheid laat toe dat zulke zettingen enigszins kunnen worden gevolgd zonder dat in de beschermlaag scheuren of breuken optreden waardoor die aan functionaliteit verliest.

Een nadeel van een ondoorlatende beschermlaag is dat zich over die laag een drukverschil kan opbouwen. Om te voorkomen dat zo'n drukverschil tot opdrijven of opbarsten leidt, kan de laag dikker worden uitgevoerd dan strikt noodzakelijk voor de beschermende functie. Een alternatief is het plaatsen van ballast op de beschermlaag. Het spreekt voor zich dat het materiaal dat als ballast dient, bestand moet zijn tegen de eroderende invloeden die de aanleiding zijn voor het aanbrengen van een beschermlaag. Bij gebruik van stortsteen leidt dat tot een eis aan het steengewicht.

Bij een doorlatende beschermlaag is het gevaar voor opdrijven of opbarsten minder groot dan bij een ondoorlatende laag. Dat gevaar neemt af met toenemende doorlatendheid van de beschermlaag. Tegelijkertijd legt de beschermende functie beperkingen op aan de doorlatendheid. Het is immers de bedoeling dat de laag voorkomt dat onderliggend materiaal erodeert. De poriën in de beschermlaag mogen dus niet zo groot zijn dat onderliggend materiaal kan worden uitgespoeld. Zo'n doorlatende beschermlaag wordt een filter genoemd.

Een type doorlatende beschermlaag dat in de waterbouwkunde veel wordt toegepast, is het granulaire filter. Zoals de naam al zegt, is zo'n filter opgebouwd uit loskorrelig materiaal, zoals zand, grind en stortsteen. Het principe van een granulair filter is geschetst in figuur 7.9. De basislaag in deze figuur is de laag die beschermd moet worden.

Een beetje in tegenspraak met het voorgaande, wordt bij granulaire filters onder-



Figuur 7.9: Principe–schets van een granulair filter. De filterlaag voorkomt erosie van de basislaag.

scheid gemaakt tussen geometrisch open en dicht. Een geometrisch open filter laat wel sediment door, maar in beperkte mate. Dit type filter wordt bijvoorbeeld gebruikt voor drainage, waar het primair gaat om het doorlaten van water en het toelaatbaar is als daarbij in beperkte mate sediment wordt meegevoerd. Voor het ontwerp van geometrisch open filters wordt verwezen naar de literatuur. In deze paragraaf beperken we ons tot ontwerpregels voor dichte filters.

Bij een geometrisch dicht granulair filter staat preventie van erosie van materiaal uit de basislaag voorop. Dat stelt een eis aan de verhouding tussen de afmetingen van poriën in de filterlaag en de korreldiameter in de basislaag. Aangezien beide lagen bestaan uit loskorrelig materiaal, zijn de poriegrootte en de korreldiameter afhankelijk van de desbetreffende graderingen. In de het ontwerp van de filterlaag moet daarmee rekening worden gehouden. Volgens de ontwerpregels voor granulaire filters is zo'n filter dicht als

$$\frac{D_{(15,f)}}{D_{(85,b)}} < 5 \tag{7.23}$$

(zie bijvoorbeeld Schiereck (2004)) waarin $D_{(x,n)}$ de korreldiameter in laag n is (f voor filter en b voor basis) die door x gewichtsprocenten wordt onderschreden.

Bij deze ontwerpregel is verondersteld dat graderingen in de basislaag en de filterlaag vergelijkbaar zijn. Als de basislaag sterker gegradeerd is dan de filterlaag (dus als sprake is van een grotere spreiding in korreldiameters in de basis dan in het filter), is de $D_{(85,b)}$ met betrekking tot geometrische dichtheid niet representatief voor de basis. Het is dan beter om een kleinere korreldiameter aan te houden.

Een tweede eis aan een geometrisch dicht granulair filter betreft de doorlatendheid. Om te voorkomen dat zich een drukverschil over het filter kan opbouwen, moet de doorlatendheid van het filter ten minste zo groot zijn als die van de basis. In het algemeen kan worden gesteld dat daarin wordt voldaan als de korreldiameter in het filter groter is dan die in de basis, maar ook hierbij speelt gradering een rol.

Met betrekking tot doorlatendheid is de ontwerpregel

$$\frac{D_{(15,f)}}{D_{(15,b)}} \geq 5 \tag{7.24}$$

Een derde eis is dat de filterlaag intern stabiel is. Als de filterlaag sterk gegradeerd is, kunnen relatief kleine korrels uit die laag worden weggespoeld. Daardoor kan de poriegrootte in het filter toenemen en dat gaat ten koste van de geometrische dichtheid. Dit kan worden voorkomen door de gradering van het filtermateriaal te beperken. De ontwerpregel die hierbij hoort is

$$\frac{D_{(60,n)}}{D_{(10,n)}} < 10 \tag{7.25}$$

waarin de beide D's betrekking hebben op dezelfde laag n.

Bovendien moet de filterlaag bestand zijn tegen de eroderende invloed waartegen de basis beschermd moet worden. Dat stelt een eis aan de korreldiameter van die laag. Zoals aangegeven in paragraaf 6.2 wordt hiervoor $\Psi \leq 0,03 k_\alpha$ als ontwerpregel aangehouden. De $D_{n,50}$ van de filterlaag moet zodanig worden gekozen dat hieraan wordt voldaan.

Een sterke stroming vanuit de basislaag en loodrecht op het filter, heeft een destabiliserend effect. De erosiebestendigheid van de filterlaag wordt in belangrijke mate bepaald door het gewicht van de korrels en zo'n loodrechte stroming levert een belasting op de korrels in tegenovergestelde richting. De netto neerwaartse belasting op de korrels neemt daardoor af en dat gaat ten koste van de stabiliteit. Als sprake is van zo'n stroming moet daarom worden uitgegaan van een kleinere waarde van Ψ dan 0,03 (en dus van een grotere $D_{n,50}$).

Het is niet altijd mogelijk om een gradering voor het filtermateriaal te vinden die tegelijk voldoet aan de vier genoemde eisen met betrekking tot dichtheid, doorlatendheid, interne stabiliteit en erosiebestendigheid. In zulke gevallen kan een filter worden opgebouwd uit meerdere lagen, waarbij de eerste drie ontwerpregels van toepassing zijn op opeenvolgende lagen vanaf de basis. De erosiebestendigheid betreft alleen de toplaag.

In plaats van granulaire filters wordt in de waterbouwkundige praktijk in toenemende mate geotextiel toegepast. Dat zijn matten van synthetisch materiaal (al of niet versterkt met bijvoorbeeld staaldraad) met betrekkelijk kleine openingen zodat wel water kan worden doorgelaten en alleen sediment dat door die openingen past. Door een juiste keuze van de openingen is zo'n mat net zo functioneel als een geometrisch open of dicht granulair filter. Een filter op basis van geotextiel is vaak goedkoper dan een granulair filter en ook eenvoudiger in aanleg.

Om de mat te fixeren, kan deze van ballast worden voorzien. Deze ballast moet erosiebestendig worden uitgevoerd op dezelfde manier als de toplaag van een granulair filter. Bij gebruik van stortsteen als ballast leidt het eigen gewicht van de stenen als gevolg van hun hoekige vorm, tot een belasting op de geotextiele mat

in de vorm van een soort omgekeerd spijkerbed. Met toenemende behoefte aan erosiebestendigheid, neemt ook het vereiste steengewicht (en dus de diameter) toe en dat gaat gepaard met een afname van het aantal spijkers in het bed en de belasting per spijker dus toeneemt.

Dit kan leiden tot perforatie van de geotextiele mat en daarmee tot verlies van functionaliteit. Om dat te voorkomen, kan de benodigde ballast in lagen worden opgebouwd, met relatief lichte (kleine) stenen direct op de mat en zwaardere stenen daar bovenop.

8

Stabiliteit van constructies met een waterkerende functie

8.1 Inleiding

Veel waterbouwkundige constructies zijn (ook) bedoeld om incidenteel of gedurende een langere aaneengesloten periode een verschil in waterstand in stand te houden. Afhankelijk van lokale behoeften kan het nodig zijn om de waterkerende functie te combineren met één of meerdere andere functies. Tegenwoordig spreekt men in dit verband graag van een *multifunctionele waterkering*.

Het concept van zo'n combinatie is niet nieuw, zoals bijvoorbeeld te zien in oude steden die aan een rivier liggen. De hoogte van de kade in zulke steden is ooit zo gekozen dat gedurende het grootste deel van het jaar aan- en afvoer van goederen over de rivier mogelijk is. Bij zeer hoge waterstand op de rivier biedt zo'n kade nauwelijks veiligheid tegen overstromen. Om daaraan tegemoet te komen, diende in vroeger dagen de voorste huizenrij aan de kade tevens als waterkering. Onder extreme omstandigheden konden luiken worden geplaatst voor ramen en deuren van die huizen om zo de voorgevel om te bouwen tot tijdelijke waterkering. Er zijn ook voorbeelden van deuren in gevels of binnenwanden waarvan de onderdorpel zo ver boven het niveau van de kade ligt dat je er alleen via een trap doorheen kunt.

In de waterbouwkunde kennen we een breed assortiment aan constructies waarbij het keren van water wordt gecombineerd met een andere functie. Denk bijvoorbeeld aan keersluizen, schutsluizen, stormvloedkeringen, coupures, stuwen, overlaten en gemalen. Een voorbeeld van een gemaal is te vinden in figuur 8.1. Wat de genoemde constructies gemeen hebben, is dat ze doorgaans worden uitgevoerd als een hard element in een grotere, zachte constructie. De benaming 'hard' wil zeggen dat het element is geconstrueerd met harde materialen als steen, beton en staal, terwijl 'zacht' verwijst naar bouwmaterialen als zand en grond. Die zachte constructie is in dit verband niet beperkt tot dijken en dammen. Bijvoorbeeld de



Figuur 8.1: Gemaal aan de Balthasar van der Polweg in Delft. De foto is genomen vanaf een oever langs het hoge pand. Op de achtergrond is het lage pand te zien.

grond rond een schutsluis die in een vaarweg de schakel vormt tussen twee gebieden met verschillend waterpeil, maakt deel uit van de scheiding tussen die twee gebieden.

Voor de beoordeling van de uitwendige stabiliteit van zulke harde elementen presenteren we in dit hoofdstuk een methode waarmee relatief snel en eenvoudig een eerste indruk kan worden verkregen. Het gaat om een globale beoordeling die kan worden gebruik in bijvoorbeeld een schetsontwerp en niet om een richtlijn ten behoeve van een detailontwerp.

De aansluiting van het harde element op de grond ernaast en eronder heeft wezenlijke invloed op de waterkerende functie van de gehele constructie en ook op de stabiliteit van het element. Dat geldt ook voor de doorlatendheid van die grond. De aansluiting met de ondergrond komt expliciet aan de orde, maar die met de grond ernaast blijft grotendeels buiten beschouwing. Voorts richten we ons op betrekkelijk eenvoudige uitvoeringen van een hard element in een waterkerende constructie. We veronderstellen symmetrie met betrekking tot belastingen met een horizontale component loodrecht op het verval. In die richting is er dus geen netto belasting. Verder veronderstellen we dat het in stand te houden verval een stationair karakter heeft. Waterstanden aan weerszijden van de constructie veranderen niet met de tijd.

Met betrekking tot de geometrie van de constructie ligt het accent in dit hoofdstuk

op wat nodig is om de essentie van de beoordeling op stabiliteit aan te geven. De constructies die in dit hoofdstuk aan bod komen, hebben een vlak, horizontaal, rechthoekig grondvlak en zijn gefundeerd op staal.

In eerste instantie kijken we naar volledig gesloten constructies. Daarna komen constructies aan bod die water via een open of gesloten leiding kunnen doorlaten. Keringen die zijn opgebouwd uit grond of een ander poreus materiaal, laten we buiten beschouwing. De ondergrond van de constructie kan overigens wel doorlatend zijn.

Binnen deze kaders analyseren we de stabiliteit van een waterkerende constructie door langs deterministische weg te toetsen op vijf faalmechanismen:

1. kantelen,
2. overschrijding van maximaal opneembare korrelspanningen in de ondergrond (bezwijken van het korrelskelet onder de constructie),
3. horizontaal afschuiven,
4. opdrijven,
5. onderloopsheid (*piping*) en achterloopsheid

Voor een kwantitatieve controle op *piping* wordt verwezen naar paragraaf 8.2.6. Om na te gaan of één van de andere vier mechanismen zich zou kunnen voordoen, vragen we ons af of evenwicht van krachten en momenten kan worden gerealiseerd, gelet op de geometrie van de constructie, de hydraulische belastingen daarop en de interactie met de ondergrond.

Deze set van vijf faalmechanismen is nadrukkelijk niet compleet. Zo kan ook ontgronding rond de constructie optreden en kan afschuiving in de ondergrond voorkomen. Onderzoek naar de stabiliteit van een constructie ten behoeve van een detailontwerp gaat veel verder dan de globale verkenning die we hier schetsen. Echter, die verkenning bevat wel enkele essentiële aspecten van zo'n onderzoek en geeft de strekking ervan goed weer.

In deze verkenning maken we veelvuldig gebruik van een xy–assenstelsel met x positief naar rechts en y positief naar boven. Voor krachten houden we hetzelfde aan. Een horizontale kracht is positief naar rechts en bij een verticale kracht is omhoog positief. Voorts zijn momenten linksom positief. Deze (arbitraire) conventie wordt in dit boek consequent aangehouden in wiskundige vergelijkingen, maar niet altijd in de figuren. Ongeacht de richting waarin bijvoorbeeld een horizontale kracht in een figuur is getekend, als de bijbehorende waarde positief is, is de kracht naar rechts gericht.

8.2 Faalmechanismen

8.2.1 Inleiding

Met uitzondering van *piping* hebben de faalmechanismen die in onze beoordeling van de stabiliteit van de constructie aan bod komen, betrekking op het ontbreken,

op één of andere manier, van evenwicht van krachten en/of momenten. Of dat evenwicht kan worden bereikt, hangt af van de interactie tussen constructie en ondergrond. Bij een op staal gefundeerde constructie moet die ondergrond de oplegreactie kunnen leveren die nodig is voor evenwicht. De faalmechanismen betreffen manieren waarop dat niet kan. Dat zijn de eerste vier die in de inleiding zijn genoemd:

Kantelen is een term, die wordt gebruikt voor situaties waarin in de fundering van een constructie (ook) verticale trekspanningen nodig zijn voor evenwicht van momenten. Bij een op staal gefundeerde constructie kunnen zulke trekspanningen niet worden geleverd en dat is van invloed op de interactie tussen constructie en ondergrond. In deze paragraaf gaan we alleen in op de vraag of zulke trekspanningen nodig zijn. De invloed op de interactie komt aan bod in paragraaf 8.5.2.

Bezwijken van het korrelskelet is enigszins verwant aan kantelen. Het gaat over situaties waar ergens in het grensvlak tussen een op staal gefundeerde constructie en de ondergrond een verticale drukspanning nodig is die tot bezwijken leidt van het korrelskelet van die ondergrond.

Opdrijven doet zich voor als de resultante van alle verticale belastingen op de constructie, inclusief wat de fundering kan leveren, opwaarts is gericht. Die bijdrage vanuit de fundering is alleen relevant in het geval van een paalfundering die op trek kan worden belast. Bij een op staal gefundeerde constructie kan dat niet.

Horizontaal afschuiven is het gevolg van het ontbreken van evenwicht van horizontale belastingen op de constructie. Ook hier gaat het om de vraag of de fundering van de constructie weerstand kan bieden aan het totaal van horizontale belastingen. Bij een fundering op palen komt dat neer op een functionele eis aan die fundering. Die moet zodanig worden ontworpen dat de maximaal mogelijke netto horizontale belasting kan worden opgevangen. Bij een op staal gefundeerde belasting is het afhankelijk van de wrijving die in het grensvlak van constructie en ondergrond kan worden opgebracht of horizontaal evenwicht kan worden bereikt.

Voor elk van deze vier faalmechanismen bepalen we in de volgende paragrafen onder welke omstandigheden die zich kunnen voordoen. Voor de controle op stabiliteit van een constructie is dat van wezenlijk belang[78]. Om na te gaan of één van deze faalmechanismen zich voordoet, inventariseren we eerst de belastingen op de constructie. Daarna bepalen we welke oplegreactie vanuit de ondergrond nodig is om evenwicht te bereiken om vervolgens na te gaan of die reactie daadwerkelijk kan worden geleverd.

Tot slot gaan we in op het vijfde genoemde faalmechanisme: onderloopsheid en

[78] In paragraaf 9.2 over probabilistisch ontwerpen komen we hierop terug. In die paragraaf gaat het om de vraag hoe groot de kans is dat een waterkerende constructie faalt in het geval dat zich meerdere faalmechanismen kunnen voordoen terwijl niet op voorhand kan worden aangegeven welke dat zal zijn.

achterloopsheid. Dat is in die zin een apart verhaal dat het niet direct te relateren is aan het ontbreken van een evenwicht van krachten en/of momenten, maar er wel toe leidt. Behoudens uitzonderlijke situaties is een waterkerende constructie bedoeld om een verval in stand te houden. Dat wil zeggen dat de waterstand aan de ene kant van de constructie anders is dan die aan de andere kant. Bij een poreuze ondergrond leidt dat tot een stroming onder de constructie door van de kant met de hoogste waterstand naar de andere kant. Met die stroming kan de grond onder en naast de constructie eroderen en zeker bij een op staal gefundeerde constructie kan dat tot gevolg hebben dat de fundering letterlijk wordt weggespoeld. Of de constructie vervolgens faalt op afschuiven, kantelen of iets anders en is in dit kader eigenlijk niet zo interessant. Waar het om gaat is dat met onder– of achterloopsheid een mechanisme in gang is gezet dat (vrijwel) onherroepelijk leidt tot ernstig verlies aan functionaliteit. Als zodanig is het een relevant faalmechanisme.

8.2.2 Evenwicht

Voor de beschouwing van het krachten- en momentenevenwicht van de constructie maken we gebruik van een analogie met een eenzijdig ingeklemde, prismatische, homogene ligger waarop enkele puntlasten werken. Deze situatie is geschetst in figuur 8.2(a).

Door deze lasten deformeert de ligger waarbij, volgens de hypothese van Bernouilli, vlakke doorsneden vlak blijven. Voor een dwarsdoorsnede ergens tussen de inklemming en de last F_R kunnen we de spanningen in het materiaal bepalen aan de hand van verticaal en horizontaal evenwicht van krachten en evenwicht van momenten. Daartoe leiden we uit deze drie evenwichten de normaalkracht N, de dwarskracht D en het moment M af die zich in de doorsnede voordoen (zie figuur 8.2(b)):

$$M = F_L a_L - F_R a_R - F_N a_N \tag{8.1}$$

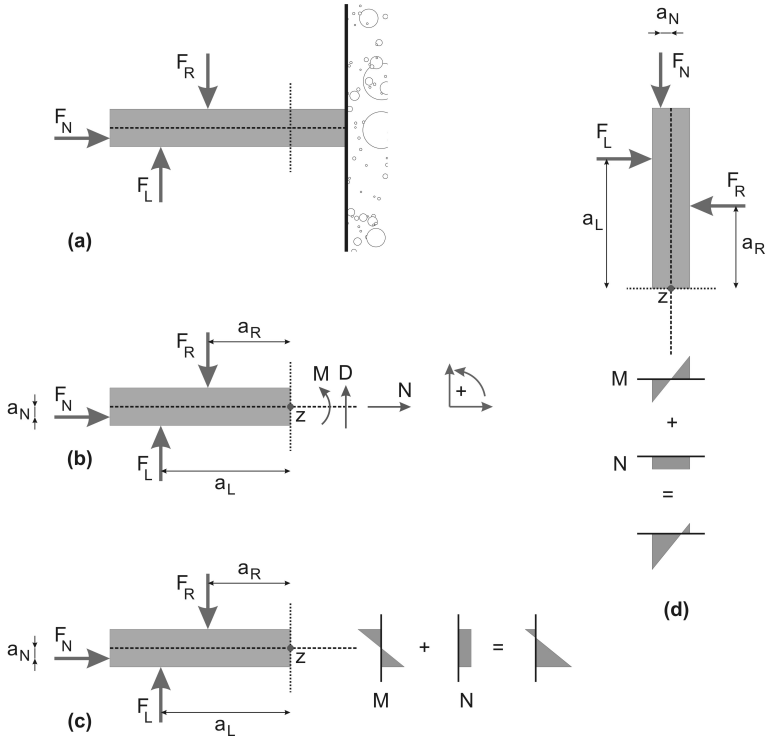
$$N = -F_N \tag{8.2}$$

$$D = F_R - F_L \tag{8.3}$$

Het moment in bovenstaande uitdrukking is bepaald rond het snijpunt van de zwaartelijn van de ligger en de beschouwde dwarsdoorsnede. In figuur 8.2 is dit punt z genoemd. In principe had een willekeurig ander punt gekozen kunnen worden, maar z is handig omdat we daarmee op een simpele manier extremen kunnen bepalen in drukspanningen die in de doorsnede optreden. Als M het moment van de uitwendige belastingen om z is, geldt voor deze extreme drukspanningen σ_{extr} dat

$$\sigma_{\text{extr}} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} \tag{8.4}$$

waarin A het oppervlak van de dwarsdoorsnede is en W het bijbehorende weerstandsmoment. De aan N en M gerelateerde drukspanningen zijn weergegeven in



Figuur 8.2: Verloop van normaalspanningen in een doorsnede van een eenzijdig ingeklemde ligger, geschetst in (a). Voor evenwicht zijn in de doorsnede een dwars- en een normaalkracht en een moment nodig (b). De normaalspanningen bij het moment en de normaalkracht zijn aangegeven in (c). Afbeelding (d), die volgt door (c) een kwart slag te draaien, toont de essentie van de methode waarmee de korrelspanning onder een op staal gefundeerde waterkerende constructie wordt benaderd.

figuur 8.2(c). De benodigde dwarskracht wordt geleverd door een uniform over de doorsnede verdeelde schuifspanning. Deze is niet in de figuur getekend.

Een indicatieve beoordeling van de stabiliteit van een op staal gefundeerde constructie ontlenen we aan een analogie met deze bepaling van normaal- en schuifspanningen in een denkbeeldige doorsnede van een prismatische ligger. Daartoe draaien we de afbeelding in figuur 8.2(c) een kwart slag naar rechts. Het resultaat is te vinden in figuur 8.2(d). De constructie waarvan we de stabiliteit willen beoordelen, zien we als het afgesneden deel van de ligger. Het grondvlak van de constructie, ofwel het grensvlak tussen de constructie en de ondergrond waarop deze is gefundeerd, komt in deze analogie overeen met de denkbeeldige snede in de ligger. Overeenkomstig de genoemde hypothese van Bernouilli veronderstellen we dat grondvlak oneindig stijf is en dus dat het vlak blijft. Tegelijkertijd nemen we aan dat de ondergrond lineair elastische gedrag vertoont.

Bij de ligger zijn op dit snijvlak normaal- en schuifspanningen nodig ter wille van evenwicht van het afgesneden deel. Op dezelfde manier zijn voor evenwicht van

de constructie normaal- en schuifspanningen nodig op het grensvlak van constructie en ondergrond. Alleen als die spanningen kunnen worden geleverd door de ondergrond kan er sprake zijn van evenwicht.

8.2.3 Kantelen en bezwijken van het korrelskelet

Om na te gaan of de ondergrond die spanningen daadwerkelijk kan leveren, bouwen we voort op de analogie met de ligger. Daarbij zijn we uitgegaan van lineair elastische gedrag. We hebben een lineair verband verondersteld tussen normaalspanning en deformatie. Bij de ondergrond van de constructie doen we dat ook. Met die veronderstelling is sprake van verticaal evenwicht en evenwicht van momenten indien de ondergrond op het grensvlak met de constructie een spanning kan leveren die verloopt zoals geschetst in figuur 8.2(d) voor de combinatie van M en N. Controle van de stabiliteit begint met het kwantificeren van de (lineair verlopende) spanning die nodig is voor evenwicht van momenten en verticale krachten. Vervolgens gaan we na of de ondergrond die kan leveren.

Daarbij moeten we ons bedenken dat de ondergrond, zeker bij een waterkerende constructie, doorgaans bestaat uit een korrelskelet waarbij de poriën volledig zijn gevuld met water. Als de ondergrond deformeert onder invloed van de belastingen die de constructie met zich mee brengt, zal het water in de poriën zijdelings kunnen afstromen. Bij relatief geringe deformatie en dus geringe verticale verplaatsing van de constructie, zal de waterdruk op het grensvlak tussen constructie en ondergrond nauwelijks veranderen. De spanning die nodig is voor het evenwicht zal zodoende door het korrelskelet moeten worden geleverd. En dat kan zolang die benodigde spanning druk betreft en niet leidt tot bezwijken van het korrelskelet.

Trek kan door het korrelskelet niet worden opgenomen omdat het uit los gepakt korrelmateriaal bestaat. Zodra trek nodig is, ook al is het maar in een deel van het grensvlak tussen constructie en ondergrond, is sprake van kantelen. Dat is één van de vijf faalmechanismen die in de inleiding zijn genoemd. Hoewel de benaming dat suggereert, is het niet zo dat de constructie daadwerkelijk omvalt als dit faalmechanisme zich voordoet. In dit verband betekent kantelen dat evenwicht niet kan worden bereikt met een lineair verlopende drukspanning langs het grondvlak van de constructie. In paragraaf 8.5 gaan we in op de controle op kantelen en op vraag wat voor spanningsverdeling wel tot evenwicht kan leiden als dit faalmechanisme zich voordoet.

Anderzijds, als ergens op het grensvlak tussen constructie en ondergrond een zeer grote drukspanning nodig is ten behoeve van evenwicht, kan lokaal de korrelspanning worden overschreden die het korrelskelet kan opnemen. In dat geval doet zich een tweede faalmechanisme voor: bezwijken van het korrelskelet.

8.2.4 Afschuiven

Naast evenwicht van verticale krachten en momenten moet bij de controle op stabiliteit ook worden gekeken naar de dwarskracht. Bij de ligger manifesteert

samenstelling van de ondergrond	wrijvingscoëfficiënt
rots	0,70
grind, grind met zand, grof zand	0,55 - 0,60
fijn tot normaal zand, silthoudend (grof) zand, silt- of kleihoudend grind	0,45 - 0,55
fijn zand, silt- of kleihoudend (fijn) zand	0,35 - 0,45
silt	0,30 - 0,35
geconsolideerde klei	0,40 - 0,50
silthoudende klei	0,30 - 0,35

Tabel 8.1: Coëfficiënten voor wrijving tussen beton en ondergrond voor diverse samenstellingen van de ondergrond (USACE (1992), auteursrechtelijk beschermd).

deze kracht zich als een schuifspanning in de doorsnede. Geïntegreerd over de dwarsdoosnede van de ligger is dat de dwarskracht.

Bij de waterkerende constructie is dat niet anders. Daar wordt de dwarskracht gebalanceerd door een schuifspanning op het grensvlak tussen constructie en ondergrond. Op dit punt komt de controle op stabiliteit er op neer dat we nagaan of de netto horizontale belasting op de constructie wel of niet groter is dan de maximale wrijvingskracht die op het grensvlak van constructie en ondergrond kan worden gemobiliseerd.

Die maximaal mogelijke schuifspanning op het grensvlak tussen constructie en ondergrond hangt af van de ruwheid van de onderzijde van de constructie en de ruwheid van de bovenkant van het korrelskelet. Daarnaast hangt de maximaal mogelijke schuifspanning af van de drukspanning in het contactvlak, gerelateerd aan de kracht waarmee de constructie op het korrelskelet wordt gedrukt. Bij benadering geldt voor de combinatie van deze twee aspecten een lineair verband tussen de drukspanning σ_d in het grensvlak en de schuifspanning σ_s die daar maximaal in kan optreden:

$$\sigma_s = f_w \sigma_d \tag{8.5}$$

In deze relatie is f_w de zogeheten wrijvingscoëfficiënt. De waarde van deze coëfficiënt is afhankelijk van het materiaal waaruit het grondvlak van de constructie is vervaardigd en de samenstelling van de ondergrond. Voor een betonnen constructie op een ondergrond van zand is f_w ongeveer gelijk aan 0,5. Waarden van f_w voor betonnen constructies op andersoortige ondergrond zijn gegeven in tabel 8.1.

De wrijvingskracht $F_{w,max}$ die maximaal kan worden opgebracht is gelijk aan het product van de schuifspanning σ_s en het oppervlak A van het grensvlak tussen constructie en ondergrond. Om die kracht te bepalen, vermenigvuldigen we (8.5) met A. Met in het achterhoofd dat bij verticaal evenwicht de normaalkracht N (de netto kracht waarmee de constructie op het korrelskelet wordt gedrukt) gelijk is aan $A\sigma_d$, vinden we dat

$$F_{w,max} = f_w N \tag{8.6}$$

Zodra er een grotere horizontale kracht dan $F_{w,max}$ nodig is voor horizontaal evenwicht van de constructie, treedt afschuiving op. Dat is het vierde faalmechanisme dat in de inleiding is genoemd.

Voor de stabiliteit van een constructie is het voordelig om te streven naar een zo groot mogelijke wrijvingscoëfficiënt f_w. Er is echter een grens aan f_w waar voorbij verhoging geen zin meer heeft. Die grens doet zich voor als de frictie tussen de onderzijde van de constructie en de bovenste laag korrels groter is dan de frictie tussen de bovenste korrels en die daaronder. Bij wijze van spreken zou je de onderzijde van de constructie vast kunnen lijmen aan de bovenste laag korrels van de ondergrond. De maximale wrijvingskracht die in dat geval kan worden opgebracht, wordt niet langer bepaald door het grensvlak tussen constructie en ondergrond, maar door het grensvlak tussen de bovenste twee lagen korrels direct onder de constructie. De interne wrijving van het korrelmateriaal onder de constructie stelt dus een bovengrens aan de maximale horizontale schuifspanning die kan worden gemobiliseerd. Voor dat maximum geldt een wrijvingscoëfficiënt van $\tan\phi$, waarbij ϕ de hoek van inwendige wrijving van het korrelmateriaal is. Incorporatie van deze bovengrens in uitdrukking (8.6) voor de maximale wrijvingskracht geeft

$$F_{w,max} = N \min\{f_w, \tan\phi\} \tag{8.7}$$

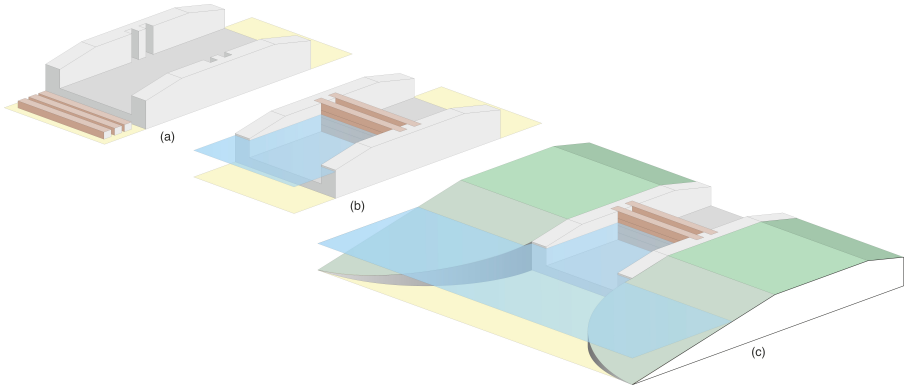
De hoek ϕ van inwendige wrijving van de ondergrond is in de praktijk niet altijd goed bekend. Dat heeft onder meer te maken met onzekerheden in de samenstelling van die ondergrond. Om daaraan tegemoet te komen wordt doorgaans gewerkt met een hoek δ die iets kleiner is dan ϕ ($2\phi/3 \leq \delta \leq \phi$). Daarmee wordt de maximale wrijving

$$F_{w,max} = N \min\{f_w, \tan\delta\} \tag{8.8}$$

In bovenstaande beschouwing van de stabiliteit van een waterkerende constructie hebben we onderscheid gemaakt tussen enerzijds evenwicht van verticale krachten en momenten en anderzijds horizontaal evenwicht. Bij verticale krachten en momenten hebben we het korrelskelet onder de constructie geschematiseerd tot een lineair elastisch materiaal. Daarbij zijn mogelijke faalmechanismen gekoppeld aan abrupte grenzen aan lineair elastisch gedrag, te weten het wegvallen van drukspanning (kantelen) en het overschrijden van een maximaal opneembare drukspanning (bezwijken van het korrelskelet). Met betrekking tot het horizontaal evenwicht hebben we direct gekeken naar bezwijken (afschuiven). Eigenlijk is dat niet helemaal consistent. Echter, om de stabiliteit van een waterkerende constructie globaal te verkennen, is dit een redelijke aanpak.

8.2.5 Opdrijven

Een poreuze ondergrond, zoals zand, vormt een verbinding tussen de watermassa's aan beide zijden van de kering. Vanwege het verval over de constructie treedt onder de constructie een stroming op van de hoogwaterzijde naar de laagwaterzijde. Bij een constructie met een horizontaal grondvlak neemt de waterdruk tegen dat



Figuur 8.3: Een voorbeeld van een gesloten waterkerende constructie is een coupure: een lokale verlaging van de kruinhoogte van een waterkering (a) die bij dreigende extreme condities kan worden gesloten door het plaatsen van schotbalken (b). Een schets van integratie van een gesloten coupure in een dijk is gegeven in (c).

grondvlak af in de richting van de stroming. De resultante van deze druk, de opwaartse kracht F_{opw}, is te schrijven als

$$F_{\text{opw}} = \iint_A p \, \mathrm{d}A \tag{8.9}$$

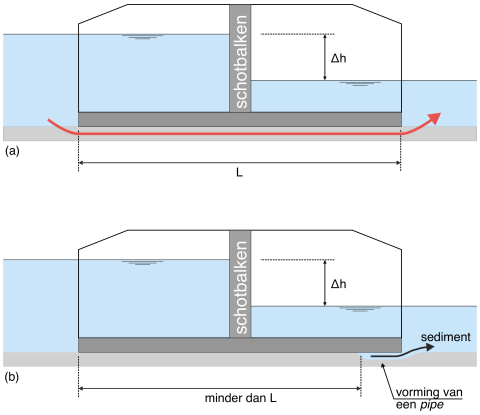
waarin p de druk en A verwijst naar het grondvlak van de constructie. Als er geen verval is over de constructie, reduceert bovenstaande uitdrukking tot de Wet van Archimedes.

Zodra de opwaartse kracht groter wordt dan de som van alle neerwaartse belastingen, inclusief het eigen gewicht, zal de constructie opdrijven. Net als bij kantelen gaat het er bij opdrijven om dat het korrelskelet geen trekspanning kan opnemen. Het verschil tussen beide faalmechanismen is dat kantelen kan optreden zonder dat sprake is van opdrijven. Zodra een constructie opdrijft, is de vraag of er gevaar bestaat voor kantelen overbodig. De constructie is dan immers al bezweken, in ieder geval in functionele zin. Dat geldt ook voor afschuiven. De vraag welke wrijvingskracht in het contactvlak tussen constructie en ondergrond kan worden gemobiliseerd, is volstrekt zinloos als dat contactvlak er niet is.

8.2.6 Onderloopsheid

De coupure[79] die in figuur 8.3 is geschetst, is een voorbeeld van een hard element in een overigens zachte waterkerende constructie.

[79] Een coupure is een plaatselijke verlaging van de kruin van een waterkering, meestal om een kruising met een weg mogelijk te maken. Bij dreigende extreme condities wordt de coupure gesloten door het plaatsen van zogeheten schotbalken in de sleuven in beide wanden. In veel gevallen biedt de coupure ruimte aan twee rijen schotbalken en wordt de tussenruimte gevuld met zand of zandzakken. Vroeger werd ook mest als vulmiddel gebruikt.



Figuur 8.4: Langsdoorsnede van de coupure van figuur 8.3. De rode pijl in figuur (a) geeft de richting van de stroming onder de constructie door. Als het uittredende water aan laagwaterzijde sediment meevoert, kan een zogeheten *pipe* ontstaan (figuur (b)).

Zo'n coupure heeft zowel een grondkerende als een waterkerende functie. Gezien langs de kruin van de waterkering moeten de zijwanden van de coupure de grond keren waaruit de waterkering is opgebouwd. En dwars op de kruin moet de coupure ingeval van hoogwater aan een zijde, ook water keren. De coupure zelf, vaak uitgevoerd als een bak met een U-vormige doorsnede (gezien langs de kruin van de waterkering) van beton of ander steenachtig materiaal. Die bak is aan drie zijden (langs de twee wanden en de vloer) omgeven door zand of daaraan verwant materiaal waaruit de rest van de waterkering is opgebouwd. Vanwege het verschil in vervormbaarheid wordt de betonnen bak een hard element in een overigens zachte constructie genoemd.

Het zand of de grond rondom het harde element is bovendien in enige mate waterdoorlatend. Bij een verval over de waterkering doet zich daarin een stroming voor die vlak langs het harde element sterker is dan op enige afstand daar vandaan. Die stroming moet om het harde, ondoorlatende element heen en dat leidt tot plaatselijke convergentie van stroomlijnen, net als bijvoorbeeld bij een vernauwing in een gesloten leiding (zie paragraaf 3.3.3).

De stroming lans of onder de constructie door wordt kwel genoemd. Aan laagwaterzijde kan deze stroming langs de wanden of vloer van de constructie sediment meevoeren waardoor naast of onder de constructie kanaaltjes ontstaan waarin de stroming zich concentreert. Zo'n kanaaltje wordt een *pipe* genoemd. In figuur 8.4 is het ontstaan van een *pipe* geïllustreerd. De rode pijl in figuur 8.4(a) verwijst naar de stroming direct onder het grondvlak van de coupure. Waar de stroming aan laagwaterzijde (rechts in de figuur) onder dat grondvlak uitkomt, kan sediment worden uitgespoeld waardoor onder het grondvlak een textitpipe gaat groeien (figuur 8.4(b)).

Dat uitspoelen doet zich voor als de stroming sterk genoeg is. Dat hangt af van de weerstand die de stroming ondervindt. Als de ondergrond bestaat uit fijnkorrelig materiaal met betrekkelijk nauwe porieën, is die weerstand groter dan bij grofkorrelig materiaal. Maar ook het verval Δh over de constructie en afstand die de stroming vanaf de hoogwaterzijde naar de laagwaterzijde van de constructie

moet afleggen, speelt een rol. Deze afstand wordt de kwellengte genoemd.

Zodra een *pipe* ontstaat, neem de kwellengte af (zie figuur 8.4) en daarmee ook de weerstand die de stroming ondervindt. Bij gelijkblijvend verval over de constructie leidt die afname van de weerstand tot een toename van de stroomsnelheid, waardoor het uitspoelen van materiaal wordt versterkt. Dit progressieve proces kan tot falen van de constructie leiden. Het wordt *piping* of onderloopsheid genoemd.

Of dit faalmechanisme zich voordoet, hangt af van de aandrijvende kracht van de stroming (het verval Δh) enerzijds en de weerstand die de stroming ondervindt (afhankelijk van de kwellengte en de samenstelling van de ondergrond) anderzijds. Dit is op te vatten als een verhouding tussen belasting en sterkte. We werken dat nader uit.

De verhouding van het veval Δh en de kwellengte L_k is een maat voor de gradiënt van de stijghoogte langs een stroomlijn en daarmee ook een maat voor de stroomsnelheid. Analoog aan de wet van Darcy (paragraaf 3.5.1) kunnen we grosso modo stellen dat

$$u = -k_p \frac{\Delta h}{L_k} \tag{8.10}$$

waarin u de stroomsnelheid en k_p is een evenredigheidsfactor die afhangt van de doorlatendheid en de porositeit van de ondergrond. Deze k_p is niet hetzelfde als de doorlatendheid k in de wet van Darcy (3.80). Die wet geeft een verband tussen de lokale gradiënt van de stijghoogte $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x$ en het lokale specifieke debiet q_x, terwijl in bovenstaande uitdrukking een soort gemiddelde gradiënt wordt gebruikt om tot een maat voor de stroomsnelheid te komen.

In het begin van de 20$^{\mathrm{e}}$ eeuw hebben onder meer Bligh (1910) en Lane (1935) empirisch onderzoek gedaan naar de verhouding Δ_h/L_k waarbij nog net geen *piping* optreedt. Met (8.10) kunnen we deze kritische verhouding schrijven als

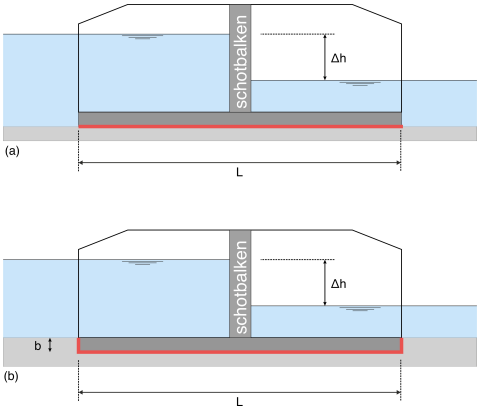
$$\left(\frac{\Delta h}{L_k}\right)_{\mathrm{crit}} = \frac{|u_{\mathrm{crit}}|}{k_p} \tag{8.11}$$

waarin u_{crit} de stroomsnelheid is waarbij materiaal nog net niet onder de constructie uit wordt gespoeld. Bij een voorgeschreven verval Δh, moet de kwellengte L_k zodanig worden gekozen dat

$$L_k > \frac{k_p}{|u_{\mathrm{crit}}|}\Delta h \tag{8.12}$$

om *piping* te voorkomen.

Zowel Bligh (1910) als Lane (1935) hebben het quotiënt $k_p/|u_{\mathrm{crit}}|$ langs empirische weg onderzocht voor uiteenlopende samenstellingen van de ondergrond. In beide onderzoeken wordt de kwelweg gemeten in de richting van het verval en langs het contactvlak tussen constructie en ondergrond. Bij de constructie in figuur 8.5(a) is dat de onderkant van het grondvlak van de constructie (in de figuur aangegeven met de rode lijn) en dan is de kwellengte L_k gelijk aan L. Als de constructie deels



Figuur 8.5: Langsdoorsnede van de coupure van figuur 8.3. De rode lijnen geven de kwelweg volgens Bligh (1910) en Lane (1935) aan. In figuur (a) staat de constructie op de ondergrond en valt de kwelweg samen met de onderkant van het grondvlak. Bij de constructie in figuur (b) ligt de vloerplaat in de ondergrond. Dan maken de kopse kanten van die plaat ook deel uit van de kwelweg.

in de ondergrond ligt, dragen ook de verticale raakvlakken tussen constructie en ondergrond bij aan de kwelweg.

Een belangrijk verschil tussen onderzoeken van Bligh (1910) en Lane (1935) is hoe de horizontale en verticale raakvlakken tussen constructie en ondergrond in rekening worden gebracht bij de bepaling van de minimaal benodigde kwellengte L_k. Bligh (1910) maakt daar geen onderscheid tussen en zou in het geval van figuur 8.5(b) uitkomen op $L_k = L + 2b$ (met b in dit voorbeeld de dikte van de vloerplaat van de constructie). Volgens Lane (1935), daarentegen, dragen verticale raakvlakken in 3 keer zo sterke mate bij aan het voorkomen van *piping* als horizontale. Voor dezelfde situatie (figuur 8.5(b)) gaat Lane (1935) uit van $L_k = L/3 + 2b$. Beide onderzoekers komen mede daarom uit op verschillende waarden van $k_p/|u_{\text{crit}}|$. Overigens benoemen zij dat quotiënt niet expliciet, maar spreken van een evenredigheidscoëfficiënt.

De bevindingen van Bligh (1910) voor een minimaal vereiste kwellengte L_k kunnen worden genoteerd als

$$L_k > L_{k,\text{hor}} + L_{k,\text{ver}} > 1,5 C_B \Delta h \tag{8.13}$$

en die van Lane (1935) als

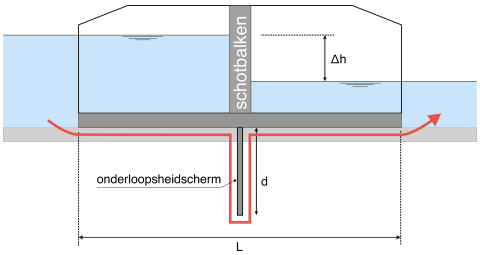
$$L_k > \frac{1}{3} L_{k,\text{hor}} + L_{k,\text{ver}} > 1,5 C_L \Delta h \tag{8.14}$$

waarin C_B en C_L evenredigheidscoëfficiënten zijn (afhankelijk van de samenstelling van de ondergrond) en 1,5 is een veiligheidsfactor. Voorts is $L_{k,\text{hor}}$ de som van de lengtes van de horizontale delen van de kwelweg en $L_{k,\text{ver}}$ die van de verticale delen. Bij schuine raakvlakken tussen constructie en ondergrond worden hellingen tot en met 45° bij de horizontale delen gerekend en grotere hellingen bij de verticale. Voor enkele grondsoorten zijn de waarden van de evenredigheidscoëfficiënten C_B en C_L vermeld in tabel 8.2.

Als bij het ontwerp van een constructie blijkt dat de functioneel primair vereiste lengte L ontoereikend is om *piping* (of onderloopsheid) te voorkomen, zijn diverse

grondsoort	C_B	C_L
zeer fijn zand, silt	18	8,5
fijn zand	15	7,5
grof zand	12	5,0

Tabel 8.2: Waarden van de evenredigheidscoëfficiënten C_B en C_L voor enkele grondsoorten.



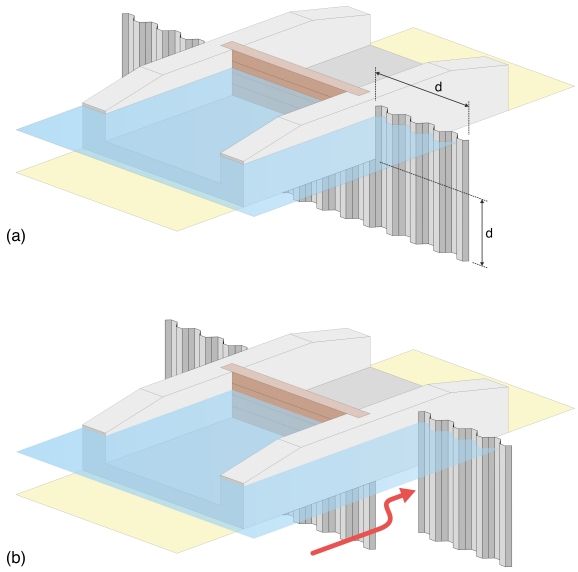
Figuur 8.6: Langsdoorsnede van de coupure van figuur 8.3. De rode lijn geeft de route van de kwelstroom onder de constructie door. Het onderloopsheidscherm, mits waterdicht verbonden met het grondvlak van de constructie, verlengt de kwelweg met twee maal de hoogte (d) van dat scherm.

mitigerende ingrepen mogelijk. Het verlengen van de constructie is een voor de hand liggende, maar dat draagt niet bij aan de primaire functionele eisen en is vaak kostbaar. Een andere mogelijkheid is om aan laagwaterzijde bodembescherming toe te passen die uitspoeling van sediment en dus de vorming van *pipes* moet voorkomen (zie paragraaf 7.5).

Een relatief goedkope en eenvoudige ingreep is het verlengen van het raakvlak tussen constructie en de ondergrond door middel van een zogeheten onderloopsheidscherm. Dat is een ondoorlatende wand die onder het grondvlak van de constructie in de ondergrond wordt geplaatst. Deze wand is waterdicht met het grondvlak van de constructie verbonden maar maakt als regel geen deel uit van de fundering van die constructie. In de waterbouwkundige praktijk gaat het veelal om een stalen damwand.

Het principe van zo'n verlenging van de kwelweg is geschetst in figuur 8.6. Onder de constructie in deze figuur is een damwand geplaatst met lengte d. Met deze damwand is de kwellengte volgens Bligh gelijk aan $L + 2d$ en volgens Lane $L/3 + 2d$. De positie van de damwand maakt daarbij niet uit. In de figuur is die in het midden van het grondvlak van de constructie getekend, maar voor het effect op onderloopsheid maakt het volgens Bligh en Lane niet uit of die damwand op enige afstand links of rechts van dat midden wordt gekozen. Voor de netto opwaartse belasting op de constructie en de bijdrage daarvan aan het evenwicht van momenten, maakt dat echter wel uit (zie paragraaf 8.4.4).

Naast onderloopsheid, wat verwijst naar een stroming onder het harde element in een overigens zachte constructie door, is er ook achterloopsheid. Dat is in principe hetzelfde verschijnsel maar met betrekking tot stroming langs de zijwanden van het harde element. Door zulke stroming kan korrelmateriaal aan weerszijden van het harde element worden uitgespoeld met als mogelijk gevolg dat het harde element los komt van het omliggende zachte deel van de constructie. De waterkerende functie van de constructie als geheel gaat daarbij verloren en dat betekent dat de



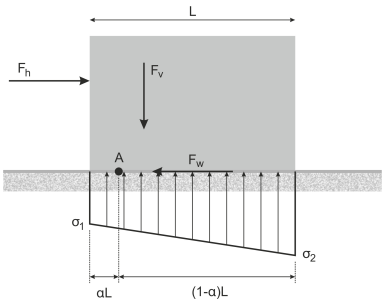
Figuur 8.7: Schematische weergave van een onder– en achterloopsheidscherm voor de coupure van figuur 8.3. In de linker figuur (a) vormen beide schermen één geheel. In de onderste figuur (b) is dat niet zo en in dat geval is er geen effectieve belemmering van de stroming langs en onder de coupure en dus ook geen effectieve preventie van *piping*.

constructie faalt.

Tegen deze achtergrond geldt dat als onder het harde element een onderloopsheidscherm moet worden toegepast om onderloopsheid te voorkomen, dit scherm aan weerszijden van dat harde element moet worden voortgezet om ook achterloopsheid te voorkomen. Voor de coupure die we in deze paragraaf als voorbeeld gebruiken, is dat weergegeven in figuur 8.7(a). Een vuistregel is dat het scherm tot net zover naast het harde element moet reiken als eronder (zoals aangegeven in de figuur).

Overigens is het essentieel dat de onder– en achterloopsheidschermen een doorlopend geheel vormen om effectief te kunnen zijn. Als, gezien in de richting van het verval, beide schermen ten opzichte van elkaar zijn verschoven (zoals geschetst in figuur 8.7(b)), wordt de stroming rondom het harde element een sluiproute geboden (aangegeven met de rode pijl in figuur 8.7(b)) waardoor het beoogde effect van het scherm verloren gaat.

Daarnaast is het van belang dat de bovenkant van het achterloopsheidscherm hoger ligt dan de ontwerpwaterstand aan hoogwaterzijde van de constructie om de stroming langs weerszijden van het harde element zo goed mogelijk tegen te gaan.



Figuur 8.8: Schematische voorstelling van een op staal gefundeerde constructie met belastingen F_h en F_v, een lineair verlopende korrelspanning σ langs het grondvlak en wrijvingskracht F_w.

8.3 Korrelspanning onder de constructie

8.3.1 Berekening van de korrelspanning

Voor de beschrijving van evenwicht van momenten en verticale krachten van een op staal gefundeerde constructie hebben we in paragraaf 8.2.2 een vergelijking gemaakt met een prismatische ligger. Vanuit die vergelijking kijken we naar constructies met een vlak en horizontaal, rechthoekig grondvlak dat we oneindig stijf veronderstellen. De constructie rust op een ondergrond van loskorrelig materiaal en het korrelskelet vertoont lineair elastische gedrag.

Met deze gesimplificeerde voorstelling verloopt de korrelspanning onder de constructie lineair. Immers, bij een oneindig stijf grondvlak verloopt de deformatie van het korrelskelet daaronder lineair. Bij lineair elastisch gedrag van het korrelskelet leidt zo'n deformatie tot een lineair verlopende korrelspanning.

Om dat lineaire verloop van de korrelspanning te kwantificeren, zijn per definitie twee condities nodig; in dit geval evenwicht van verticale krachten en evenwicht van momenten. We werken dit uit aan de hand van het voorbeeld in figuur 8.8.

Dit voorbeeld betreft een blokvormige constructie waarop een resultante horizontale belasting F_h werkt. Deze belasting is gerelateerd aan het in stand te houden verval over de constructie en is exclusief de wrijvingskracht F_w in het contactvlak tussen constructie en ondergrond (zie paragraaf 8.2.4). Bij horizontaal evenwicht geldt dat

$$F_h + F_w = 0 \tag{8.15}$$

(krachten worden positief gerekend als ze naar rechts of naar boven zijn gericht en momenten linksom zijn positief).

Op de constructie werkt in dit voorbeeld ook een resultante verticale belasting F_v. Deze is inclusief het eigen gewicht van de constructie, maar exclusief de opwaartse korrelspanning aan de onderzijde. Er is sprake van verticaal evenwicht indien

$$BL\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + F_v = 0 \tag{8.16}$$

(waarin B de breedte van de constructie is, loodrecht op het vlak van tekening in figuur 8.8). Dit is één van de twee vergelijkingen die nodig zijn om het benodigde verloop van de korrelspanning onder de constructie vast te stellen. De andere vergelijking betreft evenwicht van momenten. Voor zulk evenwicht geldt dat de som van de momenten van alle relevante krachten om elk willekeurig punt gelijk is aan nul. Dat wil zeggen dat we kunnen volstaan met het eisen van evenwicht van momenten om één willekeurig punt. Er zijn diverse manieren denkbaar om tot een handige keuze van dat punt te komen. Wij kiezen voor een punt ergens langs het grondvlak van de constructie (punt A in figuur 8.8). Dat past bij de analogie met de ligger, waarbij het grondvlak van de constructie is vergeleken met een doorsnede van die ligger waarvoor de spanningen moeten worden bepaald.

Evenwicht van momenten rond punt A wordt gegeven door

$$M_k + M_v(\alpha) + M_h = 0 \tag{8.17}$$

waarin M_v het moment van F_v om A. De omvang van dit moment is afhankelijk van de horizontale positie van A, dus $M_v = M_v(\alpha)$. Voor M_h geldt dat niet. De reden daarvoor is dat M_h staat voor het koppel dat wordt geleverd door F_h en F_w (aangenomen dat sprake is van horizontaal evenwicht). Dat koppel is onafhankelijk van de positie van A.

Voorts is M_k het moment om A ten gevolge van de korrelspanning, gegeven door

$$M_k = \frac{(1-3\alpha)\sigma_1 + (2-3\alpha)\sigma_2}{BL^2/6} \tag{8.18}$$

Invullen in (8.17) geeft voor het evenwicht van momenten

$$(1-3\alpha)\sigma_1 + (2-3\alpha)\sigma_2 + \frac{M_v(\alpha) + M_h}{BL^2/6} = 0 \tag{8.19}$$

Samen met (8.16) kunnen we hieruit de uiterste korrelspanningen σ_1 en σ_2 oplossen:

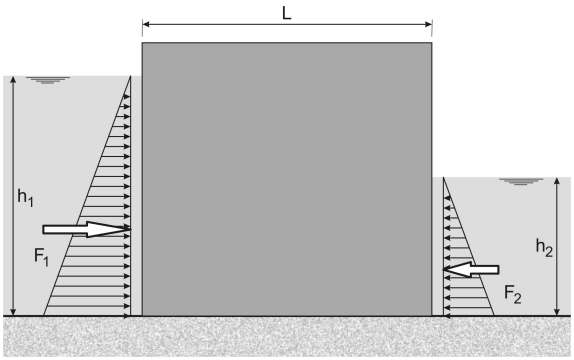
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (6\alpha - 4)\frac{F_v}{BL} + \frac{M_v(\alpha) + M_h}{W} \\ \sigma_2 &= (2 - 6\alpha)\frac{F_v}{BL} - \frac{M_v(\alpha) + M_h}{W} \end{aligned} \quad ; \quad W = \frac{1}{6}BL^2 \tag{8.20}$$

waarin W is het weerstandsmoment van het grondvlak.

Als we punt A in het midden van het grondvlak van de constructie kiezen, geldt dat $\alpha = 1/2$ en reduceert (8.20) tot

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{F_v}{BL} + \frac{M_v(1/2) + M_h}{W} \\ \sigma_2 &= -\frac{F_v}{BL} - \frac{M_v(1/2) + M_h}{W} \end{aligned} \tag{8.21}$$

Dit is overeenkomstig uitdrukking (8.4) voor de doorsnede van een ligger.



Figuur 8.9: De schets betreft een caisson die dienst doet als volledig gesloten waterkerende constructie. Aan weerszijden werken hydrostatische waterdrukken met resultanten F_1 en F_2.

8.4 Hydraulische belastingen

8.4.1 Inleiding

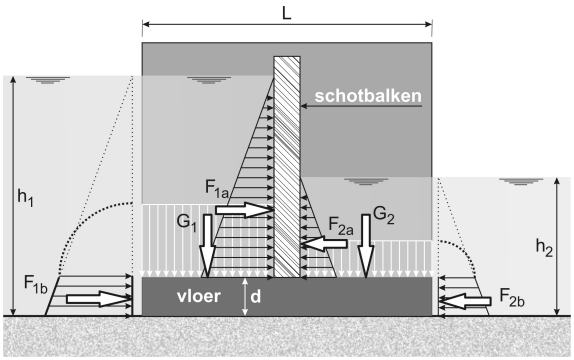
Bij een waterkerende constructie leidt het in stand te houden verval altijd tot een horizontale belasting. Dat is echter niet de enige relevante hydraulische belasting. Onder de constructie bevindt zich in het algemeen ook water en dat kan tot een opwaartse belasting leiden. In extreme gevallen kan de constructie door deze belasting opdrijven (zie paragraaf 8.2.5). Daarnaast gaat water in of boven de constructie gepaard met een neerwaartse belasting. Voor een beoordeling van de stabiliteit van een waterkerende constructie is het noodzakelijk dat al deze hydraulische belastingen worden geïdentificeerd en gekwantificeerd. Voor horizontale en neerwaartse belastingen maken we onderscheid tussen gesloten en doorlatende constructies en bij opwaartse belastingen tussen constructies met en zonder een onderloopsheidscherm (zie paragraaf 8.2.6).

8.4.2 Horizontale en neerwaartse belastingen bij een gesloten constructie

Zo'n beetje het meest elementaire geval van een volledig gesloten waterkerende constructie is een caisson. Dat is een eenvoudige, rechthoekige betonnen doos, doorgaans gevuld met zand of steen om opdrijven te voorkomen. In de richting van het in stand te houden verval werken aan weerszijden hydrostatische waterdrukken. Deze situatie is geschetst in figuur 8.9. De krachten F_1 en F_2 in deze figuur zijn de resultanten van de hydrostatische waterdrukken tegen de zijkanten van de constructie. Per eenheid van breedte (loodrecht op het vlak van tekening in de figuur) geldt dat

$$F_1 = \frac{1}{2}\rho g h_1^2 \quad ; \quad F_2 = -\frac{1}{2}\rho g h_2^2 \tag{8.22}$$

De coupure, geschetst in figuur 8.3, is in die zin een iets complexere constructie dat er niet alleen water aan de buitenkant tegenaan staat, maar dat zich ook water in de constructie bevindt. De reden daarvoor is dat het een U-vormige betonnen



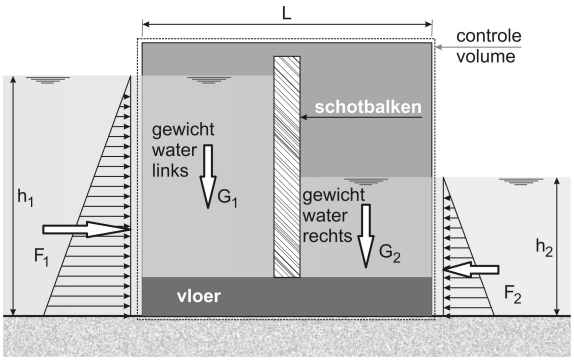
Figuur 8.10: verloop van waterdrukken (en bijbehorende resultanten) in de langsdoorsnede van de coupure (figuur 8.3).

bak betreft met open einden. Daardoor kan water de constructie binnendringen tot weerszijden van de schotbalken. De hydrostatische belasting wordt uitgeoefend op deze balken en afgedragen op de zijwanden van de U-vormige betonnen bak en van daar uit op de ondergrond. Daarnaast staan ook de zijwanden en vloer van de U-vormige bak bloot aan waterdrukken.

Bij een geometrisch symmetrische constructie zoals de coupure, is ook sprake van symmetrie met betrekking tot de waterdrukken tegen de zijwanden (drukken dwars op de richting van het verval). Hoewel deze drukken van primair belang zijn voor de dimensionering van wanden en vloer van de constructie, spelen ze geen rol bij de uitwendige stabiliteit. Gezien over de gehele symmetrische constructie heffen die elkaar immers op. Dat geldt echter niet voor de drukken die zich afspelen in een verticaal vlak waarin ook het verval over de constructie zich manifesteert (de langsdoorsnede). Het netto effect van deze drukken is van invloed op de stabiliteit van de constructie.

Voor de bepaling van dit netto effect gaan we voor de langsdoorsnede na hoe de waterdruk verloopt langs het grensvlak tussen water en constructie. In figuur 8.10 is dat verloop geschetst voor de coupure uit figuur 8.3. Aan de hoogwaterzijde (links in figuur 8.10) vinden we horizontale waterdruk tegen de kopse kant van de vloer (met resultante F_{1b}) en tegen de schotbalken (met resultante F_{1a}). Deze beide drukken worden ook uitgeoefend op de kopse kanten van de zijwanden van de U-vormige betonnen bak. Daarnaast is sprake van waterdruk op het deel van de vloer van de constructie links van de schotbalken (met resultante G_1). Voor de waterdrukken aan laagwaterzijde, dus rechts van de schotbalken in figuur 8.10, vinden we een analoog verloop.

Hoewel de hydrostatische belastingen die in figuur 8.10 zijn geschetst op het eerste gezicht mogelijk veel ingewikkelder lijken dan die bij het caisson in figuur 8.9, is het verschil in feite gering. Aan hoogwaterzijde kunnen we de belasting tegen de schotbalken (met resultante F_{1a}) langs de bijbehorend horizontale werklijn naar links verschuiven totdat deze past bovenop verdeelde belasting tegen de vloer van de constructie (met resultante F_{1b}). We krijgen dan het driehoekig drukverloop dat links in figuur 8.10 is geschetst en dat analoog is aan het drukverloop aan



Figuur 8.11: overzicht van belastingen op een rechthoekig controle volume dat om de constructie van figuur 8.10 is gedacht. G_1 en G_2 zijn de gewichten van het water binnen het controle volume.

de linkerzijde van het caisson in figuur 8.9. Het resultaat van de verschuiving van drukken tegen de schotbalken is aangegeven in figuur 8.11. De verschuiving is daar toegepast voor beide zijden van de schotbalken. Voor de resultante horizontale belastingen geldt dat $F_1 = F_{1a} + F_{1b}$ en $F_2 = F_{2a} + F_{2b}$.

De essentie van deze operatie is dat we een (in dit geval rechthoekig) controle volume hebben gedefinieerd waar de constructie juist in past (aangegeven in figuur 8.11). Dat controle volume is vergelijkbaar met het rechthoekig caisson van figuur 8.9. De resultante van alle horizontale belastingen op de grensvlakken van constructie en water is identiek aan de resultante van de horizontale belastingen op het controle volume. Bedenk dat dit onafhankelijk is van de geometrie van die grensvlakken binnen het controle volume.

Voor de verticale belastingen volgen we een overeenkomstige aanpak. De resultante van alle verticale belastingen op de constructie, inclusief het eigen gewicht, is gelijk aan de resultante van alle verticale belastingen op het controle volume, inclusief het eigen gewicht van alles wat zich binnen dat volume bevindt. In het voorbeeld van de coupure in figuur 8.10 betreft dat de wanden, vloer en schotbalken, maar ook het water aan weerszijden van de schotbalken. Het gewicht van het water aan hoogwaterzijde van de schotbalken is gelijk aan G_1 en aan laagwaterzijde van die balken is dat G_2.

Tot slot van deze beschouwing over horizontale hydraulische belastingen op een gesloten waterkerende constructie, een drietal opmerkingen:

- Naast hydrostatische drukken kan een waterkerende constructie ook blootgesteld zijn aan golfbelasting. Met een lopende golf wordt impuls overgedragen in de richting van golfvoortplanting. Als een golf invalt op een (starre) constructie, wordt impuls overgedragen naar de constructie. De invallende golf oefent daarmee een kracht uit op de constructie. Voor nadere uitleg en methoden om deze belasting te kwantificeren, wordt verwezen naar de literatuur.
- Constructies als overlaten en gemalen hebben naast een kerende ook een doorlatende functie. Daarbij is sprake van een stroming door de constructie ofwel door het controle volume dat we om de constructie heen denken. Met

die stroming wordt impuls overgedragen en dat draagt bij aan het totaal aan belastingen op de constructie. In de volgende paragraaf gaan we hier nader op in.

- Naast de horizontale hydraulische belastingen die we hiervoor hebben bekeken, kan ook een opwaartse waterdruk tegen de onderzijde van het grondvlak van de constructie optreden. Dit is bijvoorbeeld het geval bij een doorlatende ondergrond. Als deze opwaartse belasting groter is dan de som van alle neerwaartse belastingen, drijft de constructie op. Dat is een van de faalmechanismen waar we op moeten toetsen bij controle van de stabiliteit van de constructie. Grootte en verloop van deze opwaartse waterdruk komt aan de orde in paragraaf 8.4.4 ¨Opwaartse belastingen¨.

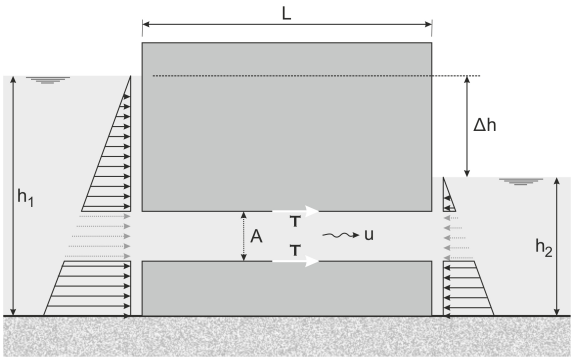
8.4.3 Horizontale belastingen bij een doorlatende constructie

Bij constructie die naast een kerende ook een waterdoorlatende functie hebben, treden behalve de hydrostatische belastingen die we in de voorgaande paragraaf hebben gezien, ook belastingen op als gevolg van de stroming door de constructie. Om hier een beeld van te krijgen, beginnen we met een betrekkelijk simpel voorbeeld. Dat betreft een rechthoekig caisson met daarin een horizontale, prismatische buis. Vervolgens bouwen op dit voorbeeld voort naar meer complexe constructies. In alle gevallen gaan we uit van stationaire stroming. Instationaire stroming laten we buiten beschouwing.

Een langsdoorsnede van het caisson met de horizontale buis is geschetst in figuur 8.12. Aan weerszijden is het caisson onderhevig aan hydrostatische belasting die lineair oploopt van 0 aan het wateroppervlak tot $\rho g h$ aan de bodem (ρ is de dichtheid van water en h de waterdiepte). Vanwege de stroming de buis in en uit, wijkt de waterdruk rond de uiteinden van de buis enigszins af van de hydrostatische druk. Dat heeft te maken met lokale kromming van stroomlijnen en die hangt mede af van de vormgeving van de aansluiting van de buis op de buitenwand van het caisson. In veel gevallen is de afwijking zo gering dat deze in eerste benadering verwaarloosd kan worden. Wij beperken ons tot zulke gevallen en gaan ervan uit dat de werkelijke waterdruk tegen de constructie bij goede benadering gelijk is aan de hydrostatische.

De buis vormt een gat in de constructie en de waterdruk ter hoogte van dat gat draagt per saldo niet bij aan de hydrostatische belasting op de constructie. Het gaat om een netto waterdruk gelijk aan $\rho g(h_1 - h_2)$. Deze is uniform over het oppervlak A van de dwarsdoorsnede van de buis. Geïntegreerd over dat oppervlak levert deze druk een netto kracht $F_b = \rho g(h_1 - h_2)A$ (naar rechts in figuur 8.12). Als gevolg van de aanwezigheid van het gat in de constructie, moet deze kracht F_b in mindering worden gebracht op de netto hydrostatische belasting die zou optreden indien de constructie volledig gesloten zou zijn.

Daar staat tegenover dat er als gevolg van het verval over de constructie een stroming door de buis zal optreden. Als gevolg van wrijving oefent deze stroming



Figuur 8.12: Langsdoorsnede van een kerende constructie die ook water doorlaat via een horizontale buis (met oppervlakte A van de dwarsdoorsnede). De stroomsnelheid in de buis is u en τ is de schuifspanning die de wand ondervindt.

een schuifspanning uit op de wand van de buis (in figuur 8.12 aangegeven met τ) en die draagt bij aan de totale belasting op de constructie.

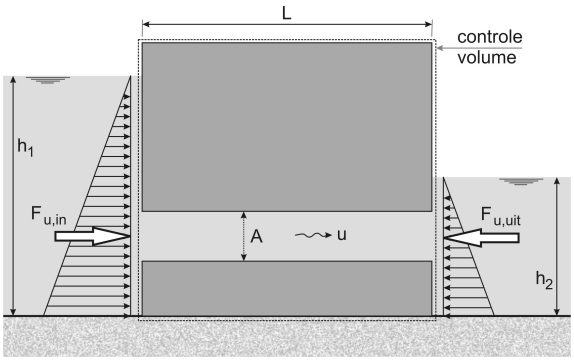
De stroming door de buis wordt aangedreven door het verval $\Delta h = (h_1 - h_2)$ over de constructie. Bij een constant verval is die stroming stationair. De stroomsnelheid u die zich daarbij in de buis instelt, is zodanig dat de bijbehorende wandwrijving die de stroming ondervindt evenwicht maakt met de kracht die de stroming aandrijft. In dit geval is de aandrijvende kracht gelijk aan F_b. De wandwrijving, geïntegreerd over de buis, is dus ook gelijk aan F_b, maar tegengesteld gericht (naar links in figuur 8.12). Bedenk dat dit de wrijvingskracht is die de stroming ondervindt. De wrijvingskracht die de buis ondervindt, is net zo groot maar werkt in tegenovergestelde richting (naar rechts in figuur 8.12). Kortom, als gevolg van de wandwrijving die optreedt bij de stroming door de buis, wordt op de constructie een kracht F_b uitgeoefend (naar rechts in figuur 8.12). Deze komt bovenop de eerder bepaalde horizontale hydrostatische belasting.

De totale horizontale belasting op de constructie komt hiermee op

- de netto hydrostatische belasting die zou optreden in het geval dat de constructie volledig gesloten zou zijn,
- minus het gedeelte van de belasting die zich ter hoogte van het gat in de constructie manifesteert (in dit geval gelijk aan F_b),
- plus de wrijvingskracht die de stroming op de wand van de buis uitoefent (in dit geval gelijk aan F_b).

Het totaal is in dit specifieke voorbeeld juist gelijk aan de belasting die bij een volledig gesloten constructie zou optreden. In het algemeen geldt dat echter niet. Het voorbeeld is slechts bedoeld om aan te geven dat bij stroming door een constructie naast hydrostatische belastingen ook wandwrijving een rol van betekenis speelt.

Bij een meer complexe constructie dan een rechthoekig caisson met daarin een horizontale prismatische buis, is het vaak lastig en bewerkelijk om alle wrijvingskrachten en waterdrukken volledig in kaart te brengen. Een manier om daaraan tegemoet te komen is het definiëren van een controle volume rond de constructie



Figuur 8.13: Horizontale belastingen op een controle volume dat om de caisson met de buis sluit.

en voor dat volume een impulsbalans op te stellen, net zoals we dat bij gesloten constructies hebben gedaan. De enige, maar wezenlijke uitbreiding die we daarbij moeten plegen, is het in rekening brengen van overdracht van impuls als gevolg van stroming het controle volume in en uit.

In figuur 8.13 is de caisson met de buis geschetst inclusief een controle volume dat om beide elementen sluit. Voor de resultante horizontale belasting F_{res} op het controle volume geldt

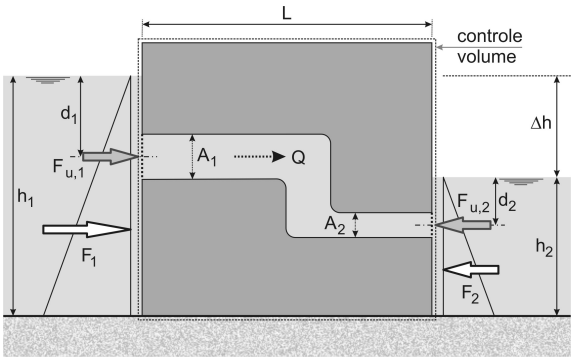
$$F_{res} = \frac{1}{2}\rho g h_1^2 B + F_{u,in} - \frac{1}{2}\rho g h_2^2 B + F_{u,uit} \tag{8.23}$$

waarbij alle krachten naar rechts positief zijn gerekend en B de breedte van de constructie is loodrecht op het vlak van tekening. De krachten F_u zijn het effect van de overdracht van impuls als gevolg van de stroming de buis in ($F_{u,in}$) en de buis uit ($F_{u,uit}$). Bij instroming ondervindt het controle volume een kracht in de richting van de stroming. Bij uitstroming is de richting van de bijbehorende kracht tegengesteld aan die van de stroming. In dit voorbeeld is F_u,in zodoende naar rechts gericht en F_u,uit naar links. Beide krachten zijn gerelateerd aan de stroomsnelheid aan de uiteinden van de buis. Die zijn in dit geval van een prismatische buis aan elkaar gelijk. Zodoende zijn

$$F_{u,in} = \rho u^2 A \quad ; \quad F_{u,uit} = -\rho u^2 A \tag{8.24}$$

Als we dit invullen in (8.23) vinden we dat $F_{res} = \rho g(h_1^2 - h_2^2)B/2$. Dat is gelijk aan de resultante hydrostatische belasting die zou optreden als de caisson volledig gesloten zou zijn en het is in overeenstemming met het resultaat dat we eerder hebben gevonden na een gedetailleerde beschrijving van de stroming in de buis en de daarmee gepaard gaande wandwrijving.

Voor de horizontale prismatische buis geldt blijkbaar dat $F_{u,in}+F_{u,uit} = 0$. Sterker nog, het geldt altijd bij stationaire stroming en even grote in- en uitstroomopeningen. Echter, als die openingen niet in elkaars verlengde liggen, hebben $F_{u,in}$ en $F_{u,uit}$ niet dezelfde werklijn. De som van deze twee krachten is dan nog steeds gelijk aan nul, maar er is wel een koppel dat bijdraagt aan M_h (zie de paragrafen 8.3.1 ¨Berekening van de korrelspanning¨ en 8.5.1 ¨Controle op kantelen¨).



Figuur 8.14: Horizontale belastingen op een controle volume rond een caisson die water doorlaat via een willekeurig gevormde gesloten leiding.

Voor de volledigheid merken we nog op dat het water in de buis deel uitmaakt van de massa in het controle volume en dus meetelt voor het eigen gewicht van alles wat zich in dat volume bevindt.

De redenering die we hebben gevolgd voor een caisson die water doorlaat via een horizontale prismatische buis, kunnen we ook toepassen op een caisson met een willekeurig gevormde buis. Een voorbeeld daarvan is geschetst in figuur 8.14.

We gaan uit van een stationair debiet Q door de buis. De omvang van dit debiet kunnen we bepalen aan de hand van het verval Δh over de constructie in relatie tot de geometrie en wandruwheid van de buis (zie hoofdstuk 3.3 ¨Stroming in gesloten leidingen¨). Aan hoogwaterzijde stroomt water het controle volume binnen met een gemiddelde snelheid Q/A_1 en aan laagwaterzijde gaat het eruit met snelheid Q/A_2. De resultante horizontale belasting F_{res} op het controle volume komt hiermee op

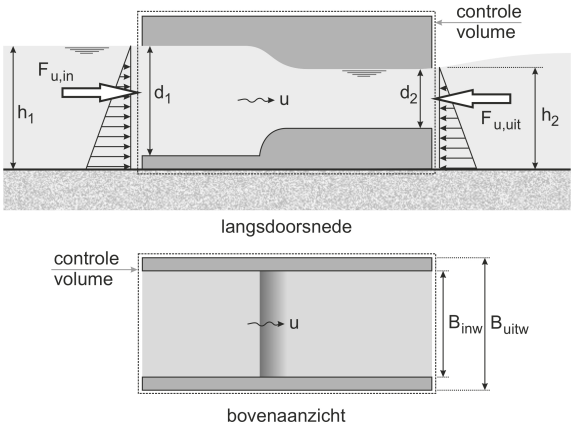
$$F_{res} = \frac{1}{2}\rho g h_1^2 B + \rho \frac{Q^2}{A_1} - \frac{1}{2}\rho g h_2^2 B - \rho \frac{Q^2}{A_2} \tag{8.25}$$

Bij constructies waarin een open waterloop is opgenomen, zijn de afmetingen van de oppervlakken waarover impuls wordt overgedragen door stroming mede afhankelijk van de waterstanden aan weerszijden van de constructie. Een voorbeeld daarvan is een overlaat die is geplaatst in een bak met een u-vormige dwarsdoorsnede. In figuur 8.15 zijn de langsdoorsnede en het bovenaanzicht van zo'n constructie schematisch weergegeven.

Het equivalent van uitdrukking (8.25) voor de resultante horizontale belasting op deze overlaat luidt

$$F_{res} = \frac{1}{2}\rho g h_1^2 B_{\text{uitw}} + \rho \frac{Q^2}{d_1 B_{\text{inw}}} - \frac{1}{2}\rho g h_2^2 B_{\text{uitw}} - \rho \frac{Q^2}{d_2 B_{\text{inw}}} \tag{8.26}$$

waarin B_{inw} en B_{uit} achtereenvolgens de inwendige en uitwendige breedte van de u–vormige bak zijn en d_1 en d_2 de waterdiepte aan in– en uitstroomzijde (zie figuur 8.15).



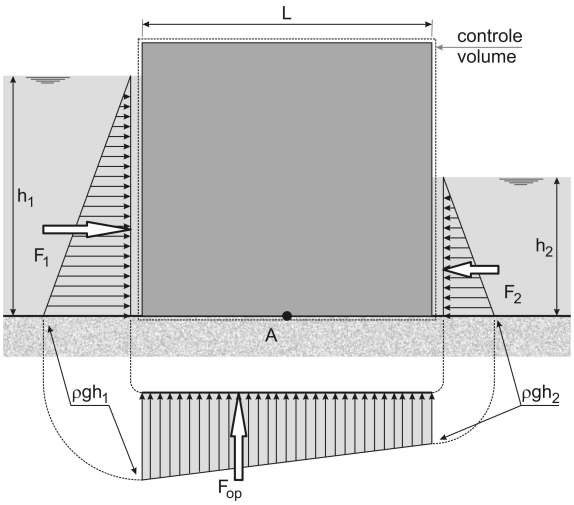
Figuur 8.15: Schets van de langsdoorsnede en het bovenaanzicht van een overlaat in een u-vormige bak. In de langsdoorsnede zijn de horizontale hydraulische belastingen aangegeven.

In uitdrukkingen (8.25) en (8.26) hebben we impliciet aangenomen dat de stroomsnelheid uniform is over het oppervlak waardoor die stroming plaatsvindt. Die aanname blijkt uit de termen met Q/A in (8.25) en $Q/(dB)$ in (8.26). Dat is niet helemaal correct. Nabij de wanden en vloer van de constructie is de stroomsnelheid lager dan op enige afstand daarvandaan. In praktisch relevante situaties is de afwijking echter gering, zodat de beide uitdrukkingen toch een goede benadering vormen.

8.4.4 Opwaartse belastingen

Bij waterkerende constructies die zijn gefundeerd op een doorlatende ondergrond bevindt zich onder het grondvlak water dat voor een opwaartse belasting kan zorgen. In veel gevallen is sprake van een stroming onder de constructie door die wordt aangedreven door het verval over de constructie. Daarbij is de opwaartse waterdruk tegen het grondvlak niet uniform verdeeld, maar neemt af van de hoogwaternaar de laagwaterzijde. Een analytische berekening van het stromingspatroon in de ondergrond en de bijbehorende waterdrukken is in de praktijk vaak niet mogelijk. Bijvoorbeeld als zich ruimtelijke variaties voordoen in de samenstelling van de ondergrond, kan de inzet van numerieke modellen noodzakelijk zijn om een nauwkeurig beeld te krijgen van dat stromingspatroon.

Voor een globale beoordeling van de stabiliteit van een waterkerende constructie gaat dat te ver. In plaats daarvan maken we gebruik van een benadering die is gebaseerd op de overweging dat vooral de stroming op de grens tussen constructie en ondergrond bepalend is voor de druk tegen het grondvlak. Deze grens wordt de kwelweg genoemd. We nemen aan dat de stijghoogte langs de kwelweg, tussen de uiteinden van het grondvlak van de constructie, lineair afneemt van de stijghoogte aan hoogwaterzijde tot die aan laagwaterzijde. Hiermee ligt de opwaartse waterdruk ($\rho g h_s$, met h_s de stijghoogte) over het volledige grondvlak vast en kunnen we de bijbehorende bijdrage aan de verticale belasting en het moment op de constructie bepalen, en dus ook de invloed van die waterdruk op de uitwendige



Figuur 8.16: Benadering van het verloop van de opwaartse waterdruk tegen het grondvlak van een waterkerende constructie. De resultante is F_op en punt A verwijst naar het geometrisch zwaartepunt van het grondvlak.

stabiliteit van de constructie.

Om gevoel te krijgen hoe we met deze benadering van het drukverloop de resultante opwaartse kracht tegen het grondvlak van een waterkerende constructie kunnen berekenen, sluiten we aan bij het controle volume dat we in voorgaande paragrafen nauwsluitend om de constructie heen hebben gedacht. De onderzijde van dat blokvormige volume valt samen met het grondvlak van de constructie. Dit controle volume is geschetst in figuur 8.16, samen met de waterdrukken die erop werken.

Aan hoogwaterzijde neemt de waterdruk langs de verticale wand van het controle volume toe van 0 ter hoogte van de waterspiegel tot $\rho g h_1$ op de bodem van de waterloop. Die druk vinden we ook tegen het grondvlak van de constructie, helemaal aan hoogwaterzijde. Omdat druk alzijdig is, ondervindt het grondvlak een druk in opwaartse richting. Op dezelfde manier vinden we helemaal aan laagwaterzijde van het grondvlak een druk $\rho g h_2$. Volgens onze aanname verloopt de druk tussen deze beide uitersten lineair. Dat is geschetst in figuur 8.16. Als we een horizontale coördinaat x definiëren langs het grondvlak van de constructie en met $x = 0$ in het midden van dat grondvlak (punt A in figuur 8.16), dan kunnen we het verloop van de opwaartse druk schrijven als

$$p_{op}(x) = \rho g(h_2 - h_1)\frac{x}{L} + \rho g\frac{h_2 + h_1}{2} \tag{8.27}$$

Voor de resultante opwaartse kracht F_{op} en het bijbehorende moment M_{op} om A vinden we achtereenvolgens

$$F_{op} = B\int_{-L/2}^{L/2} p_{op}(x)\mathrm{d}x = \rho g\frac{h_2 - h_1}{2}L \tag{8.28}$$

waarin B de breedte van het grondvlak (loodrecht op het vlak van tekening in figuur 8.16) en

$$M_{op} = B \int_{-L/2}^{L/2} x p_{op}(x) \mathrm{d}x = \rho g \frac{h_2 - h_1}{12} L^2 \tag{8.29}$$

Afhankelijk van de grootte van het verhang $|\Delta h|/L = |h_2 - h_1|/L$ kan de stroming onder de constructie zo sterk zijn dat gevaar voor *piping* optreedt. Reductie van het verhang is één mogelijkheid om dat gevaar te verminderen. Dat zou kunnen door het verval over de constructie kleiner te maken, maar dat is in de praktijk doorgaans geen optie. Een andere manier is het verlengen van de kwelweg door de constructie te verlengen of door het plaatsen van een zogeheten onderloopsheidscherm. Aanbrengen van bodembescherming rond de constructie is een ander alternatief. Dat komt in paragraaf 8.2.6 aan bod.

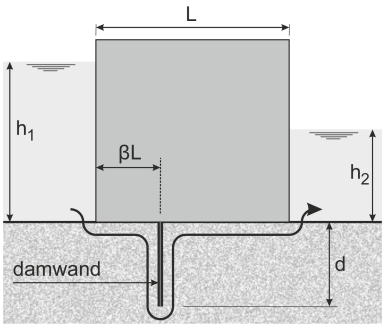
In het navolgende gaan we in op het onderloopsheidscherm. Naast het reduceren van het gevaar van *piping*, heeft het invloed op het verloop van de opwaartse waterdruk tegen het grondvlak van de constructie en dus op de uitwendige stabiliteit daarvan. Ook zonder gevaar voor *piping* kan de ontwerper besluiten tot het plaatsen van zo'n scherm, simpelweg omdat het effect op de opwaartse druk een verbetering van de stabiliteit met zich mee kan brengen.

Een onderloopsheidscherm wordt doorgaans uitgevoerd als een damwand die onder de constructie wordt geplaatst. Deze wand sluit waterdicht aan op het grondvlak van de constructie. Hoewel dat niet altijd het geval hoeft te zijn, gaan wij ervan uit dat in die aansluiting geen krachten worden overgebracht. We nemen aan dat ter plaatse van de aansluiting het onderloopsheidscherm geen kracht uitoefent op de constructie. Dat scherm dient slechts als verlenging van de kwelweg en heeft dus uitsluitend invloed op het verloop van de opwaartse waterdruk.

Om een beeld te krijgen van die invloed, bouwen we voort op onze eerdere aanname dat de stijghoogte langs de kwelweg lineair verloopt tussen die aan beide uiteinden van het grondvlak van de constructie. Door de aanwezigheid van een onderloopsheidscherm is die kwelweg, gedefinieerd als de grens tussen constructie en ondergrond, niet langer beperkt tot het grondvlak van de constructie. Ook het grensvlak tussen onderloopsheidscherm en ondergrond maakt deel uit van de kwelweg omdat dit scherm waterdicht op de constructie is aangesloten. In figuur 8.17 is de kwelweg langs het grondvlak van de constructie en het onderloopsheidscherm schematisch aangegeven.

Ten opzichte van de situatie zonder onderloopsheidscherm is de kwelweg verlengd met twee maal de lengte van dat scherm. Beide zijden van het scherm maken immers contact met de ondergrond. Daarmee is het verhang langs die kwelweg gereduceerd tot $|h_2 - h_1|/(L + 2d)$, waarin d de verticale afmeting van het onderloopsheidscherm is.

Dat de twee zijden van het onderloopsheidscherm deel uitmaken van de kwelweg waarlangs de stijghoogte gestaag toe- of afneemt, betekent dat er een netto horizontale kracht op dat scherm wordt uitgeoefend. Met ons uitgangspunt dat



Figuur 8.17: Indicatie van de kwelweg (de grens tussen constructie en ondergrond) bij een constructie die is voorzien van een onderloopsheid-scherm. Langs de kwelweg treedt stroming op in de richting van de pijl.

de verbinding tussen scherm en constructie geen krachten overbrengt, moet deze kracht volledig worden gecompenseerd door een verschil in korrelspanning aan weerszijden van het scherm. Bovendien hebben krachten die op het scherm worden uitgeoefend, geen invloed op de stabiliteit van de constructie.

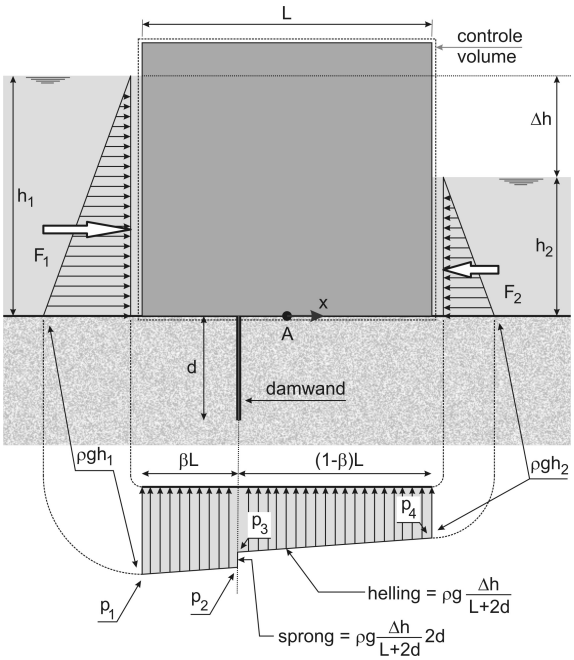
Het verloop van de opwaartse druk tegen het grondvlak van de constructie is geschetst in figuur 8.18. De druk aan hoogwaterzijde van dat grondvlak is gelijk aan $\rho g h_1$. In figuur 8.18 is deze druk aangegeven als p_1. Langs de kwelweg neemt de druk af met $\rho g|h_2 - h_1|/(L + 2d)$ per eenheid van lengte. Deze drukgradiënt is onafhankelijk van de positie van het scherm onder de constructie. Die positie heeft echter wel invloed op het drukverloop.

Stel dat het scherm is geplaatst op een afstand βL (met $0 \leq \beta \leq 1$) vanaf het linker uiteinde van het grondvlak van de constructie. In dat geval komt de druk direct aan hoogwaterzijde van het onderloopsheidscherm op $p_2 = \rho g(h_1 + \beta L|h_2 - h_1|/(L+2d))$. Deze druk is hoger dan die direct aan laagwaterzijde van het onderloopsheidscherm (p_3). Het verschil is evenredig met de afname van de stijghoogte over het deel van de kwelweg dat samenvalt met de beide zijden van het scherm. De grootte van dit drukverschil is $\rho g 2d|h_2 - h_1|/(L + 2d)$. Verder naar de laagwaterzijde neemt de druk lineair af tot $p_4 = \rho g h_2$.

De drukken p_1 tot en met p_4 in figuur 8.18 worden gegeven door

$$\begin{cases} p_1 = \rho g h_1 \\ p_2 = \rho g \left(h_1 + \beta L \dfrac{h_2 - h_1}{L + 2d} \right) \\ p_3 = \rho g \left(h_1 + (\beta L + 2d) \dfrac{h_2 - h_1}{L + 2d} \right) \\ p_4 = \rho g h_2 \end{cases} \tag{8.30}$$

Met de eerder gedefinieerde horizontale coördinaat x langs het grondvlak (met $x = 0$ in punt A in het midden van het grondvlak), kunnen we het verondersteld



Figuur 8.18: Verloop van de opwaartse druk langs het grondvlak van de constructie als er een onderloops-heidscherm is geplaatst (de damwand in de figuur). Het geometrisch zwaartepunt van het grondvlak is aangegeven met A (tevens oorsprong van een horizontale coördinaat x).

lineaire verloop van de druk langs het grondvlak schrijven als

$$p(x) = \begin{cases} \rho g \left(h_1 + \left(x + \frac{1}{2}L \right) \frac{h_2 - h_1}{L+2d} \right) & ; \quad -\frac{1}{2}L \leq x \leq \left(\beta - \frac{1}{2} \right) L \\ \rho g \left(h_1 + \left(x + 2d + \frac{1}{2}L \right) \frac{h_2 - h_1}{L+2d} \right) & ; \quad \left(\beta - \frac{1}{2} \right) L < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{8.31}$$

Net als voor het geval zonder onderloopsheidscherm vinden we voor de resultante opwaartse belasting F_{op} en het bijbehorende moment M_{op} om punt A (zie uitdrukkingen (8.28) en (8.29)) achtereenvolgens

$$\begin{aligned} F_{op} &= B \int_{-L/2}^{L/2} p(x) \mathrm{d}x = \rho g B L \left(\frac{h_1 + h_2}{2} + d(1 - 2\beta) \frac{h_2 - h_1}{L + 2d} \right) \\ M_{op} &= B \int_{-L/2}^{L/2} x p(x) \mathrm{d}x = \rho g B L^2 \left(\frac{1}{12} L + \beta(1 - \beta) d \right) \frac{h_2 - h_1}{L + 2d} \end{aligned} \tag{8.32}$$

In het bovenstaande hebben we uitdrukkingen afgeleid voor het verloop van de opwaartse waterdruk tegen het grondvlak van een op staal gefundeerde waterkerende constructie met en zonder een onderloopsheidscherm. De gevolgde redenering is eenvoudig uit te breiden naar toepassing van meerdere onderloopsheidschermen. Het is daarbij echter van belang om steeds kritisch te kijken naar de geldigheid van de veronderstellingen die aan de redenering ten grondslag liggen. We hebben onder meer aangenomen dat de stroming onder de constructie zich concentreert

langs het grensvlak tussen constructie (inclusief onderloopsheidschermen) en ondergrond. Bij toepassing van twee schermen met een onderlinge horizontale afstand die gering is ten opzichte van hun verticale afmeting, is het maar de vraag of die veronderstelling gehandhaafd kan worden. In zulke gevallen kan de inzet van numerieke modellen voor grondwaterstroming tot een meer betrouwbaar beeld leiden.

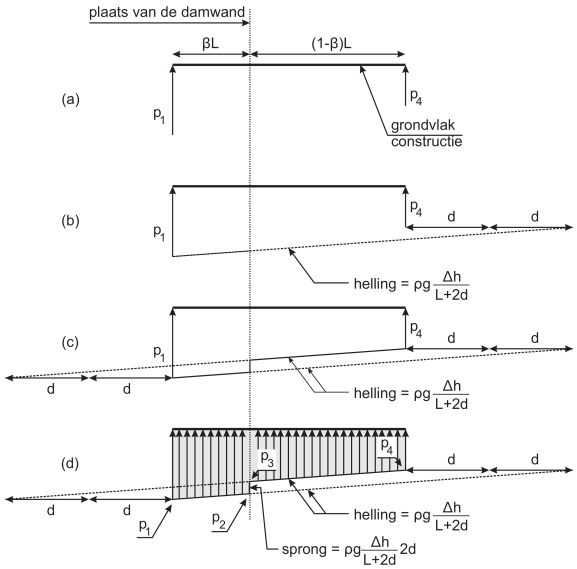
Naast de geschetste analytische methode om het verloop van de opwaartse waterdruk tegen het grondvlak van een constructie te bepalen, zijn er ook grafische methoden. In vroeger dagen, voordat computers hun intrede hadden gedaan, waren grafische methoden heel gangbaar. Dat we tegenwoordig ruimschoots kunnen beschikken over krachtige computers, is echter geen argument om afscheid te nemen van die oude grafische methoden. De belangrijkste redenen daarvoor zijn de elegantie van die methoden en, daarmee samenhangend, de inzichtelijkheid die ze bieden. Daarom gaan we in het navolgende in op de grafische alternatieven voor uitdrukkingen (8.31) en (8.32) voor het drukverloop onder de constructie, de resultante opwaartse kracht en het bijbehorende moment rond A.

In figuur 8.19 is in vier stappen aangegeven hoe het drukverloop kan worden geconstrueerd als onder de constructie een onderloopsheidscherm aanwezig is. Het begint met het tekenen van de drukken p_1 en p_4 aan de beide uiteinden van dat grondvlak. In figuur 8.19a is dat gedaan met twee omhoog wijzende pijlen. De lengte van zo'n pijl is een maat voor de grootte van de druk die ermee wordt weergegeven. Daarvoor moet een schaal worden gekozen en die moet consequent worden gehandhaafd.

Langs het grondvlak verloopt de opwaartse druk lineair. In dit voorbeeld, met $p_4 < p_1$, neemt de druk van links naar rechts in de figuur af. Dat geven we weer met een hellende lijn. De helling staat voor het verhang langs de kwelweg. In termen van druk is het verhang gelijk aan $|p_1 - p_4|/(L + 2d)$. Hierin is $|p_1 - p_4|$ gelijk aan $\rho g \Delta h$, met Δh het verval over de constructie. De schuine lijn vanuit p_1 in figuur 8.19b heeft een helling die hiermee overeenkomt. Deze lijn geeft het verloop van de opwaartse druk vanaf het linker uiteinde van het grondvlak tot aan het onderloopsheidscherm.

Vanuit het rechter uiteinde van het grondvlak kunnen we op dezelfde manier het verloop van de opwaartse druk construeren voor het gedeelte van het grondvlak rechts van het onderloopsheidscherm. Dat is gedaan in figuur 8.19c. Ter hoogte van het onderloopsheidscherm ontstaat een discontinuïteit. Deze geeft het verval weer over het deel van de kwelweg dat samenvalt met de beide verticale zijden van het onderloopsheidscherm. Het complete drukverloop langs het grondvlak van de constructie is getekend in figuur 8.19d en komt overeen met wat in figuur 8.18 is geschetst.

Voor de berekening van de resultante opwaartse kracht en het bijbehorende moment om het midden van het grondvlak van de constructie, bouwen we voort op het geconstrueerde drukverloop van figuur 8.19d en de drukken p_1 tot en met p_4 zoals berekend uit uitdrukking (8.30). Als het drukverloop nauwkeurig op schaal



Figuur 8.19: Vier stappen in een grafische methode om het verloop van de opwaartse druk tegen het grondvlak van de constructie te construeren, rekening houdend met het effect van een onderloopsheidscherm (damwand met lengte d) op dat verloop.

is geconstrueerd, kunnen die drukken daar uit worden opgemeten. Het grafisch construeren van het drukverloop is daar van oorsprong mede voor bedoeld. Dat is echter niet meer van deze tijd. Tegenwoordig berekenen we die drukken. Het geconstrueerde drukverloop helpt echter wel bij het bepalen van de resultante opwaartse kracht. Het oppervlak onder dat verloop zoals geschetst in figuur 8.19d, is gelijk aan de opwaartse kracht per eenheid van breedte van het grondvlak van de constructie (loodrecht op het vlak van tekening). Om de grootte van dat oppervlak te bepalen, delen we het op in makkelijk hanteerbare brokken, zoals rechthoeken en driehoeken. Er zijn talloze manieren waarop dat kan. Daarvan zijn er in figuur 8.20 twee min of meer voor de hand liggende gegeven.

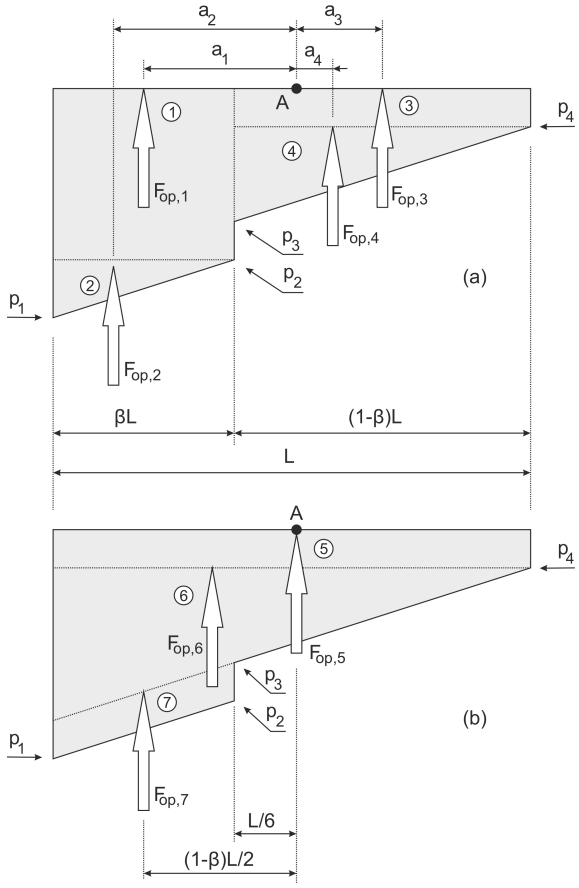
Een van deze twee manieren (figuur 8.20a) gaat uit van een scheiding van het drukverloop langs het grondvlak van de constructie ter plaatse van de aansluiting met het onderloopsheidscherm. Aan beide zijden van dat scherm heeft de drukgrafiek de vorm van een trapezium en dat is op te delen in een rechthoek en een driehoek. Voor de grootte van de krachten F_1 tot en met F_4 en bijbehorende armen a1 tot en met a4 ten opzichte van punt A valt af te leiden dat

$$\begin{array}{lll} F_{op,1} = p_2 \beta BL & ; & a_1 = (1-\beta)L/2 \\ F_{op,2} = \frac{1}{2}\left|p_1 - p_2\right| \beta BL & ; & a_2 = (3-2\beta)L/6 \\ F_{op,3} = p_4(1-\beta)BL & ; & a_3 = \beta L/2 \\ F_{op,4} = \frac{1}{2}\left|p_3 - p_4\right| \beta BL & ; & a_4 = (4\beta-1)L/6 \end{array} \tag{8.33}$$

waarin B de breedte van het grondvlak is, loodrecht op het vlak van tekening.

De andere manier (figuur 8.20b) is iets eenvoudiger en is gebaseerd op een opdeling van de het geconstrueerde drukverloop in drie delen. Voor de krachten bij deze drie delen geldt dat

$$\begin{aligned} F_{op,5} &= p_4 BL \\ F_{op,6} &= \frac{1}{2}\left(|p_1 - p_4| - |p_2 - p_3|\right) BL \\ F_{7,op} &= \beta |p_2 - p_3| BL \end{aligned} \tag{8.34}$$



Figuur 8.20: Twee voorbeelden van praktische manieren om uit het drukverloop onder de constructie de resultante opwaartse kracht te bepalen en het bijbehorende moment om het geometrisch zwaartepunt A van het grondvlak.

De bijbehorende armen zijn aangegeven in figuur 8.20b. Bedenk hierbij dat $|p_1 - p_4|$ gelijk is aan $\rho g \Delta h$. Dat is het verval over de constructie in termen van druk. Op dezelfde manier is $|p_2 - p_3|$ het verval over het onderloopsheidscherm in termen van druk: $|p_2 - p_3| = \rho g(\Delta h - 2d\Delta h/(L + 2d))$. Hiermee kunnen we (8.34) in

algemene zin herschrijven als

$$\begin{aligned} F_{op,5} &= \rho g \min\{h_1, h_2\} BL \\ F_{op,6} &= \frac{1}{2}\rho g \frac{\Delta h}{L+2d} BL^2 \\ F_{op,7} &= \beta \rho g \frac{\Delta h}{L+2d} 2dBL \end{aligned} \tag{8.35}$$

Het voordeel van de tweede methode is dat het gevolg van verplaatsen naar links of naar rechts van het onderloopsheidscherm direct duidelijk is. Zo'n verschuiving uit zich in een verandering van β. Dat heeft alleen invloed op $F_{op,7}$ en het bijbehorende moment, niet op $F_{op,5}$ en $F_{op,6}$. Bij de eerste methode veranderen alle krachten. Ook het gevolg van het vertikaal verlengen van het onderloopsheidscherm is bij de tweede methode snel in te zien. In dat geval neemt d toe, zodat $F_{op,6}$ afneemt en $F_{op,7}$ toe.

Beide methoden zijn overigens ook toepasbaar als meerdere onderloopsheidschermen onder de constructie zijn geplaatst.

8.5 Kantelen

8.5.1 Controle op kantelen

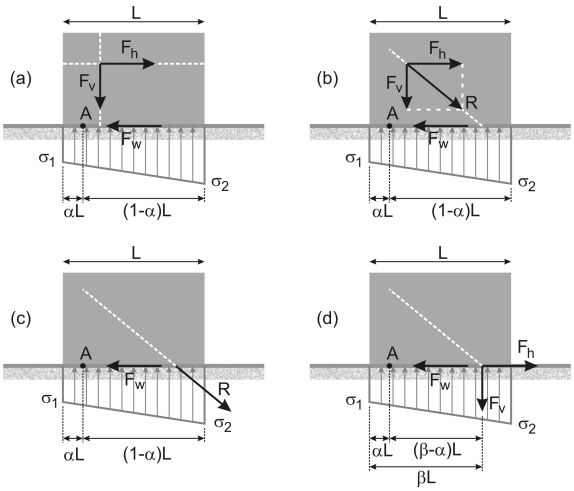
Kantelen treedt op zodra het voor evenwicht nodig is dat ergens in het grensvlak tussen constructie en ondergrond een trekspanning moet voorkomen. Die kan door een loskorrelig materiaal niet worden geleverd. In onze schematisatie die altijd leidt tot een lineair verlopende korrelspanning, betekent dit dat één van de uiterste spanningen σ_1 of σ_2 negatief wordt (bij druk in het korrelskelet is de spanning bij het grondvlak van de constructie opwaarts en die richting hebben we als positief gedefinieerd). De grens tussen wel of niet kantelen wordt zodoende gekarakteriseerd door $\sigma_1 = 0$ of $\sigma_2 = 0$. Uit deze twee uitersten leiden we een betrekkelijk eenvoudige manier af om te controleren of kantelen optreedt.

Veiligheid tegen kantelen is aan de orde zolang σ_1 en σ_2 groter zijn dan nul (overal drukspanning). Marginale veiligheid treedt op zodra een van beide spanningen gelijk is aan nul. Met (8.20) volgt voor die situatie dat

$$\begin{aligned} \sigma_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(\frac{2}{3} - \alpha\right) L \geq \frac{M_v(\alpha) + M_h}{F_v} \\ \sigma_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3} - \alpha\right) L \leq \frac{M_v(\alpha) + M_h}{F_v} \end{aligned} \tag{8.36}$$

Bedenk hierbij dat als de constructie niet opdrijft, F_v negatief is. Combinatie van beide condities (8.36) geeft

$$\left(\frac{1}{3} - \alpha\right) L \leq \frac{M_v(\alpha) + M_h}{F_v} \leq \left(\frac{2}{3} - \alpha\right) L \tag{8.37}$$



Figuur 8.21: Verplaatsing van de belastingen F_h en F_v langs de werklijn van hun resultante R naar het grondvlak van de constructie.

Kortom, als aan bovenstaande voorwaarde is voldaan, is er geen gevaar voor kantelen.

Om de charme van conditie (8.37) te doorzien, moeten we iets verder kijken dan onze spreekwoordelijke neus lang is. Alle drie de termen in deze conditie hebben de dimensie van lengte. Er lijkt een lengtemaat te zijn die aangeeft of ergens in het contactvlak tussen constructie en ondergrond trekspanning nodig is om evenwicht van verticale krachten en momenten te realiseren (evenwicht van horizontale krachten hebben we met (8.15) op voorhand aangenomen).

Die lengtemaat houdt verband met het totaal aan uitwendige belastingen, exclusief de normaal- en schuifspanningen vanuit het korrelskelet onder de constructie. Dat totaal is de combinatie van F_h en F_v. De resultante R van deze twee krachten kunnen we grafisch construeren door beide langs hun werklijn te verplaatsen naar het snijpunt van de werklijnen (zie figuur 8.21). Zo'n verplaatsing heeft geen invloed op de som van alle krachten en ook niet op het netto moment rond punt A of enig ander willekeurig punt.

Vervolgens verplaatsen we de resultante (figuur 8.21b) langs de bijbehorende werklijn naar het snijpunt van die werklijn met het contactvlak van constructie en ondergrond (figuur 8.21c). En daar ontbinden we die resultante in de oorspronkelijke samenstellende delen F_h en F_v (figuur 8.21d).

Het snijpunt van de werklijn van R en het grondvlak van de constructie ligt op een afstand βL van de linkerzijde van dat grondvlak. De grootte van β hangt af van de groottes en liggingen van F_h en F_v.

Met deze verplaatsing van krachten langs de werklijn van hun vectoriële som, valt de werklijn van F_h samen met die van de wrijving langs het grondvlak. In geval van horizontaal evenwicht, zijn beide krachten even groot. Na de verplaatsing heffen ze elkaar zodoende op en dragen ze niet langer bij aan het moment om A, ook als

A ergens anders dan in het grondvlak van de constructie is gekozen. Daar staat tegenover dat het moment van de verplaatste F_v is gewijzigd van $M_v(\alpha)$ (voor de verplaatsing) in $(\beta-\alpha)LF_v$ (na de verplaatsing). De som van de momenten om A is door verschuiving van krachten langs hun werklijnen niet veranderd, zodat

$$M_v(\alpha) + M_h = (\beta - \alpha)LF_v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M_v(\alpha) + M_h}{F_v} = (\beta - \alpha)L \tag{8.38}$$

Combinatie van (8.37) en (8.38) leidt tot

$$\frac{1}{3}L \leq \beta L \leq \frac{2}{3}L \tag{8.39}$$

Deze uitdrukking laat zich makkelijker interpreteren dan (8.37). In bovenstaande uitdrukking staat feitelijk dat indien het snijpunt van de werklijn van de resultante van de uitwendige belastingen (exclusief de normaal- en schuifspanningen vanuit het korrelskelet onder de constructie) en het grondvlak van de constructie binnen het middelste 1/3 deel van dat grondvlak valt, er geen gevaar is voor kantelen. Met andere woorden: als dit snijpunt minder dan $L/6$ verwijderd is van het midden van het grondvlak van de constructie, is kantelen niet aan de orde (althans bij een rechthoekig grondvlak). Dat middelste 1/3 deel van het grondvlak van de constructie noemen we de kern van het grondvlak.

Die kern strekt zich uit van $L/6$ links van het midden van het grondvlak tot $L/6$ rechts daarvan. Het is gebruikelijk om voorwaarde (8.37) uit te drukken in deze twee grenzen. Dat geeft

$$-\frac{1}{6}L \leq \frac{M_v(\alpha) + M_h}{F_v} - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) L \leq \frac{1}{6}L \tag{8.40}$$

De term in het midden van deze uitdrukking is de zogeheten excentriciteit, aangegeven met het symbool e:

$$e = \frac{M_v(\alpha) + M_h}{F_v} - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) L = \left(\beta - \frac{1}{2}\right) L \tag{8.41}$$

De excentriciteit geeft aan hoe ver links of rechts van het midden van het grondvlak van de constructie, de werklijn van de resultante van de belastingen (exclusief korrelspanning) dat grondvlak snijdt[80].

[80] Het spreekt voor zich dat de grootte van de excentriciteit e onafhankelijk is van het arbitrair gekozen punt ten opzicht waarvan momenten van belastingen zijn bepaald. De factor α in de uitdrukking voor e verwijst naar dat punt. Het maakt voor e dus niet uit of de momenten worden bepaald met $\alpha = \alpha_1$ of met $\alpha = \alpha_2$ (met $\alpha_1 \neq \alpha_2$). Kortom, $(M_v(\alpha_1)+M_h)/F_v-(1/2-\alpha_1)F_vL = (M_v(\alpha_2)+M_h)/F_v-(1/2-\alpha_2)F_vL$, waaruit valt af te leiden dat $M_v(\alpha_2) = M_v(\alpha_1)-(\alpha_2-\alpha_1)F_vL$. Deze relatie kan onder meer worden gebruikt om in (ontwerp-)berekeningen momenten die bepaald zijn ten opzichte van verschillende punten, onderling vergelijkbaar te maken.

Zolang $|e| \leq L/6$ is (net) geen sprake van kantelen en in dat geval geldt voor de extreme korrelspanningen dat $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$. Dit suggereert een direct verband tussen die extreme korrelspanningen en de excentriciteit mits kantelen niet aan de orde is. En dat verband is er ook (zie appendix D).

Eerder in dit hoofdstuk hebben we kantelen, ofwel de noodzaak dat voor evenwicht van momenten en verticale krachten ergens in het grensvlak tussen constructie en ondergrond trek optreedt, aangemerkt als een faalmechanisme. De gedachte daarachter is dat trek niet kan worden geleverd door het korrelskelet onder de constructie. Hoewel dat inderdaad juist is, leidt die noodzaak dat trek optreedt in het grensvlak terwijl die niet kan worden geleverd, er niet direct toe dat de constructie daadwerkelijk omvalt, zoals de term 'kantelen' suggereert. Ook bij kantelen in de zin dat niet voldaan is aan conditie (8.40) is evenwicht mogelijk. In de paragraaf 8.5.2 ¨Kantelen en bezwijken bij een op staal gefundeerde constructie¨ gaan we daar nader op in.

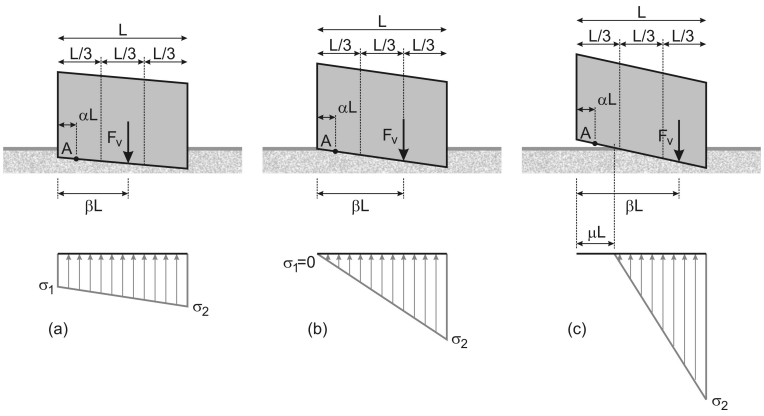
8.5.2 Kantelen en bezwijken bij een op staal gefundeerde constructie

Als het voor evenwicht van momenten en/of verticale krachten nodig is dat het korrelskelet ergens langs het grondvlak tussen constructie en ondergrond trek moet leveren, is sprake van kantelen. Zo hebben we dat gedefinieerd en we hebben het een faalmechanisme genoemd omdat niet-cohesief korrelmateriaal evident geen trek kan opnemen. De trekspanning die kan worden opgenomen als de ondergrond bestaat uit cohesief materiaal is voor het soort waterbouwkundige toepassingen waar wij naar kijken doorgaans verwaarloosbaar.

De benaming 'kantelen' suggereert dat de constructie dreigt om te vallen zodra dit faalmechanisme zich manifesteert. Dat is echter onjuist. Bij de controle op kantelen veronderstellen we impliciet dat het volledige grondvlak van de constructie contact heeft met het korrelskelet. Controle op kantelen moet uitwijzen of die veronderstelling consistent is met evenwicht van verticale krachten en momenten. Dat is niet het geval zodra ergens langs het grondvlak trek nodig is voor evenwicht. Daarmee is niet gezegd dat de constructie omvalt. Ook als slechts over een beperkt deel van dat grensvlak een drukspanning optreedt, is evenwicht in beginsel mogelijk. We gaan dit na aan de hand van een gedachte–experiment waarbij we wederom veronderstellen dat de constructie een oneindig stijf grondvlak heeft en dat het korrelskelet eronder lineair elastisch gedrag vertoont. Voorts beperken we ons tot een situatie waarbij het voor evenwicht van momenten nodig is dat de korrelspanning een positief (linksom) moment genereert.

Op voorhand veronderstellen we dat op het grensvlak van constructie en ondergrond voldoende wrijving kan worden gemobiliseerd om horizontaal evenwicht te garanderen. Afschuiven is dus niet aan de orde.

In ons gedachte–experiment gaan we uit van de situatie die is geschetst in figuur 8.21d. Alle belastingen op de constructie, inclusief het eigen gewicht maar exclusief de korrelspanning, zijn herleid tot een resultante horizontale en een resultante



Figuur 8.22: Verloop van de korrelspanning σ onder de constructie als geen sprake is van kantelen (a), op de grens van kantelen (b) en als kantelen optreedt (c). In de drie bovenste schetsen zijn translatie en rotatie van de constructie (overdreven) aangeven, aangenomen dat het korrelskelet onder de constructie lineair elastisch gedrag vertoont.

verticale kracht. Die twee krachten zijn langs hun gezamenlijke werklijn verplaatst naar het snijpunt van die werklijn en het grondvlak van de constructie. Er is geen sprake van kantelen als dit snijpunt binnen de kern van het grondvlak ligt. Bij een rechthoekig grondvlak is die kern het middelste 1/3 deel daarvan. In het korrelskelet direct onder de constructie treedt overal druk op. Dit is geschetst in figuur 8.22a.

Bij een oneindig stijf grondvlak van de constructie en lineair elastisch gedrag van het korrelskelet verloopt deze druk lineair. De bijbehorende vervorming van het korrelskelet verloopt in dat geval ook lineair. De constructie volgt deze deformatie en laat een neerwaartse translatie zien en een rotatie. In figuur 8.22 is dat geschetst en zijn de verticale verplaatsingen voor de duidelijkheid overdreven weergegeven. Daardoor lijkt het alsof de constructie in z'n geheel vervormt, maar dat is in werkelijkheid niet het geval.

Vervolgens wijzigen we de belasting op de constructie zodanig dat de resultante verticale kracht F_v naar rechts (in de figuur) verplaatst tot aan de rand van de kern van het grondvlak. De grootte van F_v houden we gelijk. Als gevolg van de verplaatsing neemt de korrelspanning σ_2 toe en σ_1 neemt af tot nul (figuur 8.22b). Dit komt overeen met de grens van kantelen. De rotatie van de constructie neemt hierbij toe, maar de translatie niet (omdat F_v even groot blijft). De hoek van de constructie linksonder heeft in deze situatie nog net contact met het korrelskelet.

Verdere verplaatsing van F_v naar rechts leidt tot een nog grotere rotatie van de constructie (figuur 8.22c). Ten opzichte van de grens van kantelen (figuur 8.22b) neemt de translatie ook toe. Het netto effect is dat het grondvlak over een lengte μL los komt van de ondergrond. De grootte van μ leiden we af uit evenwicht van

verticale krachten en bijbehorende momenten:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(1-\mu)LB\sigma_2 + F_v = 0 \\ &\frac{1}{2}(1-\mu)LB\sigma_2 \left(\frac{2}{3}(1-\mu)+\mu-\alpha\right) L + F_v(\beta-\alpha)L = 0 \end{aligned} \tag{8.42}$$

waarin momenten zijn bepaald ten opzichte van punt A (zie figuur 8.22). Hieruit volgt dat

$$\mu = 3\beta - 2 \tag{8.43}$$

Op de grens van kantelen ligt F_v aan de rand van de kern van het grondvlak van de constructie. Daar is $\beta = 2/3$ en daarbij past $\mu = 0$. Bij toenemende β neemt ook μ toe. Voor $\beta < 2/3$ is geen sprake van kantelen en is er geen traject langs het grondvlak van de constructie waar de korrelspanning gelijk is aan nul. In dat geval gaat (8.42) niet op en heeft (8.43) geen betekenis.

De bijbehorende maximale korrelspanning σ_2 wordt gegeven door

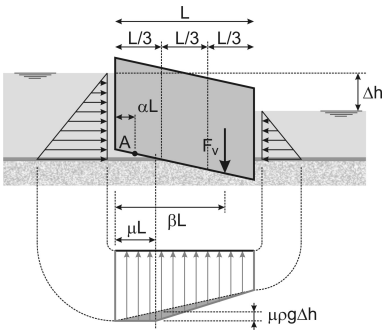
$$\sigma_2 = \frac{F_v}{BL}\frac{2}{(1-\mu)} = \frac{F_v}{BL}\frac{2}{3(1-\beta)} \tag{8.44}$$

In deze afleiding van μ en σ_2 hebben we geen rekening gehouden met een verandering in de opwaartse waterdruk. Deze wordt veroorzaakt door het verlies aan contact tussen het grondvlak van de constructie en de ondergrond. Langs het losgekomen deel is de waterdruk overal gelijk aan die bij het linker uiteinde (althans in het geval van figuur 8.22). De kwelweg is gereduceerd tot het deel van het grondvlak dat nog wel contact heeft met de ondergrond. De lengte daarvan is $(1-\mu)L$. De totale opwaartse kracht neemt hierdoor toe.

In figuur 8.23 is dit effect op de opwaartse waterdruk geschetst voor een constructie zonder een onderloopsheidscherm. Bij volledig contact tussen grondvlak en ondergrond verloopt de waterdruk onder de constructie lineair. Als sprake is van kantelen is de waterdruk constant langs dat deel van het grondvlak waar geen contact is met de ondergrond. In het andere deel van het grondvlak verloopt de waterdruk lineair in overeenstemming met de waterstanden aan weerszijden van de constructie. Het verschil in waterdruk bij wel of niet kantelen is in de figuur aangegeven met het grijze vlak in het spanningsdiagram.

Dit verschil heeft een driehoekig verloop. Het is nul aan de uiteinden van de constructie en maximaal op de plaats waar het grondvlak net spanningsvrij contact heeft met de ondergrond (op een afstand μL vanaf de linkerzijde in figuur 8.23). Dit maximum heeft een grootte $\mu\rho g\Delta h$. De grootte van de resultante van deze toename van de opwaartse waterdruk is $\mu\rho g\Delta h BL/2$.

In de situatie die in figuur 8.23 is geschetst, is de korrelspanning nul langs een deel van het grondvlak van de constructie aan de kant waar de waterstand het hoogst is. Daarom is de opwaartse waterdruk groter dan wat die zou zijn als langs het



Figuur 8.23: Verloop van de opwaartse waterdruk langs het grondvlak van een constructie als sprake is van kantelen. Het verschil met de druk die wordt gevonden als kantelen niet optreedt, is met het grijze vlak in het spanningsdiagram aangegeven.

gehele grondvlak een drukspanning aanwezig zou zijn. Echter, als dat deel van het grondvlak van de constructie waar de korrelspanning nul is zich aan laagwaterzijde zou bevinden, zou de opwaartse druk juist afnemen en is de resultante van de verandering van de opwaartse waterdruk gelijk aan $-\mu\rho g\Delta h$.

Het effect van de verandering van de opwaartse waterdruk kunnen we in rekening brengen met een correctie op uitdrukkingen (8.42) voor het evenwicht van verticale krachten en momenten. Met inbegrip van die correctie volgt voor deze evenwichtsrelaties

$$\frac{1}{2}(1-\mu)LB\sigma_2 + F_v + \frac{1}{2}\mu\rho g\Delta hBL = 0 \tag{8.45}$$

en

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1-\mu)LB\sigma_2\left(\frac{2}{3}(1-\mu)+\mu-\alpha\right)L \\ + F_v(\beta-\alpha)L + \frac{1}{2}\mu\rho g\Delta hBL\left(\frac{\mu+1}{3}-\alpha\right)L = 0\end{aligned} \tag{8.46}$$

Bedenk dat F_v hierin de resultante is van alle verticale belasting, exclusief de korrelspanning, maar inclusief het eigen gewicht en de opwaartse waterdruk zoals die zich zou voordoen als er langs het volledige grondvlak van de constructie contact met de ondergrond zou zijn. F_v is dus niet anders dan in (8.42).

Uit de evenwichtsrelaties (8.45) en (8.46) volgt dat

$$\mu = (3\beta-2)\frac{F_v}{F_v+\rho g\Delta hBL/2} \tag{8.47}$$

Het effect van de veranderde opwaartse waterdruk wordt verbeeld door het quotiënt in het rechter lid van bovenstaande uitdrukking. Als er geen verval over de constructie is, heeft het loskomen van het grondvlak van de ondergrond geen invloed op de opwaartse waterdruk. Deze is immers overal gelijk. In dat geval is $\Delta h = 0$ en reduceert (8.47) tot (8.43).

Voor de volledigheid merken we op dat uit (8.45) en (8.46) tevens volgt dat

$$\sigma_2 = -\frac{1}{1-\mu}\left(2\frac{F_v}{BL} + \rho g \mu \Delta h\right) \tag{8.48}$$

Uit bovenstaande redenering kunnen we concluderen dat als sprake is van kantelen en langs het grondvlak van de constructie aan hoogwaterzijde de korrelspanning wegvalt, de stabiliteit van die constructie afneemt. In dat geval neemt de resultante van de opwaartse waterdruk immers toe. Daardoor neemt de veiligheid tegen afschuiven af. Dat geldt ook voor de veiligheid tegen opdrijven. Anderzijds, als de korrelspanning aan laagwaterzijde wegvalt, neemt de stabiliteit juist toe omdat de resultante van de opwaartse waterdruk in dat geval afneemt. In beide situaties neemt de korrelspanning toe en dat kan destabiliserend werken.

Daarnaast hebben we gevonden dat bij toenemende omvang van de excentriciteit, de maximale korrelspanning langs het grondvlak van de constructie ook toeneemt en zodra sprake is van kantelen, de oplegreactie vanuit de ondergrond zich op een steeds kleiner deel van dat grondvlak concentreert. Dat gaat gepaard met een toenemend gevaar voor afschuiven in de ondergrond. In deze paragraaf hebben we daar niet naar gekeken. In de praktijk moet daar echter altijd op worden gecontroleerd.

8.6 Bijzondere omstandigheden

8.6.1 Gelaagde ondergrond

De samenstelling van de ondergrond speelt onder meer een belangrijke rol bij het ontwerp van de fundering van de waterkerende constructie en van maatregelen om onderloopsheid binnen acceptabele grenzen te houden, bijvoorbeeld om *piping* te voorkomen. Met betrekking tot preventie van onderloopsheid kan de aanwezigheid van een horizontaal uitgestrekte ondoorlatende laag voordelig zijn. Afhankelijk van de diepte onder de constructie waarop zo'n laag wordt aangetroffen, kan worden overwogen om het onderloopsheidscherm daarop aan te sluiten. Een waterdichte aansluiting leidt tot een vergaande belemmering van de stroming onder de constructie door.

Helemaal vanzelfsprekend is die belemmering echter niet. Zonder volledigheid te pretenderen, plaatsen we enkele kanttekeningen. Bij een kleilaag van voldoende dikte kan het scherm zo diep in die laag worden doorgezet dat een bijkans waterdichte aansluiting ontstaat. Dat lukt echter niet als de ondoorlatende laag uit rots bestaat. Injecteren met bijvoorbeeld grout kan in zo'n geval een oplossing zijn. Overigens is de waterdichtheid van de aansluiting op een ondoorlatende laag altijd betrekkelijk omdat het onderloopsheidscherm in horizontale richting eindig is. Achterloopsheid wordt met zo'n aansluiting niet voorkomen.

Een ander punt van aandacht is mogelijke perforatie van de ondoorlatende laag. Dat kan voorkomen bij onzorgvuldig aanbrengen van het onderloopsheidscherm,

al of niet in combinatie met horizontale variaties in de dikte van de ondoorlatende laag. Indien die laag een dieper gelegen watervoerend pakket afsluit waarin de stijghoogte groter is dan die boven de ondoorlatende laag (men spreekt dan van overspannen water), kan perforatie leiden tot ongewenste grondwaterstromen en ertoe leiden dat de beoogde waterdichte aansluiting niet wordt gerealiseerd.

8.6.2 Constructies deels in de grond

Tot zover hebben we in dit hoofdstuk steeds gekeken naar een constructie die op de ondergrond is geplaatst. Doorgaans bevindt een deel van de constructie zich echter in de grond. Dat heeft invloed op de hydraulische belasting op de constructie en op de interactie met de ondergrond. De principes met betrekking tot evenwicht en faalmechanismen zoals we die hebben besproken, blijven echter onverkort geldig.

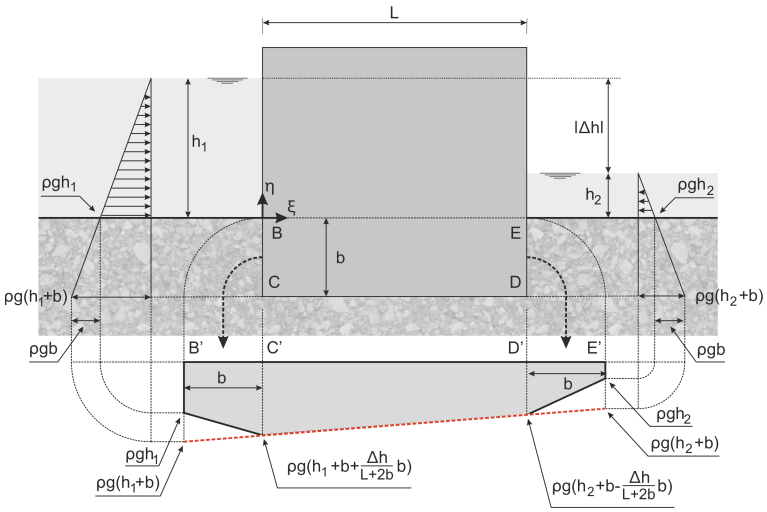
Ten opzichte van een op de grond geplaatste constructie zijn er twee belangrijke verschillen. Eén daarvan betreft het verloop van de uitwendige hydraulische belasting en de andere is dat bij een deels in de grond geplaatste constructie ook horizontale gronddrukken een rol spelen. Op deze twee verschillen gaan we in deze paragraaf globaal in. Omdat de essentie van de verschillen niet afhangt van de vraag of de constructie op staal of op palen is gefundeerd en ook niet van de aanwezigheid van een onderloopsheidscherm, volstaan we met een beschrijving van deze verschillen voor een betrekkelijk eenvoudige, op staal gefundeerde constructie zonder onderloopsheidscherm.

Waterdruk

Voor een schatting van het verloop van de waterdruk rond een deels in de grond geplaatste constructie hanteren we dezelfde principes als bij een constructie op de grond. Daarvoor hebben we in paragraaf 8.4.4 over "Opwaartse belasting- aangenomen dat de stijghoogte lineair varieert langs de kwelweg. Voor een constructie op de grond, waarbij de kwelweg volledig horizontaal is, komt dit neer op een constante drukgradiënt langs de kwelweg. Bij een deels in de grond geplaatste constructie kent de kwelweg echter ook verticale of hellende delen. Langs die delen hebben we niet alleen te maken met de drukgradiënt die wordt bepaald door het verval over de constructie, maar ook met drukvariaties als gevolg van veranderingen in plaatshoogte.

Een schematische weergave van een deels in de grond geplaatste constructie is te vinden in figuur 8.24. Bij deze constructie bestaat de kwelweg uit drie delen. Gezien vanaf de hoogwaterzijde naar de laagwaterzijde is er eerst een verticaal deel (BC in figuur 8.24), vervolgens een horizontaal deel (CD) en dan weer een verticaal deel (DE). De totale lengte van deze kwelweg bedraagt $L + 2b$. Bij de beschrijving van het drukverloop langs de kwelweg maken we gebruik van een $\xi\eta$-assenstelsel met de oorsprong in punt B. De positieve ξ-as is in figuur 8.24 naar rechts gericht en de positieve η-as naar boven.

In punt B is de druk gelijk aan $\rho g h_1$ en in de richting van punt C neemt die druk



Figuur 8.24: Constructie van het verloop van de waterdruk langs de kwelweg BCDE van een deels in de grond geplaatste, op staal gefundeerde waterkerende constructie.

toe vanwege de groter wordende afstand tot de waterspiegel. Als we alleen hiernaar kijken, verloopt de druk van B naar C volgens

$$p_{BC,\eta} = \rho g(h_1 - \eta) \tag{8.49}$$

Tegelijkertijd maakt het ondergrondse deel van de linker zijwand, BC, deel uit van de kwelweg. Daarlangs heeft het verval over de constructie invloed op het drukverloop. Het aandeel hiervan in het totale drukverloop wordt gegeven door

$$p_{BC,\Delta h} = -\rho g \frac{\Delta h}{L + 2b}\eta \tag{8.50}$$

(bedenk dat het teken van het verval $\Delta h = h_2 - h_1$ laat zien of $h_1 < h_2$ of omgekeerd en dat η langs BC negatief is).

Het totale drukverloop langs BC is de som van deze twee bijdragen:

$$p_{BC}(\eta) = h_1 - \left(1 + \frac{\Delta h}{L + 2b}\right)\eta \tag{8.51}$$

Langs de onderkant van de constructie (van C naar D) is $\eta = -b$ en neemt ξ toe van nul naar L. Het verloop van de druk langs dit deel wordt gegeven door

$$p_{CD}(\xi) = h_1 + b + \frac{\Delta h}{L + 2b}(b + \xi) \tag{8.52}$$

Het drukverloop langs het ondergrondse deel van de rechter zijwand, DE, bestaat ook uit twee bijdragen, net als bij de linker zijwand. De som van deze twee is

$$p_{DE}(\eta) = h_2 - \left(1 - \frac{\Delta h}{L + 2b}\right)\eta \tag{8.53}$$

Net als bij een constructie met een onderloopsheidscherm (zie paragraaf 8.4.4) is ook voor een constructie die zich deels in de grond bevindt, het drukverloop langs de kwelweg grafisch te construeren. In figuur 8.24 is het drukverloop langs de kwelweg BCDE naar beneden uitgezet langs de lijn B'C'D'E' (waarbij B' verwijst naar punt B, et cetera). Het getekende drukverloop langs C'D' wordt gegeven door (8.52). Als we dat extrapoleren naar B' (waar $\xi = -b$)en E' (waar $\xi = L+b$), dan vinden we achtereenvolgens dat

$$\begin{aligned} p_{CD}(-b) &= h_1 + b \\ p_{CD}(L+b) &= h_2 + b \end{aligned} \tag{8.54}$$

en dat zijn precies de aandelen in de drukken in B en E die worden bepaald door de verticale afstand tot de waterspiegel. De rode streeplijn in het drukverloop in figuur 8.24 verbindt deze twee aandelen. Langs het traject B'C' (en dus ook langs BC) wijkt het werkelijke drukverloop van de rode streeplijn af. Bij B' is de druk gelijk aan $\rho g h_1$ en tussen B' en C' verloopt de druk lineair. Op dezelfde manier verloopt de druk langs D'E' (of DE) van wat die volgens de rode streeplijn bij D' is tot $\rho g h_2$ bij E'.

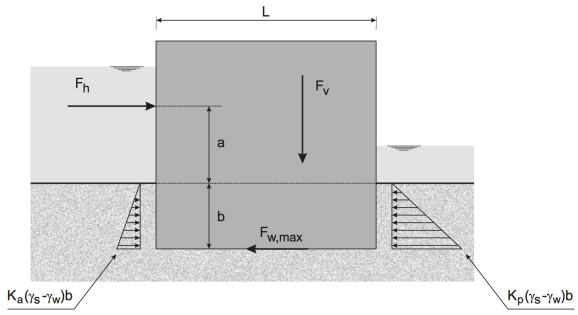
Gronddruk

Anders dan bij een constructie op de ondergrond, spelen bij een deels in de grond geplaatste constructie ook horizontale gronddrukken een rol bij de boordeling op uitwendige stabiliteit. Dit is het tweede verschil tussen op of deels in de grond geplaatste constructies waar we in deze paragraaf naar kijken. Om te controleren of sprake is van horizontaal evenwicht, onderzoeken we bij een op de grond geplaatste, op staal gefundeerde constructie of langs het grensvlak van constructie en ondergrond voldoende wrijving kan worden gemobiliseerd om afschuiven te voorkomen. Dat is het geval indien de resultante horizontale belasting niet groter is dan de maximaal mogelijke wrijvingskracht. Bij een deels in de grond geplaatste constructie moeten ook actieve en passieve horizontale gronddrukken in het onderzoek naar evenwicht worden betrokken. Om het principe daarvan aan te geven, kijken we naar een eenvoudige, op staal gefundeerde constructie.

De resultante horizontale belasting op deze constructie is in figuur 8.25 aangegeven met F_h. Hierin zijn horizontale gronddrukken en wrijving langs het grondvlak van de constructie niet begrepen. Als gevolg van F_h heeft de constructie de neiging om in de richting van die kracht te verplaatsen. Aan de linkerzijde van de constructie in figuur 8.25 wordt daardoor actieve gronddruk gemobiliseerd en passieve gronddruk aan de rechterzijde. De richting van het netto effect van deze gronddrukken is tegengesteld aan die van F_h en draagt dus bij aan de veiligheid tegen afschuiven, net als de wrijving langs het grondvlak.

Als de actieve en passieve gronddrukken maximaal tot ontwikkeling komen, is hun netto effect $Fg, \max$ gelijk aan

$$F_{g,\max} = (K_a - K_p)(\gamma_s - \gamma_w)\frac{1}{2}b^2 B \tag{8.55}$$



Figuur 8.25: Verloop van actieve (links) en passieve (rechts) gronddrukken bij een deels in de grond geplaatste, op staal gefundeerde waterkerende constructie.

waarin K_a en K_p de coëfficiënten voor achtereenvolgens actieve en passieve gronddruk zijn, γ_s en γ_w staan voor het volumiek gewicht van verzadigde grond en water, en B is de breedte van de constructie loodrecht op het vlak van tekening.

Voor de wrijving $F_{w,\max}$ die maximaal gemobiliseerd kan worden langs het grondvlak geldt

$$F_{w,\max} = \min\{f, \tan\phi\}\, F_v \tag{8.56}$$

waarin F_v de resultante neerwaartse belasting op de constructie is, exclusief de resultante korrelspanning langs het grondvlak, f is de wrijvingscoëfficiënt voor het grensvlak tussen grondvlak en ondergrond (doorgaans beton en zand) en ϕ is de hoek van inwendige wrijving van het korrelmateriaal in de ondergrond (zie uitdrukking (8.7)).

Merk op dat de tekens van $F_{g,\max}$ in (8.55) en $F_{w,\max}$ in (8.56) in overeenstemming zijn met de conventie om 'naar rechts' en 'naar boven' positief te rekenen. Bij een positieve F_h zijn zowel $F_{g,\max}$ als $F_{w,\max}$ negatief. Immers, $K_a - K_p < 0$ en als de constructie niet opdrijft, is ook $F_v < 0$.

Met bovenstaande uitdrukkingen voor F_h, $F_{g,\max}$ en $F_{w,\max}$ zijn alle horizontale belastingen op de constructie in kaart gebracht. Er is geen gevaar voor afschuiven indien

$$|F_h| < |F_{w,\max} + F_{g,\max}| \tag{8.57}$$

De bijbehorende veiligheid γ tegen afschuiven (niet te verwarren met de γ_s en γ_w voor de volumieke gewichten van achtereenvolgens sediment en water) wordt gegeven door

$$\gamma = \frac{|F_{w,\max} + F_{g,\max}|}{|F_h|} = \frac{\left|\min\{f, \tan\phi\}\, F_v + (K_a - K_p)(\gamma_s - \gamma_w)\frac{1}{2}b^2 B\right|}{|F_h|} \tag{8.58}$$

Als $\gamma > 1$ is er geen gevaar voor afschuiven. In de praktijk wordt γ normaal gesproken getoetst aan een waarde groter dan 1, bijvoorbeeld 1,5. Daarmee wordt een veiligheidsfactor in rekening gebracht.

Of de maximaal mogelijke wrijving langs het grondvlak van de constructie en actieve en passieve gronddrukken daadwerkelijk optreden, hangt af van de resultante

horizontale belasting F_h. Zolang de constructie geen horizontale verplaatsing ondergaat, zijn de horizontale gronddrukken neutraal. Het bijbehorende netto effect is gelijk aan nul. Dat doet zich voor als de grootte van F_h kleiner is dan die van de maximaal mogelijke wrijving $F_{w,\max}$. De werkelijke wrijving F_w langs het grondvlak is in dat geval even groot als, maar tegengesteld aan F_h:

$$|F_h| < |F_{w,\max}| \quad \rightarrow \quad F_w = -F_h \tag{8.59}$$

Zodra de resultante horizontale belasting F_h de maximaal mogelijke wrijvingskracht $F_{w,\max}$ overschrijdt, dus als $|F_h| > |F_{w,\max}|$, kunnen door horizontale verplaatsing van de constructie actieve en passieve gronddrukken tot ontwikkeling komen. Voor een constructie die volgens (8.58) veilig is tegen afschuiven, dus $\gamma > 1$, geldt voor het netto effect F_g van de werkelijk optredende gronddrukken dat

$$F_g + F_{w\max} = -F_h \tag{8.60}$$

Zodra deze $F_g > F_{g,\max}$, is volgens (8.58) $\gamma < 1$ en schuift de constructie af.

Inzicht in de mate waarin de wrijving langs het grondvlak van de constructie en de actieve en passieve gronddrukken tot ontwikkeling komen, is van belang voor de beoordeling van de uitwendige stabiliteit van de constructie. Daarbij gaat het niet alleen om de vraag of horizontaal evenwicht bereikt kan worden. De combinatie van de resultante horizontale belasting F_h, de werkelijk optredende wrijvingskracht F_w en de resultante F_g van de werkelijk optredende gronddrukken draagt met een koppel

$$-\left(a + \frac{2}{3}b\right) F_h - \frac{1}{3}bF_w \tag{8.61}$$

bij aan het totale moment op de constructie en is daarmee van invloed op de korrelspanning langs het grondvlak. Dat laatste volgt uit evenwicht van momenten (zie paragraaf 8.3.1 "Berekening van de korrelspanning"). In bovenstaande uitdrukking is a de afstand tussen de werklijn van F_h en de bodem van de waterloop (zie figuur 8.25) en het koppel is negatief omdat een positieve F_h een koppel rechtsom oplevert.

In veel praktisch relevante situaties is het niet wenselijk dat de volledige constructie een zodanige horizontale verplaatsing ondergaat dat actieve en passieve gronddrukken tot ontwikkeling kunnen komen. In zulke gevallen wordt de veiligheid tegen afschuiven gebaseerd op uitsluitend de maximale wrijving die langs het grondvlak van de constructie kan worden gemobiliseerd. De mate van veiligheid wordt daarbij uitgedrukt met

$$\gamma = \frac{|F_{w,\max}|}{|F_h|} = \frac{\min\{f, \tan\phi\}\,|F_v|}{|F_h|} \tag{8.62}$$

in plaats van (8.58). Ook de op deze manier bepaalde veiligheid γ wordt getoetst aan een waarde ten minste gelijk aan 1. Als $\gamma > 1$ verplaatst de constructie niet horizontaal en treden aan weerszijden van de constructie neutrale in plaats van actieve of passieve gronddrukken op.

8.6.3 Oever- en bodembescherming rond de constructie

Om onderloopsheid tegen te gaan, wordt doorgaans een onderloopsheidscherm onder de constructie geplaatst. Hiermee wordt *piping* (zie paragraaf 8.2.6) voorkomen. Dat is het verschijnsel waarbij als gevolg van het verval over de constructie een zodanig intensieve stroming onderlangs het grensvlak optreedt dat het water dat aan laagwaterzijde uittreedt en daarbij korrelmateriaal uit de ondergrond wordt uitspoelt. Hierdoor ontstaat onder de constructie een zogeheten *pipe* (stroombuis) waardoor de kwelweg verkort. Dat leidt tot toename van het verhang langs de kwelweg en dus tot een nog intensievere stroming. Dit is een progressief proces. Zodra het uitspoelen van korrelmateriaal is ingezet, wordt het alleen maar erger. Het leidt uiteindelijk tot ondermijning van de constructie.

Het plaatsen van een onderloopsheidscherm heeft tot doel de kwelweg te verlengen. Het verhang langs de kwelweg neemt daardoor af. Het verval over de constructie blijft immers gelijk. Op die manier kan de stroming onder de constructie door zodanig worden beperkt dat *piping* wordt voorkomen.

Nauw verwant aan onderloopsheid is achterloopsheid. Daarbij gaat het om stroming die zich aan weerszijden langs de constructie voordoet en die net zo goed als onderloopsheid kan leiden tot uitspoeling van korrelmateriaal. Om dat tegen te gaan, kan een achterloopsheidscherm worden geplaatst (zie paragraaf 8.2.6). In het algemeen geldt dat achter- en onderloopsheidschermen in combinatie moeten worden toegepast. Er is immers geen enkele reden waarom de stroming uitsluitend onder de constructie door zou gaan en niet eromheen, of omgekeerd.

Dergelijke schermen vormen echter niet het enige middel waarmee uitspoelen van korrelmateriaal aan laagwaterzijde kan worden voorkomen. Een alternatief is het aanbrengen van bodem- en oeverbescherming. In veel gevallen is zulke bescherming bedoeld om erosie te voorkomen ten gevolge van stroming die boven de bodem of langs de oever optreedt, maar het kan ook uitspoeling tegengaan als gevolg van water dat vanuit de bodem uittreedt.

In beide toepassingen dient de bovenste laag van de bodembescherming stabiel te zijn onder de aanwezige stroming. Er zijn diverse manieren om dat te realiseren. Eén daarvan is het aanbrengen van een laag loskorrelig materiaal waarvan de korrelgrootte op zich voldoende is om stabiliteit te waarborgen. Afhankelijk van de verhouding van de karakteristieke diameters van deze korrels en die van het aanwezige bodemmateriaal, kan het nodig zijn om een filter aan te brengen (zie paragraaf 7.5) of om een geotextiel toe te passen. In beide gevallen blijft de bodem doorlatend. Het voorkomt uitspoeling van korrelmateriaal en daarmee de vorming van een *pipe*.

Een andere mogelijkheid is het injecteren van de bovenste laag van bodem en oever zodat de daar aanwezige korrels aan stabiliteit winnen doordat ze aan elkaar hechten. Afhankelijk van het materiaal waarmee wordt geïnjecteerd, kan de toplaag ondoorlatend worden. Daardoor kan een drukverschil over die laag ontstaan. Het gewicht (onder water) van die laag moet voldoende zijn om opbarsten te voorko-

men. Dat is (mede) bepalend voor de diepte waarover moet worden geïnjecteerd. En net als bij achter- en onderloopsheidschermen geldt dat over- en bodembescherming één geheel moeten vormen. Bovendien kan zo'n injectie invloed hebben op de lengte van de kwelweg en daarmee op de opwaartse druk tegen het grondvlak van de constructie.

Op de vraag tot op welke afstand van de constructie een achterloopsheidscherm of een oever- en bodembescherming moet worden doorgezet, gaan we in deze paragraaf niet kwantitatief in. Voor een adequaat ontwerp van dergelijke maatregelen is doorgaans een berekening van stromingen in de ondergrond rond de constructie gewenst. Afhankelijk van de complexiteit van de onderhavige situatie kan daarbij worden volstaan met handberekeningen of is inzet van geavanceerde numerieke modellen op z'n plaats.

9

Veiligheid tegen overstromen

9.1 Inleiding

Veiligheid tegen overstromen is in de waterbouwkunde een veel voorkomend thema. Veel waterkerende constructies zijn (ook) bedoeld om overstroming van een gebied te voorkomen. Stormvloedkeringen, dijken langs kust en rivieren zijn tamelijk stereotype voorbeelden daarvan, maar ook bij het ontwerp van schutsluizen en stuwen kan bescherming tegen overstromen een functionele eis zijn. Denk bijvoorbeeld aan de zeesluizen bij IJmuiden. Die sluizen zijn niet alleen bedoeld om schepen het verval tussen de waterstanden op de Noordzee en het Noordzeekanaal te laten overwinnen. Ze maken ook deel uit van de primaire waterkering langs de Hollandse kust en moeten daarom in staat zijn om extreme waterstanden op zee te keren[81].

Bij het ontwerp van zo'n kering komt onvermijdelijk de vraag naar voren tegen welke waterstand deze bestand moet zijn. In een grijs verleden gold daarvoor de vuistregel dat het ontwerp gebaseerd moest zijn op één meter boven de hoogst bekende waterstand ter plaatse. Hoewel die vuistregel enige mate van veiligheid suggereert, gaat deze voorbij aan de betrekkelijke betekenis van de *hoogst bekende waterstand*. Het is heel verleidelijk om te denken dat als je maar lang genoeg meet, de hoogste waarneming steeds dichter bij een fysisch maximum komt. Als er

[81] In het algemeen speelt bij de primaire waterkering langs de kust niet alleen de waterstand een rol. Ook golfcondities zijn van belang. Dat hebben we bijvoorbeeld gezien bij het ontwerp van het buitentalud van dijken (paragraaf 7.2), maar het geldt ook voor een natuurlijke zeewering als een duinenrij. Langs de kust zijn waterstanden en golven doorgaans deel onderling gecorreleerd vanwege de rol van de wind. Bij de zeesluizen van IJmuiden is dat ook zo, maar golven zijn daar primair een belasting op de constructie en is vooral de waterstand bepalend voor de kerende hoogte. Die sluizen liggen immers in de luwte van de golfbrekers bij de ingang van het Noordzeekanaal. Bovendien is, anders dan bij een dijk, een beetje golfoverslag vaak niet problematisch. Het overslaande water komt terecht in het Noordzeekanaal en dat kan geen kwaad zolang het daar niet tot een onacceptabele verhoging van de waterstand leidt. Het zelfde geldt voor de Hartelkering in de Brielse Maas. En in gesloten toestand is de Maeslantkering lek omdat de beide deuren elkaar net niet raken, maar ook dat geeft om dezelfde reden niet.

daadwerkelijk een fysisch maximum bestaat, is die veronderstelling waarschijnlijk correct. Maar ook dan is de aanname dat zo'n fysisch maximum niet meer dan één meter hoger ligt dan de hoogst bekende waarneming, volstrekt arbitrair.

Dit voorbeeld illustreert de onzekerheid die zich altijd voordoet bij de vaststelling van ontwerpcondities en waar de ontwerper van een constructie op een of andere manier mee om moet gaan. De kans dat de belasting waarop een constructie is ontworpen, wordt overschreden, is altijd groter dan nul. Op grond van principieel identieke overwegingen kan nooit met zekerheid worden gesteld dat een constructie ten minste de sterkte heeft waarvoor die is ontworpen.

In het algemeen geldt voor constructies dat zowel belasting als sterkte niet met zekerheid kunnen worden geduid. Er is dus altijd een kans dat zich een situatie voordoet waarin de sterkte ontoereikend is om de belasting te weerstaan, met als gevolg dat de constructie niet aan (alle) functionele eisen voldoet.

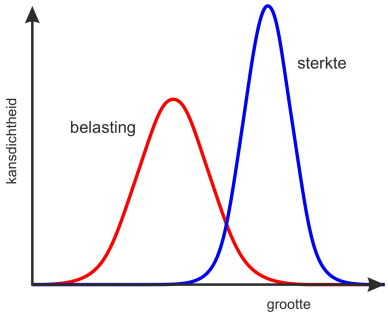
Dit inzicht nodigt uit tot een probabilistische benadering van het ontwerp. Daarin zijn onzekerheden in zowel belasting als sterkte leidend voor het ontwerp. Dat wordt gebaseerd op een bovengrens aan de kans dat de belasting groter is dan de sterkte. Hoe groot die bovengrens is, hangt af van wat (maatschappelijk) aanvaardbaar wordt geacht.

Tegen deze achtergrond gaan we in dit hoofdstuk eerst in op enkele principes van probabilistisch ontwerpen. Vervolgens passen we die toe op het ontwerpen van een constructie die veiligheid tegen overstromen moet bieden. De aanvaardbaarheid van de kans op falen wordt daarbij gemotiveerd vanuit een economische optimalisatie. Dat is conform de praktijk.

9.2 Iets over probabilistisch ontwerpen

Het uitgangspunt in probabilistisch ontwerpen is dat zowel de sterkte van een constructie als de belasting waar die aan wordt blootgesteld, een stochastisch karakter hebben. Dit is geïllustreerd in figuur 9.1 waarin kansdichtheden zijn geschetst van belasting en sterkte. Hoewel de verwachtingswaarde van de sterkte groter is dan die van de belasting, kan niet worden gegarandeerd dat in alle mogelijke gevallen die zich tijdens de operationele levensduur van de constructie voordoen, de sterkte groter is dan de belasting.

Voor de berekening van de kans dat een constructie niet is opgewassen tegen de belasting waar die op enig moment aan bloot staat, kijken we naar een eenvoudige situatie met slechts één belasting en één sterkte. Dat is bijvoorbeeld de eerder genoemde waterkering met de hoogte van de kering als sterkte en de waterstand als belasting. Bij de aanleg van die kering is uitgegaan van een ontwerpwaterstand met een geringe kans van overschrijden. Daar is de ontwerphoogte van de kering op gekozen, maar de werkelijke hoogte kan daarvan afwijken in zowel positieve als negatieve zijn. Bij een dijk, bijvoorbeeld, is de kruinhoogte niet alleen afhankelijk van waar die op is aangelegd, maar ook van zettingen in de ondergrond die zich na



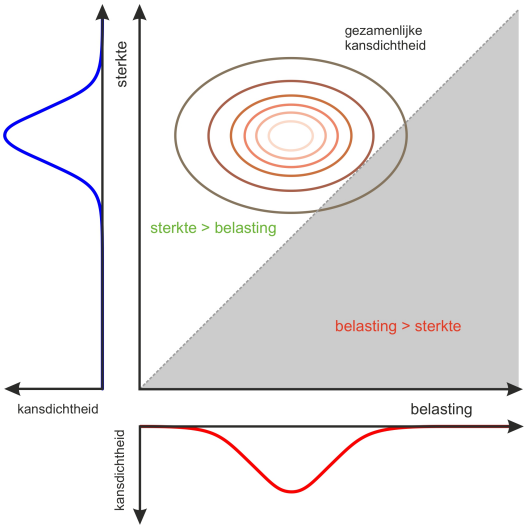
Figuur 9.1: Voorbeeld van kansdichtheden van de sterkte (blauw) van een constructie en de belasting (rood) die daarop werkt. Dit voorbeeld illustreert dat ook al ligt het gemiddelde of de modus van de belasting lager dan die van de sterkte, er is een kans dat de daadwerkelijke belasting op enig moment de sterkte overschrijdt. Absolute zekerheid dat de sterkte van een constructie toereikend is om de belasting kan weerstaan waarop die is ontworpen, kan net worden gegeven.

aanleg kunnen voordoen. Daarom wordt bij aanleg altijd een overhoogte toegepast. Omdat die zettingen niet exact voorspelbaar zijn, kan de uiteindelijk aanwezige kruinhoogte afwijken van de ontwerpwaarde.

In dit voorbeeld zijn sterkte en belasting stochastische variabelen en is de kans op falen gelijk aan de kans dat zich een waterstand voordoet die uitstijgt boven de hoogte van de kering. In werkelijkheid is een waterstand die de hoogte van de kering overschrijdt, slechts één van de faalmechanismen die zich kunnen voordoen (zoals onderloopsheid, aanvaring et cetera). Bij probabilistisch ontwerpen gaat het daarom steeds om identificatie van faalmechanismen en bepaling van de kans dat die zich voordoen. Zeker als zulke mechanismen met elkaar kunnen samenhangen, is berekening van een integrale faalkans (veel) complexer dan in dit voorbeeld. Ter illustratie van het principe volstaat het echter.

Voortbouwend op het voorbeeld van de kering zijn zowel de hoogte (y)daarvan als de waterstand (x) stochastische variabelen. Beide hebben hun eigen kansdichtheid en als figuur 9.1 daar en afbeelding van zou zijn, hoort de rode kromme bij x en de blauwe bij y. De kering faalt als $y \leq x$. Om de kans daarop te berekenen, introduceren we $z = y - x$. De kans dat de constructie faalt (dus dat de bovenkant van de kering onder de waterstand ligt) is daarmee gelijk aan de kans dat $z \leq 0$.

Afhankelijk van de uitgangspunten die bij het ontwerp van de kering zijn gehanteerd en de onzekerheden die daarbij aan de orde zijn, is de werkelijke hoogte y een stochastische variabele en de bijbehorende kansdichtheid noteren we als $f_y(y)$. Op dezelfde manier kent de waterstand een kansdichtheid en die schrijven we als $f_x(x)$. In ons voorbeeld van de waterkering is het nietr waarschijnlijk dat de waterstand zich iets aantrekt van de hoogte van de kering. Die waterstand wordt bepaald door een heleboel factoren, maar de hoogte van de kering zit daar niet bij. Andersom heeft de ontwerper van de kering zich als het goed is rekenschap gegeven van de waterstanden die zich kunnen voordoen en daar het ontwerp op gebaseerd, maar gegeven dat ontwerp laat de hoogte van de kering zich niets gelegen liggen aan voorkomende waterstanden. De waterstand en de hoogte van de kering zijn zodoende ongecorreleerd. De kansdichtheid f_x voor de waterstand is dus een functie van x, maar niet ook van van de hoogte y van de kering en omgekeerd. Vanwege deze onderlinge onafhankelijkheid wordt de gezamenlijke kansdichtheid van



Figuur 9.2: Individuele en gezamenlijke kansdichtheden van belasting en sterkte. De gezamenlijke dichtheid is weergegeven als een contourenplot waarbij de kleur van de contouren verloopt van bruin (lage dichtheid) naar geel (hoge dichtheid). De grijze driehoek verwijst naar combinaties waarbij de belasting groter is dan de sterkte. Langs de streeplijn aan de schuine rand van de de grijze driehoek zijn belasting en sterkte juist aan elkaar gelijk.

waterstand en hoogte van de kering gegeven door het product $f_x(x)f_y(y)$.

De kans dat de kering faalt, wordt gevonden door de gezamenlijke kansdichtheid te integreren over al alle mogelijke combinaties van x en y waarbij de bovenkant van de kering niet boven de waterstand uitkomt, dus voor $x \geq y$. Dit is geïllustreerd in figuur 9.2, waarin de gezamenlijke kansdichtheid (in dit voorbeeld een functie van twee variabelen) is weergegeven in een contourenplot. Om de relatie met de individuele kansdichtheden aan te geven, zijn die langs de assen van de contourenplot geschetst. Combinaties waarbij de kering faalt, liggen allemaal in de grijze driehoek.

De kans P_f dat de kering faalt wordt gegeven door

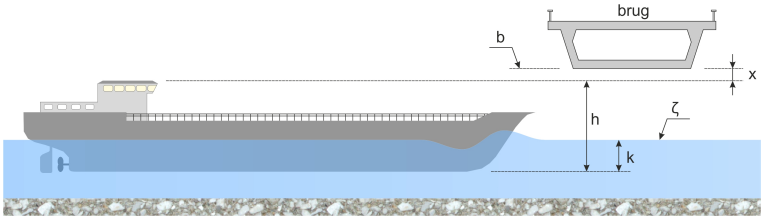
$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} f_x(x) f_y(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \tag{9.1}$$

of, equivalent,

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{y}^{\infty} f_x(x) f_y(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{9.2}$$

In deze beide uitdrukkingen wordt geïntegreerd van $-\infty$ tot $+\infty$ en in dat domein zitten waarden van zowel x als y die fysisch niet mogelijk zijn. De kering kan niet oneindig hoog zijn, om maar wat te noemen. Impliciet hebben we verondersteld dat de kansdichtheden f_x en f_y zijn gedefiniëerd in de volledige domein en daarbij hoort dat $f = 0$ voor waarden van x of y die niet voor kunnen komen. Maar net zo goed hadden we kunnen integreren over alleen de fysisch relevante waarden van x en y.

Deze aanpak, waarin zowel de sterkte als de belasting als stochastische variabelen worden gezien, staat in probabilistisch ontwerpen bekend als een *niveau III* berekening. Voor complexe constructies met een variëteit aan mogelijke belastingen, is



Figuur 9.3: Schets van de langsdoorsnede van een vaarweg met daarin een schip dat onder een brug door moet die de vaarweg kruist. Van de brug is alleen de dwarsdoorsnede geschetst die relevant is voor de vraag of de beschikbare doorvaarthoogte voldoende is om het schip te laten passeren.

een berekening op dit niveau doorgaans niet eenvoudig. Afhankelijk van de situatie kan worden volstaan met een benadering die nog wel recht doet aan het stochastisch karakter van sterkte en belasting, maar waarin de wiskundige beschrijving daarvan wordt vereenvoudigd ten behoeve van een meer handzame berekening. Dit wordt een *niveau II* berekening genoemd. Gebruik van veiligheidsfactoren wordt gezien als een tamelijk basale aanpak (*niveau I*). Daarbij wordt geëist dat de belasting met een kleine kans van overschrijden, ten minste een veiligheidsfactor kleiner is dan de sterkte die met grote kans wordt overschreden.

9.2.1 Een voorbeeld

Ter illustratie vragen we ons af of de doorvaarthoogte onder een brug over een vaarweg, toereikend is voor een schip dat eronder door moet. Hierin is de beschikbare doorvaarthoogte, bepaald door de hoogteligging van de onderkant van de brug en de waterstand in de vaarweg, te zien als een soort sterkte. Tegelijkertijd is het totale vrijboord van het schip (dus hoeveel het schip boven water uitsteekt, afhankelijk van de afmetingen van het schip en de diepgang) een soort belasting. Als de belasting kleiner is dan de sterkte, kan het schip onder de brug door.

Dit voorbeeld is geïllustreerd in figuur 9.3). Ten opzichte van een of andere referentie is b het niveau van de onderkant van de brug en ζ de waterstand in de vaarweg. De beschikbare doorvaarthoogte komt daarmee op $b - \zeta$. De benodigde doorvaarthoogte is $h - k$, waarin h de totale hoogte van het schip (van kiel tot het hoogste punt) en k is de diepgang (hoever de kiel zich onder de waterspiegel bevindt). Het verschil tussen de beschikbare en de benodigde doorvaarthoogte is in figuur 9.3 aangeduid met x. Hiervoor geldt dat

$$x = (b - \zeta) - (h - k) \tag{9.3}$$

en de beschikbare doorvaarthoogte is toereikend als $x > 0$.

In dit voorbeeld gaan we ervan uit dat het om een bekend schip gaat en om een bekende brug. Daarmee liggen de hoogte h van het schip en het niveau van de onderkant b van de brug vast. Op het moment dat het schip richting brug vaart, is van de waterstand ζ in de waterweg echter alleen een schatting bekend. De werkelijke waterstand kan daarvan afwijken. Bovendien is er in dit voorbeeld

enige onduidelijkheid over de lading van het schip en daarmee over de diepgang k. Net zoals bij de waterstand is er alleen een schatting van de diepgang. Gelet op de kennelijke onzekerheden in waterstand en diepgang is er dus een kans dat de beschikbare doorvaarthoogte niet voldoende is om het schip zonder schade te laten passeren.

Om de omvang van die kans te kunnen bepalen, is het nodig dat we van zowel ζ als k niet alleen de schattingen hebben, maar ook een uitspraak kunnen doen over de afwijkingen die ten opzichte van die schattingen kunnen voorkomen. Als een historische reeks beschikbaar is van waargenomen waterstanden in de vaarweg en de schattingen die zijn afgegeven voor de momenten waarop die waarnemingen zijn gedaan, kan een beeld worden gevormd van de betrouwbaarheid van de schattingen. Een veel gebruikte techniek daarvoor is regressie–analyse (zie bijvoorbeeld Draper and Smith (1966)). Daarmee is het mogelijk om op basis van resultaten uit het verleden een uitspraak te doen over de waterstand die verwacht mag worden bij een afgegeven schatting. Die te verwachten waterstand wordt normaal verdeeld verondersteld en de bijbehorende parameters (gemiddelde en standaardafwijking) mede mede afhankelijk zijn van de geschatte waterstand.

Inherent aan de veronderstelling dat de te verwachten waterstand normaal verdeeld is, is dat een eindige kans wordt toegekend aan het optreden van onrealistische waarden, zoals een waterstand die lager ligt dan de bodem van de vaarweg. Dit betekent dat de te verwachten waterstand hooguit bij goede benadering normaal verdeeld is. In de praktijk volstaat die benadering in veel gevallen. Bovendien geldt dat naarmate de historische reeks van schattingen van de waterstand beter is, de waterstanden die verwacht mogen worden bij nieuwe schattingen steeds minder spreiding vertonen. Doorgaans gaat dat gepaard met een steeds kleinere theoretische kans dat zich een onrealistische waterstand voordoet en dus dat de fout die wordt gemaakt door zulke onrealistische waarden op voorhand uit te sluiten, steeds kleiner wordt. Daarmee is niet gezegd dat die fout altijd verwaarloosbaar is. Dat moet per geval worden onderzocht door de resultaten van de regressie–analyse kritisch te evalueren[82].

In ons voorbeeld van een schip dat onder een brug door moet, nemen we aan dat de waterstand ζ op het moment van onderdoor varen bij voldoende benadering normaal verdeeld is en dat de parameters van die verdeling (het gemiddelde μ_ζ en de standaardafwijking σ_ζ) bekend zijn. Daarmee is een van de twee onzekerheden afdoende in kaart gebracht.

De andere is de diepgang k van het schip. Die hangt af van het gewicht van de lading en in dit voorbeeld is daar om een of andere reden is zoveel onduidelijkheid over, dat significante onzekerheid met betrekking tot de diepgang bestaat. En dat heeft invloed op de kans dat het schip niet onder de brug past.

[82] Dit geldt overigens in het algemeen. Niet alleen voor regressie, maar voor toepassing van elk model moeten de uitkomsten altijd kritisch tegen het licht worden gehouden en bezien in de context van de uitgangspunten waarop dat model is gebaseerd. Voor de (fysische) interpretatie van modeluitkomsten is dat van wezenlijk belang.

Misschien kan die onzekerheid deels worden weggenomen door de schipper te vragen met een duimstok over de railing van het schip te gaan hangen en het aanwezige vrijboord te meten. Omdat in dit voorbeeld de afmetingen van het schip bekend zijn, kan k uit zo'n meting worden afgeleid, maar heel betrouwbaar is dat vast niet. Bijkomend probleem in dit geval is dat mate van onbetrouwbaarheid zelfs niet bij benadering kan worden gekwantificeerd omdat het ontbreekt aan informatie die daarvoor nodig is. In de praktijk wordt dat opgevangen door een ruime marge aan te houden. Maar hoe ruim moet die marge zijn?

Een relatief veilige optie is om voor k uit te gaan van de diepgang van het schip in ongeladen toestand. Het schip ligt immers nooit hoger op het water dan wanneer het leeg is. Punt van aandacht daarbij is dat een ongeladen schip meestal niet horizontaal in het water ligt omdat de massa niet altijd uniform is verdeeld over de lengte. Bij de meeste binnenvaartschepen ligt de motor achterin, met als gevolg dat als het schip ongeladen is, de achtersteven dieper ligt dan de boeg. Maar als de afmetingen van het schip bekend zijn, is de waarde van k die het minst gunstig is voor passage van de brug objectief vast te stellen. Daaraan vasthouden en vervolgens op basis van onzekerheden in de waterstanden de kans berekenen dat het schip niet onder de brug past, leidt tot een overschatting van hoe groot die kans werkelijk is (behoudens de fout die wordt gemaakt met de veronderstelling dat de optredende waterstand normaal verdeeld is).

Dit relatief simpele voorbeeld laat zien dat kwantificatie van onzekerheden en een daaraan gekoppelde faalkans niet triviaal is. In ons voorbeeld laten we het bij deze observatie en gaan we er voorts vanuit dat de diepgang k van het schip bij goede benadering normaal verdeeld is met bekend gemiddelde (μ_k) en bekende standaardafwijking (σ_k).

Omdat waterstand en diepgang onderling ongecorreleerd zijn, is de gezamenlijke kansdichtheid van beide gegeven door het product van de afzonderlijke kansdichtheden (genoteerd als f_ζ en f_k, respectievelijk). De kans $P(x \leq 0)$ dat het schip niet onder de brug past, wordt hiermee gegeven door

$$P(x \leq 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{k-h+b} f_k(k) f_\zeta(\zeta) \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}k \tag{9.4}$$

en omdat k en ζ ongecorreleerd zijn, is dit te schrijven als

$$P(x \leq 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(k) \int_{-\infty}^{k-h+b} f_\zeta(\zeta) \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}k \tag{9.5}$$

Omdat we hebben aangenomen dat zowel de waterstand ζ als de diepgang k normaal verdeeld zijn, kunnen we de berekening van de kans $P(x \leq 0)$ nog wat vereenvoudigen. Als we kijken naar (9.3), dan zien we dat $x \leq 0$ identiek is aan $k - \zeta \leq h - k$. Hierin zijn h en k deterministische grootheden met een bekende waarde en ζ en k zijn (verondersteld) normaal verdeelde stochastische variabelen waarvan zowel gemiddelde als standaardafwijking bekend zijn. Voor de vereenvoudiging introduceren we de stochastische variabele $y = k - \zeta$. Ook deze vari-

abele is normaal verdeeld met gemiddelde $\mu_y = \mu_k - \mu_\zeta$ en standaardafwijking $\sigma_y = \sqrt{\sigma_k^2 + \sigma_\zeta^2}$. In termen van y is

$$P(x \leq 0) = \int_{-\infty}^{h-b} f_y(y)\mathrm{d}y \tag{9.6}$$

waarin f_y de kansdichtheid is van de normaal verdeelde y. Met de introductie van y hebben we de berekening van $P(x \leq 0)$ teruggebracht van een dubbele naar een enkele integraal. Rekentechnisch is dat een stuk makkelijker. Dat is echter alleen mogelijk omdat zowel k als ζ normaal verdeeld en ongecorreleerd zijn én y lineair afhangt van k en ζ. Zo'n vereenvoudiging is dus niet altijd mogelijk, maar wel prettig als het kan.

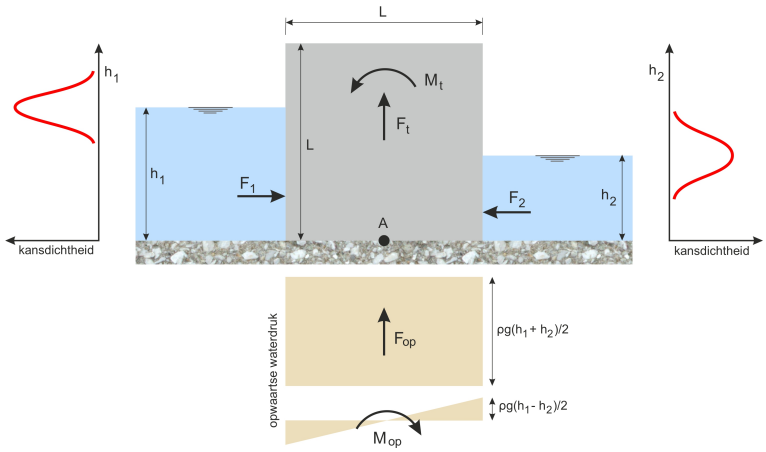
9.2.2 Complexe constructies

Het voorbeeld in de voorgaande paragraaf is simpel in de zin dat sprake is van een eenduidig bepaalde sterkte. Bij waterbouwkundige (en meer in het algemeen civiel–technische) constructies kunnen zich doorgaans meerdere mechanismen voordoen die tot falen van de constructie leiden. In hoofdstuk 8 over waterkerende constructies, bijvoorbeeld, zijn diverse faalmechanismen benoemd (zoals onderloopsheid, afschuiven, kantelen) en die hebben allemaal te maken met wat zich rondom de constructie afspeelt (waterstanden en ondergrond). Onderdelen van de constructie zelf zijn daarbij niet aan de orde geweest, maar ook daarin kan zich verlies aan functionaliteit voordoen.

Een voorbeeld van een situatie waarin zich meerdere faalmechanismen kunnen voordoen en waarbij het van externe omstandigheden afhangt welke zich als eerste manifesteert, is een waterkerende constructie. Als voorbeeld kijken we naar een geschematiseerde waterkerende constructie (zie figuur 9.4). Loodrecht op het vlak van tekening in deze figuur varieert de doorsnede van de constructie niet. De waterdiepten h_1 en h_2 aan weerszijden zijn variabel en niet volledig voorspelbaar. De daaraan gerelateerde belastingen op de constructie (resultante F_1 van de hydrostatische druk links, resultante F_2 van de hydrostatische druk rechts, resultante F_{op} en bijbehorend moment M_{op} van de opwaartse waterdruk) zijn dus stochastische variabelen.

In dit voorbeeld beperken we ons tot de faalmechanismen afschuiven en kantelen (zie paragraaf 8.2) en vragen ons af hoe groot de kans is dat geen van deze mechanismen zich voordoet. Naast de aan water gerelateerde belastingen, moeten we rekening houden met het eigen gewicht van de constructie en eventuele externe belastingen. Deze vatten we samen in een verticale belasting F_t en een moment M_t. Beide zijn deterministisch.

In de navolgende uitwerking kijken we naar een moot van de constructie met een breedte B loodrecht op het vlak van tekening in figuur 9.4. Voorts nemen we krachten naar boven en naar rechts positief. Momenten rekenen we ten opzichte van het midden van het grondvlak van de constructie (punt A in figuur 9.4) en linksom is positief.



Figuur 9.4: Schets van de dwarsdoorsnede van een geschematiseerde waterkerende constructie. Loodrecht op het vlak van tekening variëert deze dwarsdoorsnede niet. De waterstanden aan weerszijden van de constructie zijn stochastische variabelen. Het verloop van de bijbehorende kansdichtheden is geschetst in de grafieken helemaal links en rechts in de figuur.

Afschuiven doet zich voor als ter wille van horizontaal evenwicht op het grensvlak van constructie en ondergrond een grotere schuifspanning nodig is dan wat door frictie kan worden gemobiliseerd. De maximale frictie is afhankelijk van de normaalspanning in dat grensvlak. Als de maximaal mogelijke frictie kleiner is dan de benodigde schuifspanning (dus als de grootte van de verhouding van beide kleiner is dan 1), schuift de constructie af:

$$-1 < \frac{\min\{f, \tan\delta\}(F_t + F_{op})}{F_1 + F_2} < 1 \tag{9.7}$$

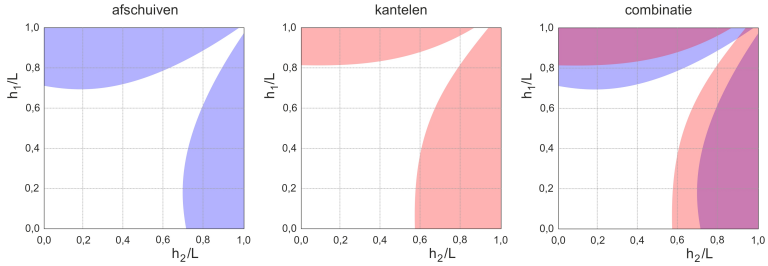
In deze uitdrukking zijn +1 en -1 de kritische grenzen voor afschuiven. Welke van deze twee in een gegeven belastingsituatie relevant is, hangt af van de richting van mogelijk afschuiven. Als bijvoorbeeld $h_1 > h_2$, is $F_1 + F_2 > 0$ en zal de constructie geneigd zijn naar rechts af te schuiven. De kritische grens is in dat geval +1.

Van kantelen is sprake als

$$\frac{M_t + M_{op} + M_1 + M_2}{L(F_t + F_{op})} > \frac{1}{6} \quad \text{of} \quad \frac{M_t + M_{op} + M_1 + M_2}{L(F_t + F_{op})} < -\frac{1}{6} \tag{9.8}$$

waarin M_1 en M_2 de momenten ten opzichte van punt A zijn van achtereenvolgens de resultante hydrostatische belastingen F_1 en F_2.

Omdat de krachten F_1, F_2 en F_{op} en de momenten M_1, M_2 en M_{op} alleen afhangen van de waterdiepten h_1 en h_2, kunnen we bij voorgeschreven (deterministische) F_t en M_t voor elke combinatie van h_1 en h_2 bepalen welke van de beide beschouwde faalmechanismen zich voordoet. Dat kan een van beide zijn, maar ze kunnen zich ook gelijktijdig voordoen. Integratie van de gezamenlijke kansdichtheid van h_1 en



Figuur 9.5: Combinaties van de waterdiepten h_1 en h_2 in het interval $0 \leq h_1, h_2 \leq L$ die tot afschuiven leiden (de blauw gekleurde gebieden in de linker grafiek) en tot kantelen (de rood gekleurde gebieden in de middelste grafiek). De combinatie van beide is gegeven in de rechter grafiek. Het witte gebied daarin betreft combinaties van waterdiepten waarbij noch afschuiven noch kantelen optreedt.

h_2 over deze combinaties, levert de kans dat de constructie faalt door afschuiven en/of kantelen.

De relatie tussen deze krachten en momenten enerzijds en de waterdiepten h_1 en h_2 anderzijds, wordt gegeven door

$$F_1 = \rho g B h_1^2/2 \quad ; \quad F_2 = -\rho g B h_2^2/2 \quad ; \quad F_{op} = \rho g B L(h_1 + h_2)/2 \tag{9.9}$$

en

$$M_1 = -\rho g B h_1^3/6 \quad ; \quad M_2 = \rho g B h_2^3/6 \quad ; \quad M_{op} = -\rho g B L^2(h_1 - h_2)/12 \tag{9.10}$$

Verder hangt het van de voorgeschreven F_t en M_t af welke combinaties van h_1 en h_2 tot falen leiden. In dit voorbeeld gaan we dat na voor het specifieke scenario waarin $0 \leq h_1, h_2 \leq L$, $F_t = -\lambda \rho g B L^2$ (met $\lambda > 1$ zodat opdrijven is uitgesloten) en $M_t = \beta \rho g B L^3$.

In figuur 9.5 is dit uitgewerkt voor $\lambda = 1,05$ en $\beta = 0,05$. De grafieken in deze figuur geven voor alle mogelijke combinaties van h_1 en h_2 aan of sprake is van afschuiven (linker grafiek), kantelen (middelste grafiek) dan wel één of beide of allebei tegelijk (rechter grafiek). Integratie van de gezamenlijke kansdichtheid van h_1 en h_2 over het gekleurde (niet witte) deel van deze rechter grafiek, geeft de kans dat de constructie faalt als gevolg van afschuiven en/of kantelen[83].

In dit voorbeeld hebben we ons op voorhand beperkt tot twee faalmechanismen. We hebben niet gekeken naar onderloopsheid en opdrijven hebben we uitgesloten door te stellen dat altijd $F_t + F_{op} < 0$ (netto verticale belasting steeds neerwaarts). Wat we echter hebben genegeerd is dat h_1 en/of h_2 groter kunnen worden dan de hoogte L van de constructie. Als dat gebeurt, verdwijnt de hele constructie onder water.

[83] De symmetrie in de linker grafiek (rond $h_1 = h_2$) in figuur 9.5 over afschuiven en het ontbreken daarvan in de middelste grafiek over kantelen heeft alles te maken met de invloed van het externe moment M_t. Dat moment speelt geen rol bij afschuiven maar wel bij kantelen. Als $M_t = 0$ zou zijn, zou ook de grafiek over kantelen symmetrie vertonen.

De constructie is daarmee niet meer volledig waterkerend, maar misschien is dat niet erg (zie voetnoot 81). Los daarvan is het voor de inventarisatie van faalmechanismen wel van belang dat zodra de constructie overstroomt, de aan water gerelateerde belastingen anders kunnen zijn dan wat we in het voorbeeld hebben aangenomen. Daarbij zijn we immers uitgegaan van hydrostatische belastingen die passen bij $0 \leq h_1, h_2 \leq L$ en hebben we niet gekeken naar de mogelijkheid dat $h_1, h_2 > L$.

Al met al illustreert dit voorbeeld een wezenlijk aspect van probabilistisch ontwerpen: identificatie en kwantificatie van alle mogelijke faalmechanismen die zijn ingebakken in het ontwerp van een constructie en onzekerheden in belastingen daarop. Wat niet in het voorbeeld aan bod is gekomen maar wel van belang is, is de onderlinge samenhang van faalmechanismen. Inventarisatie van die samenhang is cruciaal omdat het optreden van één faalmechanisme invloed kan hebben op de kans dat een ander faalmechanisme zich voordoet. Tegelijkertijd kan die invloed afhankelijk zijn van de condities waaraan de constructie is blootgesteld.

In het algemeen is er dus niet zoiets als **de** sterkte van een constructie. Afhankelijk van de aard van een constructie en de belastingen die daarop worden uitgeoefend, kan de sterkte variëren. Bij een gedegen probabilistisch ontwerp hoort dat, waar het gaat om falen, alle mogelijke scenario's in beeld worden gebracht en in samenhang met mogelijke belastingen integraal worden gekwantificeerd om tot een faalkans van de constructie als geheel te komen. Voor een risico-inventarisatie en een economische optimalisatie (onderwerp van de volgende paragraaf) is dat fundamenteel.

9.3 Economische optimalisatie

9.3.1 Overwegingen

Veiligheid tegen overstromen is een groot goed. Dat geldt met name in kustgebieden en langs rivieren met een hoge concentratie aan bevolking en economische activiteit. Dat zijn typisch gebieden waar overstromingen kunnen voorkomen en waar, als zich een overstroming voordoet, de schade aanzienlijk is. In de brede zin van het woord kunnen we die schade zien als verlies aan functionaliteit van de infrastructuur in het gebied dat overstroomt kan raken. Dat verlies is niet beperkt tot de waterkering die het gebied moet beschermen, maar betreft het totaal aan infrastructuur. Het beperken van schade is immers niet voorbehouden aan de waterkering. Wat zich achter die waterkering bevindt, kan ook bestand worden gemaakt tegen enige mate van overstromen. Het is maar net waar je voor kiest.

In de economische optimalisatie waar het in deze paragraaf over gaat, speelt die keuze mede een rol. Het gaat om de balans tussen investeren in veiligheid tegen overstromen enerzijds en het accepteren van schade anderzijds. Cruciaal in dit verband is dat veiligheid tegen overstromen niet gegarandeerd kan worden. De kans dat zich omstandigheden voordoen waarbij de functionaliteit van aanwezige

infrastructuur geheel of gedeeltelijk verloren gaat en mogelijk mensenlevens te betreuren zijn, is altijd groter dan nul.

Door aanpassing van het ontwerp van de infrastructuur kan de kans op schade worden verminderd. Zo'n aanpassing van het ontwerp heeft echter wel een prijs. Niet altijd verhoudt het beperken van die kans zich positief ten opzichte van het effect dat ermee wordt bereikt. Daarnaast kunnen wensen en verlangens van andere aard een rol spelen. Zo kan een studentenvereniging bij de inrichting van haar sociëteit worden geconfronteerd met de noodzaak om *brasvast* (onverwacht destructieve belasting) te wegen tegen behoud van esthetiek (kwetsbare, niet zo sterke, architectonische ornamenten).

In materiële zin gaat het om de vraag in hoeverre de investering die nodig is om de kans op verlies van functionaliteit te reduceren, opweegt tegen het effect van die reductie. Dat effect wordt uitgedrukt in termen van risico, meestal gedefiniëerd als het product van kans en gevolg[84]. Vaak is het mogelijk om risico uit te drukken in geld en dat laat een economische afweging toe tussen investeren in veiligheid (in de zin van het verkleinen van de kans op verlies van functionaliteit) en de opbrengst daarvan in termen van reductie van risico.

Hoewel zo'n financiële afweging objectief overkomt, spelen in de praktijk altijd subjectieve elementen een rol. Zodra mensenlevens in het spel zijn, zouden die in zo'n afweging financiëel gewaardeerd moeten worden en dat ligt maatschappelijk gevoelig. Enkele decennia geleden werd dit gevoelige thema vaak niet expliciet benoemd, maar in tegenwoordige risicomodellen worden mensenlevens steeds meer economisch gewaardeerd, bijvoorbeeld op basis van een (redelijkerwijs te verwachten) bijdrage aan het nationaal product. In formulering van beleid is dat steeds meer geaccepteerd, ook al stuit het nog wel op weerstand omdat het voorbij gaat aan gerelateerde emotionele schade die zich niet in financiële termen laat uitdrukken. Daarnaast wordt in het politieke debat eigenlijk geen onderscheid gemaakt tussen kans en risico. Daar is vaak een opgetreden gevolg aanleiding tot de vraag

[84]In risico-management worden naast het product van kans en gevolg ook andere definities gehanteerd. Een daarvan is het product van kans, blootstellingsfrequentie en waarschijnlijkheid. Beide definities hebben verschillende dimensies en zijn daarom moeilijk met elkaar te vergelijken. Daarnaast wordt onderscheid gemaakt tussen individueel risico en groepsrisico. De implicatie van verlies aan functionaliteit van een constructie voor een individu wordt anders gewaardeerd dan die voor een groep. Een historisch voorbeeld hiervan gaat over een treinstation waar zo nu en dan een aantal wagons met gevaarlijke stoffen op een zijspoor werden geparkeerd. Door bijvoorbeeld een wisselstoring was het mogelijk dat een trein op deze wagons zou botsen en dat de gevaarlijke stoffen zouden vrijkomen. Voor omwonenden van het station is dat nadelig, maar het bijbehorende groepsrisico, gebaseerd op het aantal omwonenden en werkenden in de nabijheid van het station, paste binnen geldende normen. Dat veranderde toen een winkel aan het stationsplein plaats maakte voor een omvangrijk kantoorpand. Daarmee nam het aantal mensen in de omgeving van de geparkeerde wagons toe. De groep die was blootgesteld aan de kans dat gevaarlijke stoffen vrijkomen, nam daardoor in omvang toe en daarmee ook het groepsrisico. De norm voor het groepsrisico zou hierdoor worden overschreden, met als gevolg dat óf het kantoorpand niet in gebruik kon worden genomen óf de wagons niet langer bij het station geparkeerd mochten worden. Vanuit het perspectief van risico-management is dat een logische consequentie, maar leg dat maar eens uit aan de mensen die al jaren naast het station wonen. Waarom zou hun veiligheid met betrekking tot die geparkeerde gevaarlijke stoffen afnemen omdat ze meer buren krijgen?

of dat voorkomen had kunnen worden. Dat gevolg is dan al een feit (in zowel materiële als immateriële zin) en concentreert het debat zich daarop en de vraag waar preventie mogelijk ontoereikend is geweest.

De moraal van dit verhaal is dat de perceptie van risico complexe materie is en de waardering of acceptatie afhankelijk is van het maatschappelijk, bestuurlijk, politiek of technisch cq. wetenschappelijk perspectief van waaruit het wordt bezien. Op de finesses van deze materie gaan we in dit hoofdstuk niet in. Voor de beantwoording van de vraag welke investering in preventie van reductie van functionaliteit zich het best verhoudt tot het effect van die investering, gaan we uit van het model dat risico gelijk is aan het product van kans en effect. Daarbij drukken we zowel de omvang van de investering (kosten) als het effect (besparing) uit in geld en zoeken we de balans tussen beide. In de volgende paragraaf werken we dit principe uit.

9.3.2 Principe van optimalisatie

In de voorgaande paragraaf hebben we onderscheid gemaakt tussen, enerzijds, verlies aan functionaliteit van infrastructuur als gevolg van een calamiteit en, anderzijds, investeren in preventie van zulk verlies. In het algemeen gaat een calamiteit gepaard met schade aan infrastructuur. Herstel van die schade en compensatie van afgeleide schade kost geld. Het begrip *schade* is in dit verband tamelijk breed. Denk bijvoorbeeld aan een polder met daarin een elektriciteitscentrale. In het onverhoopte geval dat de polder inundeert, leidt die centrale niet alleen waterschade, maar is die ook deels of geheel buiten gebruik totdat die schade is hersteld. Door het tijdelijk wegvallen van de leverantie van elektriciteit kan additionele schade ontstaan bij afnemers van energie die de centrale levert. Ook die schade moet worden meegerekend in het gevolg van de inundatie. Het gaat dus zowel om herstel van directe schade als compensatie van afgeleide schade.

Voortbordurend op de elektriciteitscentrale in de polder, kunnen we ervoor kiezen om de waterkering rond de polder te versterken ten behoeve van de bedrijfszekerheid van de centrale. Daarmee sluiten we inundatie niet uit, maar maken we die wel minder waarschijnlijk. Met zo'n versterking veranderen we niets aan het stochastisch karakter van de belasting op de kering, maar wel op de sterkte daarvan. In termen van figuur 9.2 schuiven we het contourenplaatje van de gezamenlijke dichtheid van belasting en sterkte evenwijdig aan de verticale as naar een grotere sterkte (naar boven in figuur 9.2). Daarmee verkleinen we de kans dat de belasting op de waterkering groter is dan de sterkte en daarmee de kans op inundatie van de polder.

De vraag is wat we bereiken met reductie van de kans op inundatie. Immers, als inundatie zich voordoet, is de schade aan de centrale er door die reductie niet minder om en zo bezien heeft versterking van de waterkering geen zin. In tegendeel zelfs, want versterking van de waterkering kost geld en de schade bij inundatie wordt niet kleiner.

Die redenering klopt echter niet en om dat in te zien, moeten we kijken naar wat

vermindering van de kans op inundatie betekent voor de behoefte aan reserves voor herstel en compensatie van schade. Die behoefte neemt af naarmate de kans op inundatie afneemt en dat heeft direct te maken met het stochastisch karakter van de belasting op de waterkering rond de polder.

Die belasting is continu aanwezig, maar fluctueert in intensiteit. Meestal is de belasting vrij gematigd, maar soms doet zich een uitschieter voor. Dat is zoals het weer. Meestal zit dat in de buurt van het langjarig gemiddelde en zo nu en dan doet zich een storm voor. Maar ook die stormen variëren in intensiteit. Relatief lichte stormen komen vaker voor dan betrekkelijk zware. In precies die eigenschap zit de sleutel naar een economische optimalisatie van de waterkering (om bij het voorbeeld van de polder en de centrale te blijven).

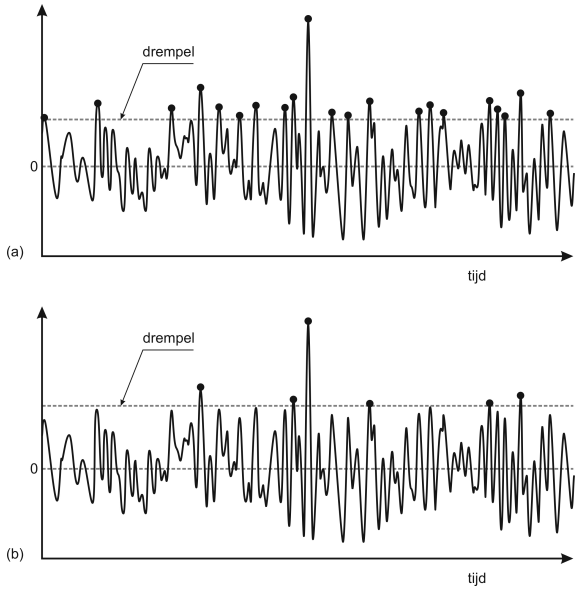
De relatie tussen de intensiteit van stormen en de frequentie waarmee zij voorkomen is geïllustreerd in figuur 9.6. Daarin is een fragment geschetst van het (hypothetisch) verloop van de waterstand (de belasting op de waterkering) met de tijd. In de bovenste figuur (9.6a) zijn extreme waterstanden gemarkeerd die een of andere drempel overschrijden. In de figuur zijn dat er 21. Als we de drempel echter iets hoger kiezen en weer kijken naar de extremen die daar bovenuit komen (figuur 9.6b), blijken dat er nog maar 6 te zijn. Als het fragment van de tijdreeks die in figuur 9.6 is geschetst een duur van bijvoorbeeld 5 jaar beslaat, is de gemiddelde frequentie waarmee stormen zich voordoen waarbij de relatief lage drempel (van figuur (a)) wordt overschreden, gelijk aan 21/5 jaar^{-1} = 4,2 jaar^{-1}. De gemiddelde frequentie van stormen die de relatief hoge drempel overschrijden is 6/5 jaar^{-1} = 1,2 jaar^{-1} (waarbij we in beide gevallen impliciet hebben verondersteld dat het fragment van de tijdreeks dat in figuur 9.6 is getoond, qua frequenties representatief is voor de gehele tijdreeks).

Een en ander houdt in dat naarmate de waterkering op een steeds zwaardere storm wordt ontworpen, inundate en dus schade aan infrastructuur steeds minder vaak zal voorkomen. Dat wil zeggen dat per eenheid van tijd steeds minder geld hoeft te worden gereserveerd voor herstel en compensatie van schade die zich bij inundatie voordoet. In die zin loont het dus om de kans op inundatie te reduceren.

Daar staat tegenover dat reductie van de kans op inundatie, versterking van de waterkering vereist. Hoe kleiner de kans op inundatie, hoe sterker de waterkering moet zijn. De prijskaart die daaraan hangt kunnen we vertalen naar een bedrag per eenheid van tijd en het ligt voor de hand dat dit bedrag toeneemt met de vereiste sterkte van de waterkering.

We hebben zodoende te maken met twee effecten die in economische zin tegengesteld zijn. Naarmate we het veiligheidsniveau verhogen (reductie van de kans op inundatie) neemt de behoefte aan reserveren voor herstel van schade af terwijl de kosten van het handhaven van het veiligheidsniveau juist toenemen. Het economisch optimum ligt bij het minimum van de som van beide.

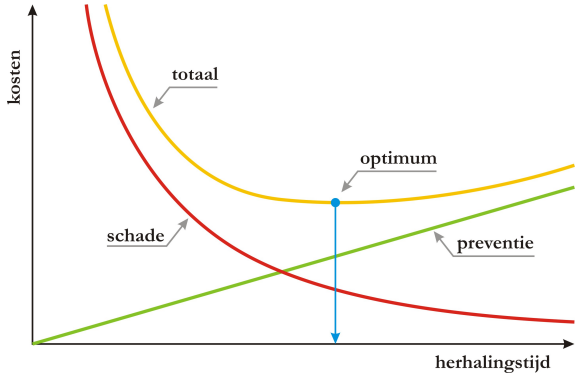
Dit principe is geïllustreerd in figuur 9.7. In deze figuur is langs de horizontale as de zogeheten herhalingstijd uitgezet. Dat is de reciproke van de gemiddelde frequentie waarmee, in dit geval, inundatie zich voordoet. Hoe lager de frequen-



Figuur 9.6: Hypothetische tijdreeks van waterstanden. De tijd is uitgezet langs de horizontale as en de waterstand langs de verticale. In de bovenste figuur (a) zijn extreme waterstanden die boven een of andere drempel uitkomen, gemarkeerd met een dikke stip. In figuur (b) is dat voor dezelfde tijdreeks gedaan, maar dan met een iets hogere drempel. Dit illustreert dat de frequentie waarmee extremen zich voordoen, afhangt van de omvang van die extremen. Hoe omvangrijker het extreem, hoe lager de frequentie van voorkomen.

tie, hoe groter de herhalingstijd. Steeds verder naar rechts in deze grafiek komt zodoende overeen met steeds minder frequente inundaties, ofte wel steeds grotere pauzes tussen opeenvolgende inundaties.

Langs de verticale as zijn kosten per eenheid van tijd uitgezet. De kosten die nodig zijn voor aanleg en onderhoud van de waterkering, zijn aangegeven met de groene lijn (in de figuur aangeduid met *preventie*). Die nemen logischerwijs toe met de herhalingstijd. Immers, hoe zeldzamer en dus heftiger de condities waarop de waterkering wordt ontworpen, des te sterker die waterkering moet zijn en dus hoe kostbaarder aanleg en onderhoud. In de figuur is gemakshalve een lineair verband tussen beide verondersteld. Dat is vaak een redelijke eerste benadering, maar is zeker geen regel.



Figuur 9.7: Principe van de relatie tussen veiligheidsniveau (in deze grafiek langs de horizontale as uitgezet als de gemiddelde herhalingstijd van een calamiteit) en de kosten (per eenheid van tijd) van het handhaven van dat niveau. Bij toenemend veiligheidsniveau nemen de kosten van het handhaven daarvan toe (steeds meer investeren in preventie van een calamiteit), terwijl kosten van herstel van schade als gevolg van een calamiteit juist afnemen. Het economisch optimum ligt bij de herhalingstijd waarvoor de som van beide minimaal is.

De rode curve in figuur 9.7 heeft betrekking op de kosten van herstel van *schade* die het gevolg is van inundatie, of liever de periodieke reservering die moet worden gemaakt voor dat herstel. Die neemt af met toenemende herhalingstijd. Die afname heeft een asymptotisch karakter omdat inundatie nooit kan worden uitgesloten. Er is immers altijd een eindige kans, groter dan nul, dat de belasting op de waterkering groter wordt dan die waartegen deze bestand is[85].

De som van de kosten (per eenheid van tijd) van *schade* en *preventie* is in figuur 9.7 weergegeven met de gele curve (aangeduid met *totaal*). Vanwege het tegengestelde effect van *schade* en *preventie* op dit *totaal*, vertoont deze laatste een minimum en dat is het economisch optimum voor het ontwerp van de waterkering. Bij dat minimum hoort een gemiddelde herhalingstijd van de belasting op de waterkering en op die belasting moet de kering worden ontworpen om het economisch optimum te bereiken.

Om die belasting te kunnen bepalen, gaan we terug naar de tijdreeks waaruit we het verband hebben geschat tussen intensiteit van stormen en de gemiddelde frequentie of herhalingstijd waarmee zij voorkomen. Met de gemiddelde herhalingstijd die bij het economisch optimum hoort, kunnen we berekenen hoeveel extremen we mogen verwachten in de duur waar de tijdreeks betrekking op heeft. Vervolgens zoeken we een niveau (drempel, in termen van figuur 9.6) waarvoor geldt dat het door precies dat aantal pieken wordt overschreden. Dat niveau staat voor de ontwerpbelasting.

Hoewel de geschetst aanpak voor het bepalen van een ontwerpbelasting in principe juist is, is deze in de waterbouwkundige praktijk doorgaans niet op deze manier toepasbaar. Dat zit in de laatste stap waarin de economisch optimale herhalingstijd moet worden herleid naar een ontwerpbelasting. Zodra die herhalingstijd van de zelfde orde is als of groter dan de omvang van de periode waar de beschikbare tijdreeks betrekking op heeft, levert het opzoeken van een ontwerpbelasting in die tijdreeks geen zinvol, betrouwbaar resultaat op. Als de tijdreeks bijvoorbeeld 100 jaar omvat en de economisch optimale herhalingstijd 500 jaar is, dan zou je in de tijdreeks op zoek moeten naar een niveau dat door slechts 1/5 piek wordt overschreden en dat is natuurlijk onzinnig.

Om daaraan tegemoet te komen, wordt verondersteld dat de variatie van de belasting met de tijd bij goede benadering een zogeheten Gaussisch proces is waarvan de eigenschappen op basis van de beschikbare tijdreeks in kaart kunnen worden gebracht. Daarmee is het mogelijk om overschrijdingskansen en bijbehorende frequenties te schatten van belastingen die uitstijgen boven de beschikbare waarnemingen. De basis van deze statistische techniek is in het kort uiteen gezet in appendix A over tijdreeksanalyse. Na een beschrijving van eigenschappen van een Gaussisch proces en extremen die zich daarin voordoen, wordt een relatie gelegd tussen, enerzijds, de kans dat een willekeurig extreem een voorgeschreven niveau

[85] De formulering ¨waartegen deze bestand is¨, is met zorg gekozen. Zowel de sterkte van de waterkering als de belasting waarop deze is ontworpen zijn immers stochastische variabelen. Er is een kans dat de ontwerpcondities worden overschreden en er is ook een kans dat de werkelijke sterkte van de kering minder is dan conform het ontwerp. In paragraaf 9.2 is dat belicht.

overschrijdt en, anderzijds, de kans dat dit niveau in een periode met voorgeschreven duur wordt overschreden. Tevens is uitgelegd hoe de hiervoor relevante statistische parameters uit waarnemingen kunnen worden afgeleid.

9.3.3 Effecten van trends

De Deltacommissie die zich na de grootschalige overstromingen van 1953 in zuidoost Nederland heeft gebogen over de vraag welk veiligheidsniveau maatschappelijk verantwoord is en zou moeten dienen als beleidsuitgangspunt, kwam tot de conclusie dat de primaire Nederlandse zeewering bestand zou moeten zijn tegen condities die gemiddeld niet meer dan één keer per 10.000 jaar worden overschreden. Die conclusie kwam voort uit een economische optimalisatie volgens de principes die in de voorgaande paragraaf zijn beschreven.

Begin 21^{e} eeuw heeft het werk van deze Deltacommissie een vervolg gekregen, uitgevoerd door de Deltacommissie 2008 (waarbij 2008 verwijst naar het jaar waarin die tweede commissie verslag heeft gedaan). Deze tweede commissie heeft op hoofdlijnen het werk van hun voorgangers herhaald, maar dan op basis van de toenmalige stand van de kennis en de inrichting van Nederland. In het advies dat deze tweede commissie heeft uitgebracht, is onder meer te vinden dat de primaire zeewering op een aantal plaatsen zou moeten worden versterkt om bestand te zijn tegen condities die gemiddeld niet eens per 10.000 jaar worden overschreden, maar eens per 100.000 jaar.

De vraag waarom de Deltacommissie 2008 tot een ander advies is gekomen dan hun voorgangers, terwijl de werkwijze van beide commissies op hoofdlijnen overeen komt, zit voor een belangrijk deel in de waardering van kosten voor preventie van inundatie en herstel van schade die optreedt in geval van inundatie. In de periode die is verstreken tussen publicatie van de adviezen van de twee commissies (circa een halve eeuw), is die waardering veranderd. Het effect daarvan op de ligging van de economisch optimale ontwerpconditie, is het onderwerp van deze paragraaf.

Om de essentie van dat effect in kaart te brengen, gaan we uit van geschematiseerde omstandigheden waarin de kosten (per eenheid van tijd) voor herstel en compensatie van schade omgekeerd evenredig zijn met de gemiddelde herhalingstijd van de calamiteit (bijvoorbeeld overstroming) waar de schade een gevolg van is (zie ook figuur 9.7). Dat is te schrijven als

$$S(T) = \alpha/T \tag{9.11}$$

waarin S de kosten per eenheid van tijd voor herstel en compensatie van schade, T de gemiddelde herhalingstijd van de calamiteit en α is een constante waarvan de waarde bekend is.

De kosten P (ook per eenheid van tijd) voor preventie van de calamiteit nemen toe met de omvang en dus ook de gemiddelde herhalingstijd daarvan. Gemakshalve

veronderstellen we een evenredige toename:

$$P(T) = \beta T \tag{9.12}$$

waarin β, net als α, een bekende constante.

De totale kosten K per eenheid van tijd komen hiermee op

$$K(T) = S(T) + P(T) = \frac{\alpha}{T} + \beta T \tag{9.13}$$

Voor deze geschematiseerde voorstelling van zaken, wordt de economisch optimale herhalingstijd T_{opt} gevonden voor

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}T} = -\alpha \frac{1}{T^2} + \beta = 0 \quad \Longrightarrow \quad T_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tag{9.14}$$

Voor bekende parameters α en β ligt de economisch optimale herhalingstijd T_{opt} hiermee vast. Althans, zo lijkt het, want de impliciete veronderstelling hierbij is dat beide parameters niet afhankelijk zijn van de tijd. Maar dat zijn ze wel en precies dat is een belangrijke reden waarom de tweede Deltacommissie een ander veiligheidsniveau heeft geadviseerd dan de eerste.

De kosten (per eenheid van tijd) voor herstel en compensatie van schade die zich voordoet bij een calamiteit, neemt toe met de economische waarde van het totaal dat schade kan oplopen als die calamiteit zich voordoet. Als die economische waarde in de loop van de tijd groeit, neemt α met de tijd toe en dat geldt dan ook voor T_{opt}. Dat wil zeggen dat economische voortgang in het te beschermen gebied aanleiding is om het veiligheidsniveau naar boven bij te stellen.

Los van de economische groei in het te beschermen gebied, spelen ook effecten van klimaatverandering[86]. Voor de Nederlandse situatie leidt die verandering ertoe dat bij het ontwerp van bijvoorbeeld primaire waterkeringen met steeds heftiger condities rekening gehouden moet worden. Dit komt erop neer dat β toeneemt met de tijd.

Het gezamenlijk effect van beide ontwikkelingen hangt af van de mate waarin α en β met de tijd toenemen. Waar het gaat om de veiligheid tegen overstromen in Nederland, is het effect van klimaatverandering (althans op het moment van schrijven van dit boek) klein ten opzichte van het effect van de ontwikkeling van economische infrastructuur ($\beta < \alpha$). Voor een deel verklaart dat waarom de Tweede Deltacommissie heeft geadviseerd voor verhoging van de herhalingstijd van calamiteiten van ééns per 10.000 jaar naar ééns per 100.000 jaar. Voor achtergronden en overige overwegingen van de Deltacommissie 2008 wordt verwezen naar Deltacommissie (2008).

[86] In het advies van de Deltacommissie 2008 wordt ook verwezen naar voortschrijdend inzicht in de relatie tussen extremen en herhalingstijd. Door onder meer wetenschappelijke ontwikkelingen is dat inzicht verbeterd en het is gebleken dat de stand van de kennis ten tijde van de eerste Deltacommissie heeft geleid tot een enigszins optimistisch beeld van extreme omstandigheden waardoor de kosten voor preventie van calamiteiten in enige mate zijn onderschat. Prijsontwikkelingen spelen daarbij overigens ook een rol.

10

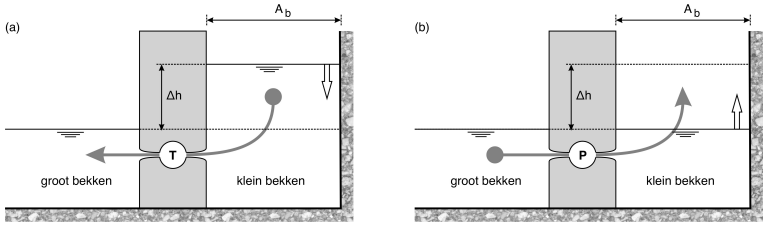
Water en energie

10.1 Inleiding

Uit bewegend water kan energie worden gewonnen en het kost energie om water in beweging te zetten. Een waterkrachtcentrale is een voorbeeld van het eerste en een gemaal van het tweede. Beide voorbeelden hebben een relatie met waterbouwkunde en de principes ervan worden in dit hoofdstuk besproken.

De essentie van beide voorbeelden is geschetst in figuur 10.1. In beide gevallen gaat het om een betrekkelijk klein bekken (rechts in de figuren) dat door een dam is gescheiden van een veel groter bekken (links in de figuren). In die dam zit een opening waardoor water tussen beide bekkens kan worden uitgewisseld. In figuur 10.1(a) stroomt water onder invloed van gravitatie van het kleine bekken naar het grote, net zolang tot er geen verval meer over de dam is. Met een turbine in de opening in de dam kan deze uitstroom worden benut voor het winnen van energie.

Hoeveel energie kan worden gewonnen, hangt af van het totale volume dat wordt uitgewisseld, het verval waarbij dat gebeurt en de verliezen die daarbij optreden. Een al even grofstoffelijke als eenvoudige bovengrensbenadering kunnen we vinden door verliezen te negeren en te veronderstellen dat de waterstand in het grote



Figuur 10.1: Illustratie van het horizontaal én verticaal verplaatsen van water bij het ledigen (a) en vullen (b) van een bekken.

bekken constant is en onafhankelijk van de uitwisseling via de dam. Als het grote bekken bijvoorbeeld een uitgestrekt meer is waarin de waterstand nauwelijks variëert in de tijd die nodig is om het kleine bekken te ledigen en bovendien de horizontale oppervlakte van het kleine bekken klein is ten opzichte van dat van het meer, is de aanname van een constante waterstand in het meer redelijk.

Bij het ledigen van het kleine bekken verplaatst water zich niet alleen horizontaal, maar ook verticaal. Het volume aan water dat via de dam afstroomt, verliest potentiële energie en die kan worden gewonnen. Dat verlies aan potentiële energie is gelijk aan de potentiële energie die is geboren in dat deel van het water in het bekken dat zich boven het peil in het grote bekken bevindt op het moment dat het ledigen begint.

Als figuur 10.1(a) de situatie bij aanvang van ledigen van het kleine bekken weergeeft, dan is dat volume gelijk aan $V = A_b \Delta h$, met A_b de horizontale oppervlakte van het bekken en Δh het aanvankelijke verval over de dam (en aangenomen dat het kleine bekken rondom verticale oevers heeft zodat A_b niet afhankelijk is van de waterstand). De uitstroom stopt zodra het verval over de dam gelijk is aan nul en met de aanname dat het peil in het grote bekken constant is, is dat volume V dan gemiddeld over een afstand $\Delta h/2$ omlaag gegaan. De potentiële energie van dat volume is in dat proces afgenomen met $\Delta E_{\text{pot}} = \rho g A_b \Delta h^2/2$.

Deze ΔE_{pot} is de energie die vrijkomt bij het ledigen en daarmee een bovengrensbenadering van wat gewonnen kan worden. In werkelijkheid ligt de winbare energie lager omdat altijd sprake is van verliezen

De omgekeerde situatie is gegeven in figuur 10.1(b), waarin water vanuit het grote bekken tegen de zwaartekracht in naar het kleine bekken wordt verplaatst met behulp van een pomp in de opening in de dam. In dit geval is de $\Delta E_{\text{pot}} = \rho g A_b \Delta h^2/2$ een ondergrensbenadering van de energie die de pomp moet leveren om het kleine bekken te vullen tot het verval over de dam Δh bedraagt.

In Nederland, dat voor een groot deel onder gemiddeld zeeniveau ligt, wordt letterlijk veel energie gestopt in het omhoog brengen van water. Voor peilbeheer in de relatief laaggelegen gebieden zijn enkele duizenden gemalen, van klein tot groot, in bedrijf en samen zijn die goed voor circa 0,2‰van het totale binnenlandse energieverbruik[87].

Het winnen van energie uit stroming en hoogteverschillen gebeurt in Nederland op bescheiden schaal. Voor zogeheten groene energie wordt vooral gemikt op wind en zon (zie bijvoorbeeld Milieu Centraal (2022)). Elders in de wereld ligt dat anders. Op diverse plaatsen zijn stuwmeren aangelegd, wordt energie gewonnen uit getij (zowel hoogteverschil als stroming) en zijn andere opties, zoals energie uit golven (zie paragraaf 4.5.1) en het mengen van zoet en zout water (zogeheten *blue energy*, zie voetnoot 89) in ontwikkeling.

[87] Dit is een ruwe schatting, gebaseerd op cijfers van het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek, 2022).

10.2 Pompen en gemalen

10.2.1 Inleiding

Gemalen zijn installaties waarmee water tegen een verval in kan worden verplaatst en worden veelvuldig ingezet voor waterbeheer. Ten behoeve van bijvoorbeeld landbouw of natuurontwikkeling kan het wenselijk zijn om de hoeveelheid water die in een gebied aanwezig is, te reguleren. Een overmaat moet dan worden afgevoerd en een tekort aangevuld. Als aanvoer nodig is vanuit een gebied met een lager peil of afvoer naar een gebied met een hoger peil, zal water omhoog moeten worden gebracht en daar dient een gemaal voor. Een voorbeeld van een betrekkelijk klein gemaal, waar er in Nederland talloze van zijn, is dat aan de Balthasar van der Polweg in Delft (zie figuur 8.1 in hoofdstuk 8 over waterkerende constructies[88]).

Centraal in een gemaal is het zogeheten opvoerwerktuig. Daarmee wordt het water omhoog gebracht. Eromheen zitten een aanvoerleiding, een afvoerleiding en de aandrijving van het opvoerwerktuig. Die aandrijving levert de energie die nodig is om het water omhoog te brengen.

Tot eind 18^{e} eeuw werden in Nederland voor waterbeheer vrijwel uitsluitend windmolens gebruikt. De energie die nodig is om water omhoog te brengen, wordt onttrokken aan wind en er is een directe, mechanische overbrenging van de molenwieken naar het opvoerwerktuig. Vanaf circa 1800 zijn in toenemende mate stoomgemalen ingezet. Enkele daarvan zijn vandaag de dag nog operationeel. Sinds het begin van de 20^{e} eeuw zijn de stoommachines in gemalen vervangen door dieselmotoren en later door elektromotoren (met, als het om een belangrijk gemaal gaat, daarnaast een dieselaggregaat voor het geval de stroom uitvalt).

Opvoerwerktuigen zijn er in diverse soorten. Een bekende is de vijzel, gebaseerd op de schroef van Archimedes. Tegenwoordig worden vooral pompen gebruikt. Kenmerkend voor pompen is dat de druk in of de snelheid van het water wordt verhoogd, waarbij uitstroming in één specifieke richting wordt geforceerd. Dat kan op uiteenlopende manieren en er zijn veel typen pompen verkrijgbaar voor diverse toepassingen. Voor nadere informatie wordt verwezen naar Internet en de literatuur.

In deze paragraaf over pompen en gemalen gaan we in op de energiehuishouding van het systeem van aanvoerleiding, opvoerwerktuig en afvoerleiding zoals dat in gemalen voorkomt. Daarbij maken we gebruik van de theorie die is gegeven in paragraaf 3.3 over stroming in gesloten leidingen. We beginnen met de energiehuishouding rond een pomp (paragraaf 10.2.2) en daarna passen we dat toe op een gesimplificeerd gemaal (10.2.3).

[88] Bedenk dat een gemaal mede een verval in stand houdt en dus ook een waterkerende functie heeft.

10.2.2 Pompen

Een pomp is bedoeld om water omhoog te brengen en/of de snelheid ervan te verhogen. In beide gevallen voegt de pomp energie toe aan het water. Bij het omhoog brengen gaat dat over een toename van potentiële energie en verhoging van de snelheid is een toename van kinetische energie. Voor de manier waarop dat in een pomp gebeurt, wordt verwezen naar de literatuur. In deze paragraaf beperken we ons tot de energiehuishouding en kijken we naar het vermogen dat nodig is water omhoog te brengen en te versnellen.

Daartoe schematiseren we een pomp tot een instrument dat in een duur T een volume water V vanuit rust over een afstand Δh omhoog moet brengen en een snelheid u moet geven. Door het omhoog brengen neemt de potentiële energie van het water toe met $\Delta E_{\text{pot}} = \rho g V \Delta h$. De toename van de kinetische energie wordt gegeven door $\Delta E_{\text{kin}} = \rho V u^2/2$. De totale toename van de energie ΔE komt daarmee op

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} \\ &= \rho g V \Delta h + \rho V u^2/2 \\ &= \rho g V \left(\Delta h + \frac{u^2}{2g} \right) \end{aligned} \tag{10.1}$$

Deze ΔE is de energie die de pomp moet leveren in een duur T. Het gemiddeld vermogen P dat de pomp moet leveren is zodoende

$$P = \frac{\Delta E}{T} = \rho g \frac{V}{T} \left(\Delta h + \frac{u^2}{2g} \right) = \rho g Q \left(\Delta h + \frac{u^2}{2g} \right) \tag{10.2}$$

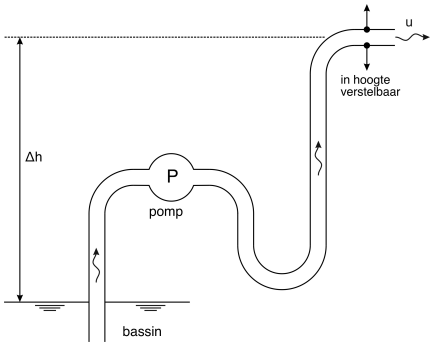
waarin Q het debiet is dat door de pomp wordt geleverd.

De term tussen haken in het rechter lid van bovenstaande uitdrukking is de verandering van energiehoogte ΔH (zie paragraaf 3.3). We kunnen dus schrijven dat

$$P = \rho g Q \Delta H \tag{10.3}$$

Het is belangrijk om te bedenken dat dit het vermogen is dat aan het water wordt toegevoegd. Dat wordt geleverd door het aandrijving van de pomp en om dat te kunnen doen, moet die aandrijving worden gevoed. Het vermogen dat de aandrijving nodig heeft, is groter dan P omdat zich in die aandrijving en in de pomp verliezen voordoen, bijvoorbeeld door wrijving in mechanische componenten en wandwrijving die de stroming in de pomp ondervindt. Dat wordt gebruikelijk in beeld gebracht door onderscheid te maken tussen een bruto en een netto vermogen. Het bruto vermogen gaat over de voeding van de aandrijving en het netto vermogen is wat uiteindelijk aan het water wordt toegevoegd in de vorm van druk en snelheid. De verhouding tussen beide wordt het rendement genoemd, vaak aangegeven met het symbool η:

$$P_{\text{bruto}} = \eta P_{\text{netto}} \tag{10.4}$$



Figuur 10.2: Schematische voorstelling van een systeem waarbij met behulp van een pomp water uit een bassin via een flexibele leiding op een hoohgte Δh boven het nieau van het bassin wordt uitgelaten.

waarbij $\eta > 1$.

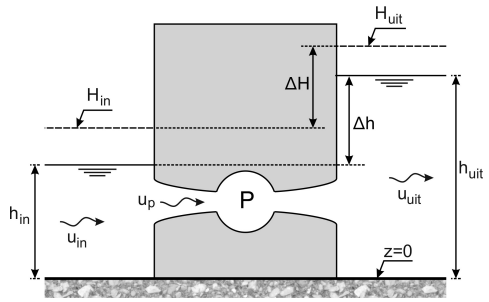
Ander punt van aandacht is de besteding van het vermogen dat een pomp aan het water kan toevoegen. Dat vermogen komt ten goede aan een verhoging van druk en snelheid. De vraag is echter in welke verhouding dat gebeurt. Met andere woorden: welk deel van het vermogen leidt tot een verhoging van de druk (de opvoerhoogte) en welk deel aan een toename van de snelheid? Uitdrukking (10.3) geeft daarover geen uitsluitsel, want die gaat alleen over de som van beide.

In het algemeen kan worden gesteld dat de distributie van het vermogen afhangt van omstandigheden. Om dat in te zien, kijken we naar een gesimplificeerde situatie waarin een pomp wordt ingezet om water uit een bassin op een of andere hoogte Δh boven de vrije waterspiegel in dat bassin met een snelheid u uit te laten stromen. Deze situatie is geschetst in figuur 10.2.

De gebogen leiding aan uitstroomzijde van de pomp in deze figuur, moet worden gezien als een flexibele slang. Het uiteinde daarvan, helemaal rechts in de figuur, kan vanwege die flexibiliteit in hoogte worden versteld en dat betekent dat de opvoerhoogte Δh naar wens kan worden aangepast. We gaan ervan uit dat die aanpassing zodanig is dat de vorm van de slang (met name de bochten daarin) niet veranderen, net zo min als de totale lengte van de slang. Met deze aanname is de positie van het uitstroomeinde van de slang niet van invloed op de verliezen die zich daarin voordoen. Omdat de totale lengte gelijk blijft, geldt dat ook voor het verlies door wandwrijving. En omdat het totaal aan bochten ook gelijk blijft (een halve cirkel onderin en een kwart bovenin), worden ook de daaraan gerelateerde verliezen niet beïnvloed door de positie van de uitstroomopening.

In deze configuratie kunnen we dus binnen zekere grenzen spelen met de verticale positie van de uitstroomopening om te kijken wat daarvan de invloed is op het debiet dat de pomp kan verwerken, afhankelijk van het vermogen dat die pomp kan leveren terwijl verliezen door wandwrijving en bochten vrijwel gelijk blijven.

Als we uitgaan van een of ander vast vermogen P, dan moet volgens (10.3) gelden dat $Q\Delta H$ constant is, ofte wel dat $Q \propto 1/\Delta H$. Om een uitspraak te kunnen doen over de relatie tussen het debiet Q en de opvoerhoogte Δh, moet ook het uitstroomoppervlak (de oppervlakte van de dwarsdoorsnede van de uitstroomope-



Figuur 10.3: Schematische doorsnede van het gemaal (paragraaf 10.2.3).

ning) in de beschouwing worden betrokken. Als A_{uit} dit oppervlak is, dan geldt dat $u = Q/A_{\text{uit}}$, zodat (volgens (10.3)),

$$\frac{P}{\rho g A_{\text{uit}}} = u\left(\Delta h + \frac{u^2}{2g}\right) \tag{10.5}$$

Deze uitdrukking toont de relatie tussen u en Δh (rechter lid) bij een voorgeschreven P en A_{uit} (linker lid), of omgekeerd. De porté hiervan is dat opvoerhoogte (Δh), uitstroomsnelheid (u) cq, debiet (Q) en beschikbaar vermogen (P) niet onafhankelijk van elkaar kunnen worden gekozen in een ontwerp van een systeem waarin een pomp wordt ingezet. Een keuze voor één van deze parameters beïnvloedt de keuzeruimte die beschikbaar is voor de andere. In het navolgende rekenvoorbeeld speelt dat een rol.

10.2.3 Toepassing

Ter illustratie gaan we voor een simpel gemaal op hoofdlijnen na welk vermogen de pomp netto moet leveren om water tegen een verval in te transporteren. Een schematische doorsnede van dat gemaal is geschetst in figuur 10.3.

Het netto vermogen P dat de pomp moet leveren, wordt gegeven door

$$P = \rho g Q \Delta H_{\text{pomp}} \tag{10.6}$$

(zie (10.3)), waarin Q het gewenste debiet is en ΔH_{pomp} de energiehoogte die aan het water moet worden toegevoegd. Naast het verval $\Delta H = \Delta H_{\text{uit}} - \Delta H_{\text{in}}$ moet deze ΔH_{pomp} ook compenseren voor alle verliezen die in het gemaal optreden. Zodoende moet

$$\Delta H_{\text{pomp}} = \Delta H_{\text{uit}} - \Delta H_{\text{in}} + \Delta H_{\text{verlies}} \tag{10.7}$$

Verliezen treden op bij instroming (contractie), wandwrijving, bochten, doorvoer door de pomp en uitstroming (vertraging) en afhankelijk van de configuratie nog meer. Bij benadering kunnen we het totale verlies relateren aan een karakteristieke stroomsnelheid u_p volgens

$$\Delta H_{\text{verlies}} \approx \xi_p \frac{u_p^2}{2g} \tag{10.8}$$

waarin ξ_p de coëfficiënt die het totaal aan verliezen relateert aan u_p. Dit is een benadering omdat het verlies in de pomp zelf niet evenredig is met het kwadraat van de stroomsnelheid, maar met u_p tot een andere macht (doorgaans iets kleiner dan 2, maar dat hangt van de pomp af).

Met deze bendering kunnen we voor het benodigde vermogen P schrijven dat

$$P = \rho g Q \left(h_{\text{uit}} + \frac{u_{\text{uit}}^2}{2g} - h_{\text{in}} - \frac{u_{\text{in}}^2}{2g} + \xi_p \frac{u_p^2}{2g} \right) \tag{10.9}$$

Hoewel niet daartoe beperkt, worden gemalen in de praktijk vaak gebruikt om het peil aan laagwaterzijde een voorgeschreven maximum niet te laten overschrijden, zoals bijvoorbeeld in polders. Afhankelijk van doorlopende waarnemingen aan peilvariaties worden in het gemaal één of meerdere pompen in– of afgeschakeld. Variëren met het aantal pompen dat in werking is, komt neer op trapsgewijs regelen van het vermogen dat wordt ingezet om water te verplaatsen.

Van belang in dit verband is dat een vergroting van het debiet een meer dan evenredige vergroting van het ingezette vermogen vereist. Omgekeerd leidt een reductie van het ingezette vermogen (door één of meerdere pompen af te schakelen) tot een minder dan evenredige reductie van het debiet. Dat volgt direct uit (10.9).

In de praktijk is de stroomsnelheid in de aan– en afvoerkanalen aan weerszijden van gemaal betrekkelijk klein, zodat bij redelijke benadering $u_{\text{uit}}, u_{\text{in}} \approx 0$. In zulke gevallen reduceert (10.9) tot

$$P \approx \rho g Q \left(h_{\text{uit}} - h_{\text{in}} + \xi_p \frac{u_p^2}{2g} \right) \tag{10.10}$$

Omdat de karakteristieke stroomsnelheid u_p afhankelijk is van het debiet Q, is het vermogen P juist niet evenredig met dat debiet. In deze uitspraak hebben we geen rekening mee gehouden dat het verval $\Delta h = h_{\text{uit}} - h_{\text{in}}$ over het gemaal ook kan worden beïnvloed door variaties in het debiet. Dat doet echter niets toe of af aan de constatering dat de relatie tussen P en Q een niet-lineair karakter heeft. Dat verklaart waarom een verandering van het debiet geen evenredige verandering van het vermogen vereist en, omgekeerd, een verandering van het vermogen geen evenredige verandering van het debiet teweeg brengt.

Tot slot van deze paragraaf over gemalen merken we op dat het bij– of afschakelen van pompen in een gemaal gepaard gaat met een vrij abrupte verandering van het debiet. Daardoor ontstaan in de aan– en afvoerkanalen aan weerszijden van het gemaal zogeheten translatiegolven. Bij schutsluizen doet zich dat ook voor bij het vullen en ledigen van de schutkolk. Inzicht in zulke golven kan van belang zijn voor scheepvaart, oeverbescherming en zo meer. Het principe van zulke translatiegolven komt aan bod in appendix F.

10.3 Waterkracht

10.3.1 Inleiding

Stromend en vallend water wordt al eeuwen als bron van energie benut. Naar verluidt maakten in de oudheid Egyptenaren, Romeinen, Mesopotamiërs, Indiërs, Chinezen en vele anderen daar al gebruik van. In vroeger dagen ging dat uitsluitend om directe aandrijving van machines, zoals bij watermolens waarbij stromend of vallend water wordt gebruikt om een schoepenrad in beweging te houden. Het voordeel schuilt in de koppeling van de roterende as van zo'n rad met een apparaat dat in één of andere toepassing menselijke arbeid vervangt. Een voorbeeld daarvan is een watergedreven zaagmolen. Tegelijkertijd zijn er ook zaagmolens die werken op windenergie.

Tegenwoordig wordt waterkracht vooral (maar niet uitsluitend) gebruikt om elektrische energie te genereren. De eerste toepassing daarvan stamt uit de 19^{e} eeuw. Het grote voordeel van elektrische energie als tussenvorm, is dat het afstand toelaat tussen de plaats waarop de energie wordt gegenereerd (of gewonnen) en waar die wordt geconsumeerd. Een nadeel is dat het eigenlijk moet worden geconsumeerd zodra het wordt geproduceerd. Zeker bij de tegenwoordige, toenemende behoefte aan hernieuwbare energie uit zon, wind en water, leidt dat tot een majeure queeste als het gaat om het afstemmen van vraag en aanbod.

Het is een beetje vergelijkbaar met de ervaring van de beheerder van een rioolwaterzuiveringsinstallatie (RWZI). Afhankelijk van het aanbod aan rioolwater, worden pompen van zo'n installatie in– of uitgeschakeld. Dat proces is volledig geautomatiseerd. Het verhaal van de beheerder is dat je aan het bijschakelen van pompen kunt aflezen wanneer de scheidsrechter heeft gefloten voor rust in een voetbalwedstrijd die op televisie of Internet *live* te volgen is. Dat is het moment waarop opeens heel veel plasjes worden gedaan.

Met de vraag naar energie is dat net zo. Die fluctueert om allerlei redenen waar zon, wind en water geen rekening mee houden. Daarom wordt tegenwoordig veel onderzoek gedaan naar grootschalige, duurzame opslag van energie en naar grootschalige koppeling van producenten en consumenten om te bevorderen dat ruimtelijke spreiding in overschotten en tekorten tot uitvlakking leidt.

Maar hoe boeiend die queeste ook is, het fundamentele aspect is het winnen (of oogsten, zoals het vooral in de Engelstalige vakliteratuur wordt genoemd) van energie ten behoeve van een proces of activiteit. In dit hoofdstuk belichten we één kant daarvan, namelijk waterkracht. Dat is een misleidende term omdat het kracht verwart met energie. Bovendien, wie een woordenboek of Internet raadpleegt voor de betekenis van waterkracht, vindt zeer waarschijnlijk dat het gaat om het winnen van energie uit stroming óf een hoogteverschil (verval). Dat suggereert een onderscheid dat er eigenlijk niet is. In waterbouwkundige context gaat het bij waterkracht altijd om water dat stroomt als gevolg van een verval of drukgradi-

ënt[89]. En die stroming wordt gebruikt om een turbine of soortgelijk apparaat aan te drijven waarmee energie kan worden omgezet naar een gewenste vorm, doorgaans elektrische energie. Enkele principes van methoden om dat te doen komen in de volgende paragraaf over energie uit stroming aan bod, te beginnen met een stationair systeem (stuwmeer, paragraaf 10.3.2), gevolgd door een dynamisch systeem (getijdencentrale, paragraaf 10.3.3). De *blue energy* die in voetnoot 89 is genoemd, laten we verder buiten beschouwing, maar we gaan wel kwalitatief in op het winnen van energie uit windgolven (paragraaf 10.3.4).

10.3.2 Stuwmeer

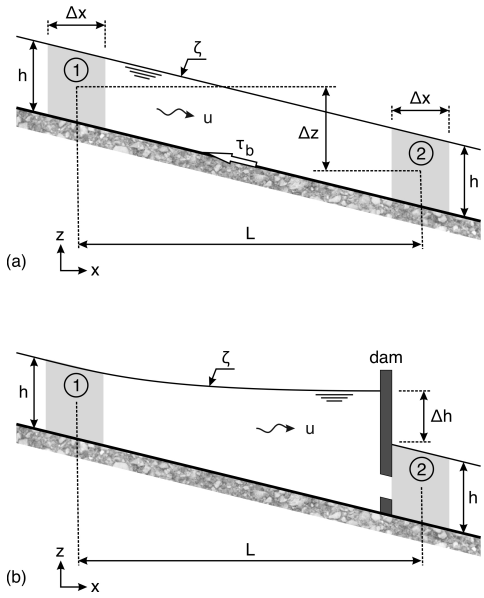
Een stuwmeer is bedoeld om de energiehuishouding van een natuurlijke, open waterloop zodanig te manipuleren dat er energie uit kan worden gewonnen. In een stationaire situatie en in termen van impuls wordt de stroming in zo'n waterloop in stand gehouden door een balans tussen een drukgradiënt (verhang) en bodemwrijving. In termen van energie, daarentegen, gaat het om een balans tussen een verandering in potentiële energie en arbeid verricht door wrijving.

Voor het principe van die energiebalans kijken we naar eenparige, uniforme stroming in een open waterloop. Een langsdoorsnede is geschetst in figuur 10.4(a). We volgen daarin een volume water (aangegeven met het grijze blok) dat zich met de stroom mee verplaatst. Op enig moment bevindt dit volume zich op een bovenstroomse locatie (①, links in de figuur) en even later op een andere, stroomafwaartse locatie (②, rechts in de figuur). Onderweg van de bovenstroomse naar de benedenstroomse locatie is de potentële energie van het volume afgenomen. Per eenheid van breedte dwars op het vlak van tekening, kan de omvang ΔE_{pot} van deze verandering van potentiële energie worden geschreven als

$$\Delta E_{\text{pot}} = \rho g h \Delta x \Delta z \tag{10.11}$$

waarin Δx de afmeting van het volume water in stroomrichting en Δz de verticale afstand die door het volume is afgelegd. Als $i = -d\zeta/dx$ het verhang is, dan geldt dat $\Delta z = iL$, waarbij L de horizontale afstand waarover het volume is verplaatst.

[89] Er zijn ook andere manieren om energie uit water te winnen, maar die vallen buiten het bestek van dit boek. Een voorbeeld daarvan is *blue energy*. Deze techniek maakt gebruik van de energiebalans die gekoppeld is aan de watercyclus. In die cyclus verdampt water uit zee onder invloed van de zon. De waterdamp die op deze manier in de atmosfeer terecht komt. condenseert op enig moment en dat resulteert in neerslag die uiteindelijk, veelal na afstroming en via rivieren, weer in zee belandt. In deze cyclus is energie nodig voor de verdamping en komt energie vrij bij de condensatie. Die twee zijn echter niet met elkaar in balans en dat heeft te maken met het verschil in zoutgehalte tussen zeewater en neerslag. Hoe zouter het zeewater, hoe meer energie het kost om water daaruit te laten verdampen. De waterdamp die in de atmosfeer terecht komt, bevat geen zout en bij condensatie daarvan komt zodoende minder energie vrij dan wat nodig was voor de verdamping. Het verschil tussen beide komt pas vrij als de zoutloze neerslag zich na afstroming uiteindelijk mengt met zeewater. Bij de verdamping werd de zee een beetje zouter en dat wordt hersteld bij die menging. *Blue energy* is erop gericht om de energie te winnen die bij deze laatste stap vrijkomt. Dat herstel van het zoutgehalte is overigens niet helemaal volledig, want onderweg naar zee worden in het afstromende water zouten opgelost waardoor op termijn het zoutgehalte van de zee stijgt.



Figuur 10.4: Idee van een stuwmeer. In figuur (a) is de langsdoorsnede van een rivier geschetst en in figuur (b) is in die rivier een stuwdam geplaatst. Bovenstrooms van die dam stelt zich een verhanglijn in waarbij de waterstand hoger ligt dan die in de oorspronkelijke situatie zonder dam. Ver bovenstrooms van de dam (locatie ①) is de verandering van de waterstand zo klein dat dat van een ongestoorde situatie kan worden gesproken. Als het debiet door de dam gelijk is aan de bovenstroomse afvoer van de rivier, is ook benedenstrooms van de dam sprake van een ongestoorde situatie (lokate ②).

De arbeid $A_{\rm w}$ die bij de verplaatsing van het volume wordt verricht door de bodemschuifspanning τ_b, wordt gegeven door

$$A_{\rm w} = \tau_b \Delta x L(1+i^2) \approx \tau_b \Delta x L \tag{10.12}$$

waarin $\tau_b \Delta x\sqrt{1+i^2}$ de wrijvingskracht is die het volume ondervindt en deze kracht werkt over een afstand $L\sqrt{1+i^2}$. Omdat $i \ll 1$, is $1+i^2 \approx 1$.

Voor de energiebalans vinden we zodoende, na delen door $\Delta x L$,

$$\Delta E_{\rm pot} + A_{\rm w} = 0 \quad \rightarrow \quad -\rho g h \frac{d\zeta}{dx} + \tau_b = 0 \tag{10.13}$$

Door vervolgens de bodemschuifspanning te relateren aan de diepte-gemiddelde stroomsnelheid u volgens

$$\tau_b = -c_f \rho u|u|$$

(zie(2.30)) volgt

$$\Delta E_{\rm pot} + A_{\rm w} = -\rho g h \frac{d\zeta}{dx} - c_f \rho u|u| = 0 \tag{10.14}$$

Merk op dat dit, althans na delen door ρh, identiek is aan de impulsbalans (2.32) voor 1–dimensionale, stationaire, uniforme stroming.

Omdat het beschouwde volume water beweegt en dus een snelheid heeft, is ook sprake van kinetische energie. Op de locaties ① en ② is die echter identiek. Het gaat immers om het zelfde volume (en dus ook om de zelfde massa omdat we water onsamendrukbaar veronderstellen) en om de zelfde snelheid. Er is zodoende geen verandering van kinetische energie.

Bij toepassing van een stuwdam tussen de locaties ① en ② zoals geschetst in figuur 10.4(b), verandert de energiebalans (10.13). De stuwdam vormt een obstructie in de stroming. Die leidt tot een lokale toename van de weerstand en gaat gepaard met verlies van energie (genoteerd als ΔE_{dam}). Tegelijkertijd kan het verval Δh over de dam worden benut om energie te winnen (E_{win}). Met deze twee extra bijdragen wordt de energiebalans

$$\Delta E_{\mathrm{pot}} + A_{\mathrm{w}}^{*} + \Delta E_{\mathrm{dam}} + E_{\mathrm{win}} = 0 \tag{10.15}$$

De verandering van de potentiële energie ΔE_{pot} is in deze balans identiek aan die in balans (10.13) voor de situatie zonder de stuwdam. Dat geldt niet voor de arbeid A_{w} die wordt verricht door de bodemwrijving (daarom is deze grootheid in (10.15) voorzien van een *). Tussen de locaties ① en ② neemt de stroomsnelheid in de richting van de stroming geleidelijk af tot bijna nul net bovenstrooms van de dam. Omdat het energieverlies door wrijving evenredig is met het kwadraat van de stroomsnelheid, is dit verlies in aanwezigheid van de stuwdam kleiner dan zonder die dam ($A_{\mathrm{w}}^{*} < A_{\mathrm{w}}$). Het verschil is beschikbaar voor het extra verlies ΔE_{dam} en de oogst E_{win}:

$$\Delta E_{\mathrm{dam}} + E_{\mathrm{win}} = A_{\mathrm{w}} - A_{\mathrm{w}}^{*} \tag{10.16}$$

Uitwerking van het verschil $A_{\mathrm{w}} - A_{\mathrm{w}}^{*}$ is tamelijk bewerkelijk. Het energieverlies A_{w}^{*} is afhankelijk van het verloop van de stroomsnelheid $u(x)$ tussen ① en de stuwdam en om dat te kunnen bepalen, is evaluatie van de verhanglijn nodig die zich bovenstrooms van de stuwdam instelt. Omdat die uitwerking niet nodig is om een beeld te kunnen geven van het ontwerp van een stuwdam met betrekking tot optimalisatie van de energie–opbrengst, laten we die achterwege. Dat kan veel makkelijker met een lokale beschouwing van de waterbeweging rond en door de stuwdam. Daar gaat het vervolg van deze paragraaf over.

Die lokale beschouwing gaat over het stukje rivier tussen net bovenstrooms en net benedenstrooms van de dam. Het verval Δh over de dam wordt gebruikt om een stroming door een buis in de dam op gang te houden. Onderweg drijft die stroming een turbine aan die is gekoppeld aan bijvoorbeeld een generator waarmee elektriciteit kan worden opgewekt. Het principe hiervan is geschetst in figuur 10.5. Het verval Δh over de dam waar we in de lokale beschouwing vanuit gaan, wordt bepaald door de waterstand aan de benedenstroomse kant van de dam (figuur a) of door de hoogteligging van de uitstroomopening (figuur b), net welke de hoogste is.

Ter wille van de eenvoud gaan we niet in op de geometrie van het systeem van leidingen in de dam waarmee water langs de turbine wordt geleid. Dat is ook niet nodig om in algemene zin een energiebalans op te stellen voor de lokale beschouwing die we voor ogen hebben. In termen van energiehoogte (zie paragraaf 3.3) luidt die balans

$$\Delta h = \Delta h_{\mathrm{v}} + \Delta h_{\mathrm{t}} \tag{10.17}$$

waarin Δh_{v} verwijst naar alle verliezen die optreden in dat systeem van leidingen (instroomverlies, wandwrijving, uitstroomverlies et cetera) en Δh_{t} gaat over de energie die door de turbine aan de stroming wordt onttrokken. Bovendien is verondersteld dat de stroomsnelheid net bovenstrooms van de dam zeer gering is. Indien $\Delta h \gg h$, is dat redelijk. Zo niet, dan moet aan het linker lid van bovenstaande balans de energiehoogte $u_m^2/(2g)$, met u_m de stroomsnelheid net bovenstrooms van de dam, worden toegevoegd.

De beide termen in het rechter lid van de balans zijn afhankelijk van het debiet door het systeem van leidingen in de dam. In het geval van een stationaire situatie is dat debiet gelijk aan de afvoer Q van de rivier. Het verband kunnen we schrijven als

$$\Delta h_{\mathrm{v}} = \xi_v \frac{u_b^2}{2g} \quad ; \quad \Delta h_{\mathrm{t}} = \xi_t \frac{u_b^2}{2g} \quad ; \quad u_b = \frac{Q}{A_t} \tag{10.18}$$

waarin u_b een karakteristieke snelheid voor de stroming in de leidingen en langs de turbine en zijn ξ_v en ξ_t verliescoëfficiënten in de relatie tussen Δh_{v} en Δh_{t} enerzijds en de karakteristieke snelheidshoogte $u_b^2/(2g)$ anderzijds. Voorts is A_t een karakteristieke maat voor het oppervlak van de doorsnede van de leidingen in de dam[90].

De coëfficiënt ξ_t zoals die in (10.18) wordt gebruikt om de energie Δh_{t} die de turbine aan de stroming onttrekt te relateren aan de stroomsnelheid u_b, kan variëren met die stroomsnelheid. Dat is afhankelijk van de toegepaste turbine. Dit laten we echter buiten beschouwing en gaan uit van een constante ξ_t.

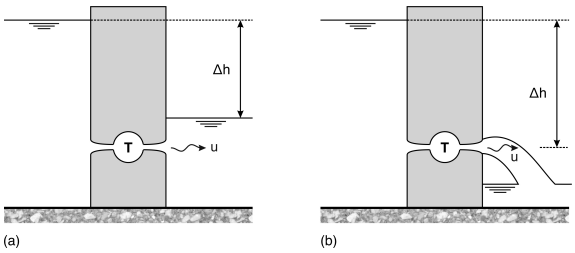
Het vermogen P_t dat de turbine aan de stroming onttrekt, wordt gegeven door

$$P_t = \rho g Q \Delta h_{\mathrm{t}} = \rho g Q \left(\Delta h - \xi_v \frac{u_b^2}{2g} \right) \tag{10.19}$$

Voor het debiet Q door de dam zijn we afhankelijk van wat de rivier biedt. Dat debiet ligt dus vast. Het verval Δh, daarentegen, is tot op zekere hoogte een ontwerpparameter die we kunnen variëren. Uit bovenstaande uitdrukking blijkt dat het vermogen P_t toeneemt met dit verval en dat nodigt uit om ter wille van een zo groot mogelijk vermogen, te mikken op een zo hoog mogelijke dam. Daar staat tegenover dat de kosten van een dam ook toenemen met de hoogte. Daarnaast brengt de natuurlijke vorm van het rivierdal dat plaats moet bieden aan het stuwmeer, een beperking met zich mee. In principe kan die kunstmatig worden aangepast, maar daardoor nemen de kosten van extra hoogte van de dam nog sterker toe. Uiteindelijk komt dit neer op een economische afweging van kosten voor realisatie en onderhoud enerzijds en opbrengst uit verkoop van energie anderzijds.

Daarnaast spelen overwegingen ten aanzien van het milieu een rol van betekenis. De energie die met een stuwdam wordt geproduceerd, is schoon in de zin dat

[90] De introductie van deze karakteristieke grootheden u_b, ξ_v, ξ_t en A_t komt eigenlijk neer op schematisatie van het systeem van leidingen in de dam tot een prismatische buis waarvan de dwarsdoorsnede een oppervlak A_t heeft.



Figuur 10.5: Principe van een stuwdam. Het verval Δh drijft een stroming door een buis in de dam aan. In die buis bevindt zich een turbine T waarmee energie aan de stroming wordt onttrokken.

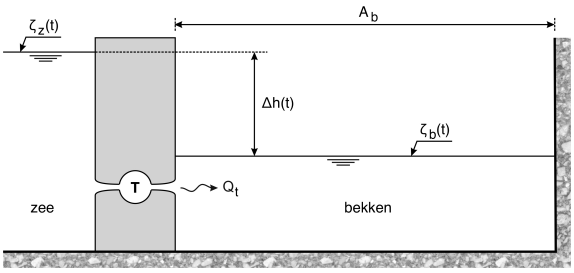
het geen uitstoot van broeikasgassen met zich meebrengt en er uiteindelijk meer energie mee wordt geleverd dan nodig is voor aanleg, onderhoud en buiten dienst stelling aan het einde van de levensduur. Daar staat tegenover dat de ecologische en sociaal–economische systemen in en rond het rivierdal waar zich een stuwmeer vormt, ingrijpend worden aangetast. Ondanks het groene karakter is waterkracht dus niet zonder effecten op milieu en maatschappij.

Bij het ontwerp van de stuwdam speelt tevens het beheer van de kwaliteit van het water in het stuwmeer een rol van betekenis. Vanwege de geringe stroomsnelheid in het stuwmeer wordt sediment dat van bovenstrooms wordt aangevoerd grotendeels in dit meer afgezet. Op lange termijn kan dat leiden tot verondieping. Op veel kortere termijn speelt het beheer van de waterkwaliteit in het meer. Met name in het relatief diepe deel kan de waterkwaliteit door gebrek aan verversing en doordringing van zonlicht sterk achteruit gaan. Uiteindelijk heeft dat een weerslag op de waterkwaliteit in het gehele meer. Gebruikelijk wordt dat gemitigeerd door afwisselend op verschillende hoogtes water vanuit het meer naar de turbines te voeren. Het systeem van inlaatpunten en leidingen dat daarvoor nodig is, draagt niet vanzelfsprekend bij aan minimalisatie van energieverliezen. Zo bezien is het ontwerp van het complex van stuwmeer en stuwdam ook een afweging tussen belangen van soms wezenlijk onvergelijkbare aard. In de waterbouwkunde is dat een terugkerende uitdaging.

10.3.3 Getijdencentrale

Een andere vorm van waterkracht gaat uit van het getij. Door de stroming die daarbij hoort te gebruiken om een molen of turbine aan te drijven, kan elektrische energie worden gegenereerd. Bij voorkeur op plaatsen waar de stroming relatief sterk is, wordt dit principe wel toegepast met in het water geplaatste molens. Deze toepassing is vergelijkbaar met windmolens op land.

Een andere manier om energie uit getij te winnen is gebaseerd op eb en vloed in een bekken dat in open verbinding met de zee staat. Bij vloed wordt het bekken gevuld en bij eb loopt het weer leeg. Door de monding van het bekken kunstmatig te vernauwen met een dam met daarin een kleine opening, wordt de stroming bij het vullen en ledigen sterk geconcentreerd. Door die stroming langs een turbine te leiden die aan een generator is gekoppeld, kan elektriciteit worden geleverd. In deze vorm spreekt men van een getijdencentrale. Het is vergelijkbaar met een stuwdam,



Figuur 10.6: Schematische langsdoorsnede van een getijdencentrale met links in de figuur de zee, rechts het bekken en daar tussenin de dam met turbines. .

zij het dat de stroming daarbij altijd dezelfde kant op is, terwijl de stroomrichting bij een getijdencentrale steeds wisselt, afhankelijk van het getij.

Een ander belangrijk verschil met een stuwdam, is dat het lange-termijn gemiddelde debiet door zo'n dam vast ligt, terwijl het bij een getijdencentrale tot op zekere hoogte instelbaar is. Bij vloed, bijvoorbeeld, wordt het bekken vanuit zee gevuld. De waterstand op zee is dan hoger dan die in het bekken. Er is dan een verval over de dam dat een stroming door de opening in de dam aandrijft. De omvang van die stroming bepaalt hoe snel de waterstand in het bekken variëert. Hoe groter het debiet door de dam, hoe sneller de waterstand in het bekken verandert. Tegelijkertijd geldt echter dat naarmate de waterstand in het bekken sneller verandert, het verval over de dam kleiner wordt en het is juist dat verval dat de stroming door de dam aandrijft. Bij eb doet zich hetzelfde voor, zij het met een stroming van bekken naar zee.

Kennelijk is er een verband tussen het debiet door de dam en het verval erover waarbij de een toeneemt als de ander afneemt en omgekeerd. Het vermogen dat door een getijdencentrale kan worden geleverd, is echter evenredig met het product van debiet en verval. Dat suggereert dat er, voor wat betreft dat vermogen, een optimale combinatie van debiet en verval is.

Een indruk van die optimale combinatie ontlenen we aan een schematische voorstelling van een getijdencentrale. In figuur 10.6 is een doorsnede gegeven van de geschematiseerde dam en bekken. In de doorsnede van de dam is één leiding met turbine geschetst. Voor het oppervlak van de dwarsdoorsnede van deze leiding gaan we uit van een karakteristieke waarde A_t. Het debiet door de leiding en dus ook langs de turbine, noteren we met Q_t.

Ter wille van de eenvoud nemen we aan dat de keuze van de turbine vast ligt en daarmee ook de afmeting A_t van de leiding waar die in geplaatst is. Voor optimalisatie van het vermogen dat door de centrale wordt geleverd, kan met het aantal turbines worden gevariëerd. Als de centrale bestaat uit n parallel geplaatste turbines, dan is het totale debiet door de dam gelijk aan $Q = nQ_t$.

Het verband tussen het vermogen dat de centrale levert en het aantal turbines brengen we in twee stappen in kaart. De eerste stap gaat over de relatie tussen het aantal turbines en het verval over de dam. Die relatie gebruiken we in de tweede stap om het vermogen te schrijven als een functie van het aantal turbines om

vervolgens na te gaan welk aantal tot de grootste energie–opbrengst leidt.

Voor de eerste stap gaan we uit van een bekken waarin de waterspiegel steeds vlak en horizontaal is en waarbij de oevers de vorm hebben van verticale wanden zodat het horizontaal oppervlak niet afhankelijk is van de waterstand. Dit oppervlak wordt genoteerd met A_b.

De waterstand ζ_z op zee variëert met het getij. Gemakshalve simplificeren we dat tot een enkelvoudige harmonische component en schrijven

$$\zeta_z(t) = \hat{\zeta} \sin(\omega t) \tag{10.20}$$

waarin t de tijd is, ω de hoekfrequentie van het getij en $\hat{\zeta}$ is de amplitude van de getijgolf.

De waterstand ζ_b in het bekken verandert afhankelijk van het debiet nQ_t door de dam volgens

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_b}{\mathrm{d}t} = \frac{nQ_t}{A_b} \tag{10.21}$$

Bij vloed, als de stroming door de dam van zee naar het bekken is, stijgt de waterstand ζ_b. Daarbij is de waterstand op zee hoger is dan die in het bekken. Het debiet Q en het verval over de dam $\Delta h = \zeta_z - \zeta_b$ in deze situatie noemen we positief. Tijdens eb zijn nQ_t en Δh negatief.

Door combinatie van $\Delta h = \zeta_z - \zeta_b$ met (10.21) kunnen we de verandering van het verval over de dam relateren aan het totale debiet. Dat leidt tot

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta h)}{\mathrm{d}t} + \frac{nQ_t}{A_b} = \frac{\mathrm{d}\zeta_z}{\mathrm{d}t} \tag{10.22}$$

Deze uitdrukking is te lezen als een omschrijving van de invloed van het debiet nQ_t op het verval Δh afhankelijk van de geometrie A_b van het bekken. Daarnaast heeft het verval als aandrijvende kracht invloed op het debiet. Voor een individuele leiding met turbine geldt dat

$$\Delta h = (\xi_v + \xi_t) \frac{Q_t |Q_t|}{2gA_t^2} \tag{10.23}$$

waarin ξ_v en ξ_t coëfficiënten voor achtereenvolgens energieverliezen en de onttrekking van energie aan de stroming door de turbine[91]. Beide coëfficiënten zijn gekoppeld aan de karakteristieke snelheid $u_t = Q_t/A_t$ in de leiding.

[91] Impliciet veronderstellen we dat de energie die aan de stroming kan worden onttrokken evenredig is met $(Q_t/A_t)^2$, ofte wel het kwadraat van de stroomsnelheid bij de turbine. In wekelijkheid is de energie evenredig met de stroomsnelheid tot een macht in de buurt van 3/2. Uitgaan van een kwadraat is een benadering van de werkelijkheid. Daarvoor is in dit boek gekozen omdat het de berekening van de energie eenvoudiger maakt en het de bedoeling is om de essentie van die berekening helder te maken.

Hieruit valt af te leiden dat

$$Q_t = A_t \left(\frac{2g}{\xi_v + \xi_t} \right)^{1/2} \frac{\Delta h}{\sqrt{|\Delta h|}} \tag{10.24}$$

Invullen in (10.22) geeft

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta h)}{\mathrm{d}t} + n \frac{A_t}{A_b} \left(\frac{2g}{\xi_v + \xi_t} \right)^{1/2} \frac{\Delta h}{\sqrt{|\Delta h|}} = \frac{\mathrm{d}\zeta_z}{\mathrm{d}t} \tag{10.25}$$

Van deze differentiaalvergelijking zijn we alleen geïnteresseerd in de particuliere oplossing. Die geeft de respons op de forcering $\mathrm{d}\zeta_z/\mathrm{d}t$ door het getij. De oplossing van de homogene vergelijking is in dit geval de respons op een beginvoorwaarde die zich ooit heeft voorgedaan en na verloop van tijd uitdempt.

Vanwege het niet-lineaire karakter ligt een analytische oplossing van (10.25) niet voor de hand. Er is echter wel een analytische benadering mogelijk, gebaseerd op de veronderstelling dat het verval ook sinusvormig met de tijd verloopt, net als de waterstand op zee maar met een faseverschuiving θ en een eigen amplitude a:

$$\Delta h \approx a \sin(\omega t - \theta) \tag{10.26}$$

Bovendien benaderen we

$$\frac{\Delta h}{\sqrt{|\Delta h|}} \approx \sqrt{a} \sin(\omega t - \theta) \tag{10.27}$$

Met deze twee benaderingen is

$$\omega a \cos(\omega t - \theta) + n \frac{A_t}{A_b} \left(\frac{2g}{\xi_v + \xi_t} \right)^{1/2} \sqrt{a} \sin(\omega t - \theta) = \omega \hat{\zeta} \cos(\omega t) \tag{10.28}$$

Hierin zijn de amplitude a en de faseverschuiving θ de onbekenden en die kunnen worden opgelost uit de eis dat (10.28) moet gelden voor alle t. Hieruit volgt dat[92]

$$\cos\theta = \frac{a}{\hat{\zeta}} \quad ; \quad \sin\theta = -\frac{n\psi\sqrt{a}}{\omega\hat{\zeta}} \tag{10.29}$$

en[93]

$$a = \frac{1}{2} \left(-\frac{n^2\psi^2}{\omega^2} + \sqrt{\frac{n^4\psi^4}{\omega^4} + 4\hat{\zeta}^2} \right) \tag{10.30}$$

[92] Waarbij gebruik is gemaakt van

$$\cos(\omega t) = \cos(\omega t - \theta + \theta) = \cos(\omega t - \theta)\cos(\theta) - \sin(\omega t - \theta)\sin(\theta)$$

.

[93] Zoals volgt uit (10.28) met (10.29) evalueren voor $t = 0$.

en waarin

$$\psi = \frac{A_t}{A_b}\left(\frac{2g}{\xi_v + \xi_t}\right)^{1/2} \tag{10.31}$$

De faseverschuiving θ wordt vervolgens gevonden door a uit (10.30) in te vullen in (10.29):

$$\tan(\theta) = -\frac{n\psi}{\omega\sqrt{a}} \tag{10.32}$$

Omdat $\sin(\theta) < 0$ en $\cos(\theta) > 0$, ligt θ tussen $3\pi/2$ en 2π.

Met (10.28), (10.29), (10.30), (10.31) en (10.32) hebben we een benadering gevonden van de relatie tussen het verval Δh over de dam en het aantal parallelle leidingen met turbines (n). Daarmee is de eerste stap in de beschrijving van het verband tussen vermogen en aantal turbines afgerond. In de tweede stap koppelen we het gevonden verval Δh aan het vermogen P_t dat door een individuele turbine wordt geleverd. Het vermogen van de gehele centrale komt daarmee op nP_t.

Het netto vermogen dat een turbine levert, wordt gegeven door

$$P_t = \rho g |Q_t \Delta h_t| \tag{10.33}$$

waarin het gebruik van absolute waarde in de uitdrukking nodig is omdat zowel het debiet als het verval, afhankelijk van de fase van het getij, een positieve of negatieve waarde kunnen hebben, terwijl vermogen nul of positief. Voorts is Δh_t dat deel van het verval over de turbine dat ten goede komt aan het genereren van elektrische energie. Met de coëfficiënten ξ_v en ξ_t die in (10.23) zijn geïntroduceerd, kunnen we schrijven dat

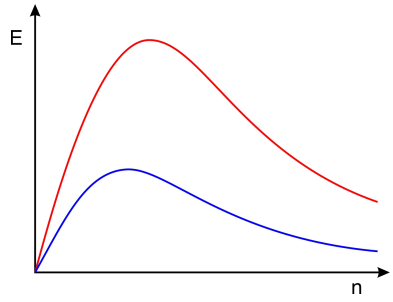
$$\Delta h_t = \xi_t \frac{Q_t|Q_t|}{2gA_t^2} = \frac{\xi_t}{\xi_v + \xi_t}\Delta h \tag{10.34}$$

Samen met (10.24) geeft dit

$$P_t = \rho g\sqrt{2g}A_t \frac{\xi_t}{(\xi_v + \xi_t)^{3/2}}|\Delta h|^{3/2} \tag{10.35}$$

Dit is het resultaat van de tweede stap van de optimalisatie. Omdat het verval in dit resultaat een functie is van de tijd, is het vermogen P_t dat ook. Integratie van dit vermogen over een getijcyclus is een maat voor de energie–opbrengst E van de getijdencentrale wat we willen optimaliseren door variatie van het aantal turbines. Die opbrengst per getijcyclus wordt gegeven door

$$E = \rho g\sqrt{2g}A_t \frac{\xi_t}{(\xi_v + \xi_t)^{3/2}} n \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} |\Delta h(t)|^{3/2} \mathrm{d}t \tag{10.36}$$



Figuur 10.7: Aard van het verband tussen de energie–opbrengst E per getijcyclus en het aantal n turbines in de dam die het bekken van de zee scheidt. De bovenste kromme in deze grafiek hoort bij een grotere getijslag dan de onderste.

en door bundeling van alle factoren in het rechter lid van deze uitdrukking die afhankelijk zijn van het aantal turbines n, komen we uit op

$$E \propto na^{3/2} \propto n \left(-\frac{n^2\psi^2}{\omega^2} + \sqrt{\frac{n^4\psi^4}{\omega^4} + 4\hat{\zeta}^2} \right)^{3/2} \tag{10.37}$$

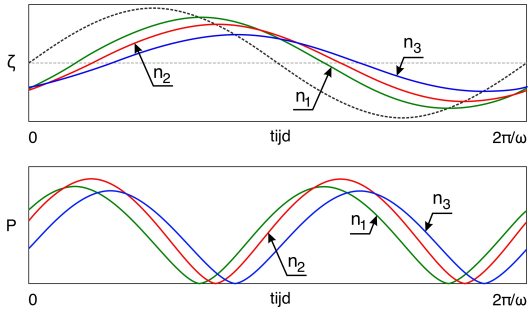
Bedenk hierbij dat we nog steeds veronderstellen dat de keuze van de turbines en de leidingen waarin die zijn geplaatst, vast liggen en dat we alleen kunnen variëren met het aantal turbines. Met andere woorden: we zijn op zoek naar de n waarvoor E een maximum bereikt. Het verband tussen E en n is kwalitatief weergegeven in figuur 10.7. Daaruit blijkt dat er inderdaad een optimum is, althans in de schematisatie en benadering die we hebben toegepast.

Eerder in deze paragraaf hebben we geredeneerd dat optimalisatie van de energie–opbrengst neerkomt op het afstemmen van debiet door en verval over de dam. Toename van de een gaat samen met afname van de ander, terwijl het product van beide een maat is voor de opbrengst. Dat is niet direct herkenbaar in uitdrukking (10.37) vanwege de toegepaste integratie over het getij. Inzicht in wat zich in een getijcyclus afspeelt, kunnen we krijgen door te kijken naar hoe het totale vermogen $P(t) = nP_t(t)$ afhangt van het aantal turbines n.

Voor drie waarden van n is dat geschetst in figuur 10.8. De bovenste grafiek in deze figuur geeft het verloop van de waterstand in het bekken en de onderste het verloop van het geleverde vermogen, beide als functie van de tijd. De drie beschouwde waarden van het aantal turbines zijn aangegeven met n_1, n_2 en n_3. De waarde n_2 komt overeen met het optimum waarnaar in figuur 10.7 is verwezen. Beide andere waarden van n horen bij een sub–optimale configuratie en er geldt dat $n_1 < n_2 < n_3$.

Een paar kanttekeningen bij een getijdencentrale:

- In de beschreven optimalisatie van de energie–opbrengst is alleen het aantal turbines n als onafhankelijke variabele of vrije ontwerpparameter genomen. We hebben aangenomen dat de keuze voor turbines en leidingen waarin die zijn geplaatst, zijn voorgeschreven. In werkelijkheid kan in het ontwerp van een getijdencentrale ook daarmee worden gevariëerd. Dat wil zeggen dat ook



Figuur 10.8: Vergelijking van het verloop van de waterstand in het bekken (bovenste grafiek; de gestippelde kromme gaat over $\zeta_z(t)$) en het geleverde vermogen P van een getijdencentrale (onderste grafiek), beide als functie van het aantal turbines (n). Voor de waarden van n waarnaar in de figuur wordt verwezen, geldt dat $n_1 < n_2 < n_3$. Binnen de context van de in de tekst genoemde aannames, wordt de maximale, getij–geïntegreerde energie–opbrengst gerealiseerd met n_2 turbines.

als het ontwerp van een getijdencentrale alleen zou gaan om optimalisatie van de energie–opbrengst, het complexer is dan in deze paragraaf omschreven. Het principe van de optimalisatie is echter wel juist en daarmee illustratief voor het ontwerp.

- De essentie van die illustratie schuilt in het effect van het aantal turbines n (en daarmee eigenlijk de omvang van de opening in de dam die het getijdenbekken van de zee scheidt) op zowel het debiet door de dam als het verval daarover. De energie–opbrengst is afhankelijk van het product van debiet en verval, maar die twee zijn niet onafhankelijk van elkaar. De stroomsnelheid in de opening in de dam neemt toe met het verval en het debiet neemt toe met zowel die stroomsnelheid als de omvang van de opening. Echter, naarmate die opening steeds groter wordt gekozen (en het debiet dus toeneemt), neemt het verval juist af omdat per eenheid van tijd steeds meer water wordt uitgewisseld tussen bekken en zee.

- Intuïtief zou de optimale energie–opbrengst moeten toenemen met de oppervlakte A_b van het getijdenbekken. Hoewel dat in deze paragraaf niet is uitgewerkt, volgt dat uit onze benadering van dat optimum. De geldigheid van die benadering is echter beperkt. Zonder volledigheid te pretenderen noemen we twee beperkingen.

  Een daarvan betreft de veronderstelling dat de waterspiegel in het getijdenbekken altijd vlak en horizontaal is. Zolang de horizontale afmetingen van het bekken klein zijn ten opzichte van de lengte van de getijgolf (gelijk aan $2\pi\sqrt{gh_b}/\omega$, met h_b de waterdiepte in het bekken), is dat een redelijke veronderstelling. In werkelijkheid is in het bekken echter ook sprake van een getijgolf. Bij een betrekkelijk groot bekken gaat de veronderstelling van een vlakke, horizontale waterspiegel zelfs niet bij benadering op. Daar toch vanuit gaan, leidt tot een overschatting van de energie–opbrengst.

  Een andere beperking gaat over de afmetingen van de monding van het getijdenbekken ten opzichte van het horizontaal oppervlak A_b. De optimale grootte van de opening in de dam neemt toe met A_b en dat moet wel passen in de ruimte die voor een dam beschikbaar is. Zo kan bij een bekken met een relatief kleine monding, het optimum buiten bereik liggen tenzij die mon-

ding kunstmatig wordt vergroot. Het is niet triviaal dat zoiets economisch interessant is.

- Het omgekeerde speelt ook. Een bekken met een relatief grote monding vereist een navenant grote dam om dat bekken af te sluiten. De kosten van aanleg van die dam moet uiteindelijk opwegen tegen de opbrengst van verkoop van gewonnen energie. Zo'n afweging geldt overigens bij elke getijdencentrale.

- In onze optimalisatie van de energie–opbrengst zijn we impliciet uitgegaan van continu genereren. Als we echter onderbrekingen in de leverantie van energie toelaten, kan de getij-geïntegreerde opbrengst verder worden vergroot. Zo kan de dam tijdelijk worden afgesloten op het moment van kentering van de waterstand in het bekken.

  Als voorbeeld kijken we naar het moment dat de waterstand in het bekken een maximum bereikt (en het verval over de dam dus een minimum). Op dat moment wordt de dam gesloten. Het gevolg daarvan is dat er geen stroming meer is door de dam en er dus ook geen elektrische energie wordt geproduceerd. Dat lijkt contraproductief, maar ondertussen daalt de waterstand op zee en neemt het verval over de dam toe. Na enige tijd kan de dam worden geopend en dan is het verval groter dan bij continu genereren en is ook het debiet groter omdat er minder tijd beschikbaar is om het bekken te ledigen. Op overeenkomstige manier kan vanaf het moment van laagwater in het bekken het vullen worden uitgesteld.

  Dit type ingreep leidt tot een toename van zowel het debiet als het verval en dus ook tot een toename van het netto vermogen. Dat toegenomen vermogen manifesteert zich echter niet over de gehele getijcyclus, maar over een beperkt deel daarvan als gevolg van de tijdelijke sluiting van de dam. Aangezien de energie–opbrengst E de integraal van het vermogen over de gehele cyclus is, is de meerwaarde (in termen van energie–opbrengst) afhankelijk van de duur van sluiting van de dam.

  Ook hierbij gaat het om optimalisatie. Reductie van het deel van de getijcyclus waarin de dam open is, leidt tot reductie van de uitwisseling van water tussen zee en bekken en dus tot een afname van het verschil tussen hoog- en laagwater in het bekken. Dat heeft een ongewenste weerslag op de productie van energie, maar die kan worden opgevangen door meer turbines in te zetten (cq. vergroting van de opening in de dam).

- Als onderbreking van de leverantie van energie toelaatbaar is, kan sluiting rond kentering van de waterstand in het bekken ook worden gebruikt om de turbines in te zetten als pompen. Zo kan rond hoogwater in het bekken extra water vanuit zee het bekken in gepompt worden om daarmee het verval over de dam te vergroten. De energie die nodig is om bij hoogwater op zee water het bekken in te pompen, is minder dan de energie die kan worden gewonnen door dat zelfde water bij een lagere waterstand op zee uit het bekken te laten stromen.

Bij laagwater in het bekken kan een overeenkomstige ingreep worden gepleegd. Zeker bij een grote getijslag is dat echter niet per definitie aantrekkelijk omdat het horizontaal oppervlak van het bekken bij laagwater doorgaans kleiner is dan dat bij hoogwater.

- Een punt van aandacht bij energie uit getij en zeker bij ingrepen waarbij leverantie tijdelijk wordt onderbroken om de opbrengst per getijcyclus te vergroten, is dat het vermogen dat een getijdencentrale levert, fluctueert met de tijd op een manier die niet noodzakelijk in overeenstemming is met fluctuaties in vraag naar energie. Dat houdt rechtstreeks verband met de dominante frequentie van het getij. Zeker op regionale schaal kan energie uit getij daarom nooit als enige bron volstaan, maar zijn altijd alternatieve bronnen en/of opslag van energie nodig om continu in de vraag te kunnen voorzien[94]. Anderzijds is het voordeel dat de tijdsafhankelijke variatie in productie heel goed is te voorspellen. Dat geldt immers ook voor het astronomisch getij. Leveranciers van energie kunnen daarop anticiperen en het bij– of afschakelen van alternatieve bronnen reguleren al naar gelang de (verwachte) behoefte.
- Een veel genoemd argument ten gunste van het winnen van energie uit getij, is dat het niet gepaard gaat met de uitstoot van broeikasgassen. Daarmee is echter niet gezegd dat deze energiebron vrij is van effecten op het milieu. Het winnen van energie uit getij gaat altijd samen met beïnvloeding van de getijbeweging. Als voor dit doel een bekken deels wordt afgesloten, neemt de getijbeweging in dat bekken af en dat heeft consequenties voor de morfologie in dat bekken en daarmee ook voor het daar aanwezige ecosysteem.

10.3.4 Energie uit windgolven

In potentie zijn windgolven op zee ook een bron van energie met een veel geringere nadelige invloed op het milieu dan bijvoorbeeld fossiele brandstoffen. Dat is een belangrijke drijfveer achter de ontwikkeling van technieken om die energie te winnen. Deze technieken zijn gebaseerd op het onttrekken van een deel van de energie die wordt doorgegeven als golven zich voortplanten (de zogeheten energieflux, zie paragraaf 4.5.1). Net zoals windmolens energie onttrekken aan passerende lucht, zijn deze technieken erop gericht energie te onttrekken aan passerende golven.

Maar anders dan bij windmolens of turbines in een stuwdam of getijdencentrale, is er bij golven geen stroom van massa met een constante of slechts betrekkelijk langzaam variërende richting. De waterbeweging bij windgolven fluctueert in grootte en richting op een tijdschaal die overeenkomt met de golfperiode. Afhankelijk van de plaats op zee en de weersomstandigheden, is die periode van de orde 1 tot 10 seconden en dat is veel kleiner dan bijvoorbeeld een halve getijcyclus waar het

[94] In theorie is ook regulering van de vraag cq. beschikbaarheid een optie om vraag en aanbod op elkaar af te stemmen, maar dat is een politiek vraagstuk dat buiten het bestek van dit boek valt.

bij een getijdencentrale om gaat. Een turbine is daarom niet zo geschikt om op grote schaal energie uit windgolven te winnen en is er behoefte aan meer specifieke technieken.

Een belangrijke motivator voor de ontwikkeling van die technieken is de potentie van windgolven als bron van hernieuwbare energie. Om daar een beeld van te krijgen, kijken we naar golven met een hoogte H en een periode T. De bijbehorende energieflux F wordt gegeven door

$$F = \frac{1}{32\pi}\rho g^2 H^2 T \tag{10.38}$$

aangenomen dat het om *diep water* gaat.

Bij de winning van energie uit windgolven wordt een deel van deze flux onttrokken aan de zich voortplantende golven. Bedenk in dit verband dat de flux F de dimensie heeft van vermogen (energie per eenheid van tijd). Volgens bovenstaande uitdrukking is dat vermogen evenredig met het kwadraat van de golfhoogte en ook evenredig met de periode. Het loont zodoende om energie uit windgolven te winnen op locaties met een grote golfhoogte en periode en in de afweging tussen hoogte en periode is de hoogte vaak doorslaggevend omdat F evenredig is met het kwadraat daarvan.

In de technieken om energie te onttrekken aan zich voortplantende golven kan op hoofdlijnen onderscheid gemaakt worden tussen twee varianten. In één daarvan wordt primair gebruik gemaakt van drukvariaties die zich voordoen onder passerende golven en bij de andere van de op- en neergaande beweging van het wateroppervlak. Een vernuftig voorbeeld van die laatste is de *Pelamis wave energy converter* (Henderson, 2006). Voor meer voorbeelden en innovaties wordt verwezen naar de literatuur en Internet.

Appendices

A

Tijdreeksanalyse

A.1 Inleiding

In de waterbouwkunde hebben we vaak te maken met tijdsafhankelijke (natuurlijke) processen. Denk bijvoorbeeld aan de hydraulische belasting op een waterkerende constructie waarbij de grootte van die belasting afhankelijk is van een waterstand die met de tijd varieert (zo'n situatie is geschetst in paragraaf 9.2.2). Om te kunnen vaststellen welke waterstand tot een maatgevende belasting leidt, is inzicht nodig in de structuur van de tijdsafhankelijke variaties in de waterstand. Daarbij kan het onder meer gaan om mogelijke extremen in die belasting in kaart te brengen, maar bijvoorbeeld ook om herhaling in verband met vermoeiing, of de mate waarin specifieke frequenties in de belasting zijn vertegenwoordigd en aanleiding kunnen zijn voor resonantie.

Er zijn diverse wiskundige methoden om de structuur van een tijdsafhankelijk proces in beeld te brengen en afhankelijk van welk kenmerk we boven water willen krijgen, zijn sommige methoden meer geschikt dan andere. Daarnaast speelt ook het karakter van het betreffende proces een rol. Op hoofdlijnen kunnen we onderscheid maken tussen deterministische en stochastische processen. Het astronomisch getij is een voorbeeld van een deterministisch proces omdat periode, amplitude en fase van de samenstellende harmonische componenten bekend zijn[95]. Wind–geïnduceerde variaties in waterstand, daarentegen, zijn juist stochastisch van aard. Je zou kunnen zeggen dat deterministische processen exact voorspelbaar zijn. Bij stochastische processen is dat niet het geval omdat toeval (of liever: onvoorspelbaarheid) daarin een factor van betekenis is. Dat laat echter onverlet dat het karakter van zo'n proces in generieke termen gevat kan worden.

[95] Dit gaat uitsluitend over de getijcomponenten die direct gekoppeld zijn aan planetaire bewegingen en dus niet over hogere harmonischen zoals M_4 en M_6 die het gevolg zijn van niet–lineaire interacties in de waterbeweging. Op zeer lange termijn zijn die planetaire bewegingen overigens ook niet met zekerheid te voorspellen. Dat valt echter buiten het bestek van waterbouwkundige toepassingen.

In dit hoofdstuk richten we ons op twee methoden voor de analyse van tijdreeksen die voortkomen uit stochastische processen. Een daarvan is de Fourier analyse. Dit is een veelgebruikt instrument om periodieke componenten in de reeks te identificeren en wordt toegepast om integrale kenmerken van het proces te beschrijven. In de waterbouwkunde wordt deze methode onder meer toegepast bij de beschrijving van windgolven net getij. Daarnaast kijken we naar een methode om het gedrag van extremen te beschrijven die zich in zo'n stochastisch proces voordoen en deze te extrapoleren naar zeldzame gebeurtenissen. Dit laatste is onder meer relevant voor het vaststellen van ontwerpcondities voor waterbouwkundige constructies.

Bij beide methoden gaan we ervan uit dat de tijdreeks die we willen analyseren, gerelateerd is aan een zogeheten stationair Gaussisch proces (ook al is toepassing van Fourieranalyse zeker niet beperkt tot zulke processen). In de volgende paragraaf geven we een beeld van dit type proces en daarna gaan we in op de twee methoden om tijdreeksen te analyseren die uit zo'n proces voortkomen.

Tot slot van deze appendix gaan we in op een methode om tijdreeksen te analyseren die voortkomen uit een deterministisch proces waarvan de structuur op voorhand bekend is of bekend wordt verondersteld. Daarbij gaat het vaak om het schatten van de parameters die voorkomen in een mathematisch model van dat proces. Getijanalyse is daar een voorbeeld van.

A.2 Iets over Gaussische processen

Er zijn talloze voorbeelden van Gaussische processen of processen die bij goede benadering als zodanig kunnen worden opgevat. De meeste van die voorbeelden zijn te vinden in vakgebieden als economie, psychologie, biologie, natuurkunde, computertechniek en een enkele keer in de waterbouwkunde. Kenmerk van deze processen is dat de uitkomst op een willekeurig tijdstip een normaal verdeelde stochastische variabele is[96]. Sterker nog, de verzameling van uitkomsten op een aantal willekeurige tijdstippen volgt een multivariate normale verdeling. Zo'n verdeling wordt ook meerdimensionale normale verdeling genoemd en wordt volledig bepaald door gemiddelden en covarianties. De gezamenlijke kansdichtheid f_N bij deze verdeling wordt gegeven door

$$f_n(\vec{\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \left|\mathbf{C}\right|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\vec{\gamma}-\vec{\mu}\right)^T \mathbf{C}^{-1}\left(\vec{\gamma}-\vec{\mu}\right)\right) \tag{A.1}$$

waarin n het aantal uitkomsten in de verzameling is (ook wel het aantal dimensies genoemd) en superscript T staat voor getransponeerd. Voorts is $\vec{\gamma}$ een vector met de n uitkomsten. Element γ_i van deze vector is de uitkomst van het proces op tijdstip $t = t_i$ (t staat voor tijd en i=1..n). Vector $\vec{\mu}$ bevat de bijbehorende

[96] De normale verdeling staat ook bekend als de Gauss verdeling, genoemd naar de Duitse wis- en natuurkundige Carl Friedrich Gauss (1777-1855). In navolging daarvan worden stochastische processen waarvan de uitkomsten normaal verdeeld zijn, aangeduid als Gaussische processen.

gemiddelden en $\mathbf{C}$ is de covariantiematrix ($|\mathbf{C}|$ is de determinant van deze $n \times n$ matrix). Het element $c_{i,j}$ op rij i en kolom j van deze matrix is de covariantie van de uitkomsten van het proces op tijdstippen t_i en t_j $(i, j = 1 \ldots n)$ Bedenk dat het argument van de exponent in bovenstaande uitdrukking een scalar is.

In de analyse van tijdreeksen die we in dit hoofdstuk voor ogen hebben, gaat de belangstelling uitsluitend uit naar fluctuaties rond het gemiddelde. Het gemiddelde zelf is daarin niet van belang. Ter wille van de eenvoud concentreren we ons daarom liever op de lineair getransformeerde variabelen $y = \gamma - \mu$ waarvan het gemiddelde per definitie gelijk is aan nul. Met deze transformatie, die ook mogelijk is als μ op een vooraf bekende manier met de tijd varieert, kunnen we voor (A.1) schrijven dat

$$f_n(\vec{y}\prime) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \, |\mathbf{C}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{y}\prime^T \mathbf{C}^{-1} \vec{y}\prime\right) \tag{A.2}$$

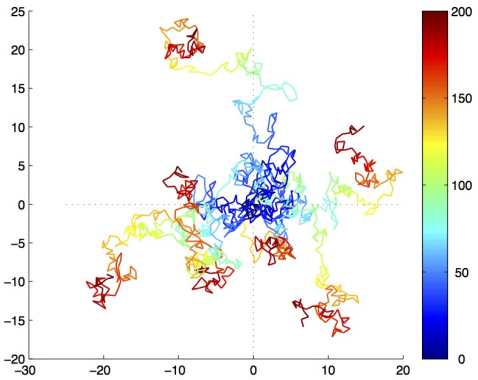
en wordt het proces blijkbaar volledig gekarakteriseerd door de covarianties. Dat zijn immers de enige parameters die in de dichtheidsfunctie voorkomen.

Een uitgebreid bestudeerd voorbeeld van een Gaussisch proces is de onregelmatige verplaatsing van een passief deeltje in een vloeistof onder invloed van de zogeheten Brownse beweging. Dat is de willekeurige beweging van moleculen in een vloeistof of gas die onder meer ten grondslag ligt aan diffusie. Dit verschijnsel is begin 19$^{\text{e}}$ eeuw ontdekt door de Schotse botanicus Robert Brown (1773-1858) en naar hem vernoemd.

Als een deeltje in een ogenschijnlijk stilstaande vloeistof wordt losgelaten, zal deze door de Brownse beweging van moleculen doorlopend worden verplaatst. Het pad dat zo'n deeltje doorloopt, vertoont sterke gelijkenis met de zogeheten *random walk*, waarbij achtereenvolgende stappen steeds in een willekeurige richting worden gezet. Voorbeelden van zulke wandelingen in het platte vlak zijn te vinden in figuur A.1. Elk van de zeven wandelingen in deze figuur bestaat uit 200 stappen met lengte 1. De richting waarin een stap wordt gezet is steeds een trekking uit een uniforme verdeling op het interval $[0, 2\pi]$. Achtereenvolgende trekkingen zijn onderling onafhankelijk.

De kleuren in figuur A.1 zijn een maat voor het verloop van de tijd. Blauw geeft het begin van de wandeling aan en rood het einde. Uit de kleuren valt af te leiden dat wandelaars gemiddeld genomen met het toenemen van de tijd steeds verder verwijderd raken van hun gezamenlijke vertrekpunt $(0, 0)$. Daarnaast zien we dat naarmate de tijd vordert er tussen de wandelaars ook steeds grotere verschillen ontstaan in de netto afgelegde weg (dat is de afstand tot het vertrekpunt, gemeten langs een rechte lijn). De rode uiteinden van de paden liggen immers meer gespreid rond het vertrekpunt dan de lichtblauwe middens. Dit is karakteristiek voor de *random walk*.

In het navolgende kijken we naar de horizontale component van de netto afgelegde weg. In figuur A.1 kunnen we deze component aflezen langs de horizontale as. De keuze voor deze component is willekeurig; het had ook de verticale mogen zijn of nog een andere. De reden om naar een specifieke component te kijken is



Figuur A.1: Voorbeeld van 7 *random walks* die beginnen in punt (0,0) en bestaan uit 200 stappen met lengte 1 in een steeds willekeurige richting.

dat daaraan een teken kan worden toegekend. Met de keuze voor de horizontale component is naar links negatief en naar rechts positief. De in horizontale richting netto afgelegde weg na m stappen noteren we als $y(t_m)$, waarbij t_m de tijd aangeeft die nodig is geweest om die m stappen te zetten. We gaan ervan uit dat elke stap evenveel tijd kost.

Als elke stap een lengte 1 heeft, geldt voor deze horizontale component dat

$$y(t_m) = \sum_{k=1}^{m} \cos\theta_k \tag{A.3}$$

waarin, zoals eerder vermeld, de θ_k de richtingen zijn waarin stappen worden gezet. Deze zijn onderling onafhankelijke trekkingen uit een uniforme verdeling op het interval $[0, 2\pi]$. Alle $\cos\theta_k$ in bovenstaande sommatie zijn zodoende op te vatten als onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen. Volgens de Centrale Limietstelling nadert de som van een groot aantal van zulke variabelen tot een normaal verdeelde variabele. Dat wil in dit geval zeggen dat $y(t_m)$ bij benadering normaal verdeeld is. De reeks $y(t_m)$ met $m = 1, 2, \ldots$ is hiermee op te vatten als een Gaussisch proces[97]. Projecties van de paden die in figuur A.1 zijn getekend op de horizontale as, zijn realisaties van dit proces.

Omdat er geen voorkeur is voor de richting waarin een stap wordt gezet, is het gemiddelde van $y(t_m)$ voor elke m gelijk aan nul. Het proces wordt zodoende volledig bepaald door de covarianties $c_{k,j}$ van de uitkomsten $y(t_k)$ en $y(t_j)$.

De verzameling van uitkomsten $y(t_m)$ van dit proces voor $m = 1 \ldots n$ (met $n = 200$ in het voorbeeld van figuur A.1) volgt een n–dimensionale normale verdeling waarvan de dichtheidsfunctie is gegeven in (A.2). De vector y in deze uitdrukking

[97] We gaan er gemakshalve aan voorbij dat $y(t_m)$ voor kleine m zelfs niet bij benadering normaal verdeeld is. Voor het beknopte beeld van Gaussische processen dat we in dit hoofdstuk willen geven, maakt dat niet uit.

is de bundeling van de uitkomsten $y(t_m)$, gedefinieerd als

$$\vec{y} = (y(t_1), y(t_2), \ldots, y(t_N))^T \tag{A.4}$$

De covariantiematrix $\mathbf{C}$ in (A.2) bevat de covarianties $c_{k,j} = \mathrm{cov}(y(t_k), y(t_j))$. Op de hoofddiagonaal van deze matrix staan de varianties van $y(t_k)$. Op de eerste nevendiagonalen (dat zijn de diagonalen juist links en rechts van de hoofddiagonaal) staan de covarianties van de uitkomsten die precies één stap in de wandeling uit elkaar liggen. Bij de tweede nevendiagonalen gaat het om uitkomsten die twee stappen uit elkaar liggen, et cetera. In het algemeen geldt dat als elke stap in de wandeling een duur Δt in beslag neemt, we voor de covariantie $c_{k,j}$ kunnen schrijven dat

$$c_{k,j} = \mathrm{cov}\left(y(t_k), y(t_j)\right) = \mathrm{cov}\left(y(t_k), y(t_k + p\Delta t)\right) \quad ; \quad p = j - k \tag{A.5}$$

waarin p het aantal stappen is dat $y(t_k)$ en $y(t_{k+p\Delta t})$ uit elkaar liggen. Met deze schrijfwijze geven we aan dat covarianties van twee uitkomsten van het proces functies zijn van de tijd (weergegeven met de index i) en van het tijdsinterval tussen de twee uitkomsten (aangegeven met p). In termen van de covariantiematrix $\mathbf{C}$ is p een index die verwijst naar een diagonaal van die matrix. Voor de hoofddiagonaal is $p = 0$. Indices van nevendiagonalen rechts daarvan zijn achtereenvolgens $1, 2, \ldots, n-1$ en voor nevendiagonalen links zijn de indices $-1, -2, \ldots, -(n-1)$. De diagonalen met $p = \pm(n-1)$ zijn de hoekpunten rechts boven en links onder van $\mathbf{C}$ en bestaan elk uit één element.

In het voorbeeld van de random walk worden de covarianties met $k = 0$ met toenemende tijd (dus met toenemende j) steeds groter. De reden daarvoor is dat de wandelaars zowel naar links als naar rechts (in figuur A.1) gemiddeld steeds verder van hun vertrekpunt verwijderd raken. Processen waarbij covarianties van de tijd afhangen, worden instationair genoemd.

In een stationair proces zijn de covarianties uitsluitend afhankelijk van het tijdsinterval $p\Delta t$ en niet van de tijd t_k. Op elke diagonaal van $\mathbf{C}$ zijn de elementen in dat geval onderling gelijk. Als bovendien de covariantie afneemt met toenemende p, neemt de onderlinge afhankelijkheid van twee uitkomsten van het proces af met de tijd die ertussen ligt. Dit houdt onder meer in dat separate fragmenten van een grote realisatie van het betreffende proces kunnen worden gezien als onderling onafhankelijke, kleinere realisaties. Die realisaties zijn op een eindig tijdsinterval gedefinieerd en bevatten desondanks nagenoeg alle eigenschappen van het onderliggende proces. Die eigenschappen liggen immers volledig besloten in de covarianties en vanwege de afname daarvan met p zijn bij voldoende duur van de realisatie alle dominante covarianties daarin te vinden. Met andere woorden: een eindige realisatie, mits van voldoende duur, is representatief voor het volledige stationaire proces indien

$$\lim_{p\Delta t \to \infty} \mathrm{cov}\left(y(t_k), y(t_k + p\Delta t)\right) = 0 \tag{A.6}$$

Een voorbeeld uit de waterbouwkunde van een proces met deze eigenschap is de lokale, tijdsafhankelijke uitwijking van het wateroppervlak bij windgolven. Enigs-

zins gesimplificeerd kunnen we een natuurlijk, wind–geïnduceerd golfveld zien als een lineaire combinatie van sinusvormige componenten, elk met een eigen frequentie, amplitude en fase. Daarmee kunnen we de tijdsafhankelijk uitwijking $\eta(t)$ van de waterstand ten opzichte van de tijdsgemiddelde waterstand op één of andere locatie schrijven als

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \tag{A.7}$$

waarin α de amplitude is, ω de frequentie en ϕ de fase.

Bij een langdurig aanhoudende, constante wind zal uiteindelijk een stationair en uniform golfbeeld ontstaan, waarbij toevoer van energie vanuit de wind in balans is met dissipatie. In dat geval zijn amplitudes en frequenties van de golven onafhankelijk van plaats en tijd. Als we uit een registratie van golven op één of andere locatie in het golfveld een histogram van amplitudes zouden afleiden, zou dat hetzelfde beeld opleveren als bij een registratie afkomstig van een andere locatie. Dat geldt ook voor frequenties en voor de combinatie van amplitudes en frequenties. Voor de fases is dat echter niet het geval. Er is geen relatie tussen amplitude en frequentie enerzijds en fase anderzijds. Tegen deze achtergrond zien we de fases als onderling onafhankelijke stochastische variabelen en we veronderstellen dat ze uniform verdeeld zijn over het interval $[0, 2\pi]$. Deze aanpak staat in de literatuur bekend als het *random phase* model. We laten zien dat dit model een voorbeeld is van een stationair Gaussisch proces waarbij de covarianties van uitkomsten op twee verschillende tijdstippen afnemen met de duur tussen die tijdstippen. In de volgende paragraaf bewandelen we de omgekeerde weg en schetsen een methode om een (vermeend) stationair Gaussisch proces te beschrijven in een vorm als (A.7).

Omdat elke ϕ_k een stochastische variabele is, is elke term in de sommatie in (A.7) dat ook. In het voorbeeld van de random walk hadden we ook te maken met een som van stochastische variabelen (zie (A.3)). Daarop hebben we de Centrale Limietstelling toegepast en gesteld dat de som bij benadering normaal verdeeld is. Strikt genomen is dat hier niet mogelijk omdat de termen in de sommatie in (A.7) niet identiek verdeeld zijn. Amplitude en frequentie verschillen immers per term. Echter, omdat de sommatie niet door één of enkele termen wordt overheerst, kan de stelling wel in ruimere zin worden toegepast. In het algemeen geldt dat de som van onafhankelijke en vrijwel identiek verdeelde stochastische variabelen ook nadert tot een normaal verdeelde variabele, zij het met zwakkere convergentie. Dat wil zeggen dat voor een zelfde mate van benadering steeds meer termen in de sommatie moeten worden betrokken naarmate de verschillen in de verdeling van individuele termen toenemen. Op grond hiervan kunnen we toch stellen dat de uitwijking η op een willekeurig tijdstip bij redelijke benadering normaal verdeeld is en dat we te maken hebben met een Gaussisch proces.

Dit proces is bovendien stationair omdat de covariantie van uitkomsten op twee verschillende tijdstippen slechts afhangt van de duur Δt die tussen deze uitkomsten is verstreken en niet van de tijd zelf. Omdat de tijdsgemiddelde uitwijking gelijk

is aan nul, volgt voor deze covariantie dat

$$\mathrm{cov}\left(\eta(t), \eta(t+\Delta t)\right) = \mathrm{E}\left\{\eta(t)\eta(t+\Delta t)\right\} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \cos(\omega_k \Delta t) \tag{A.8}$$

waarin E staat voor statistische verwachting[98]. Voor $\Delta t = 0$ zijn alle cos-termen in de sommatie in (A.8) in fase en vinden we met deze uitdrukking de variantie van de uitwijking η op een willekeurig tijdstip. Voor toenemende Δt raken de cos-termen in de sommatie uit fase. De argumenten $\omega_k \Delta t$ (althans hun rest na deling door 2π) raken steeds gelijkmatiger verdeeld over het interval $[0, 2\pi]$ en de bijbehorende $\cos(\omega_k \Delta t)$ over het interval $[-1; 1]$. De sommatie in (A.8) neigt in dat geval naar nul. Het *random phase* model voldoet daarmee aan (A.6). Een fragment van de tijdreeks die uit dit model voortkomt, bevat zodoende, mits van voldoende lange duur, vrijwel alle eigenschappen van het volledige proces. Dit gebruiken we bij de analyse van tijdreeksen met behulp van Fourierreeksen die in de volgende paragraaf uiteen wordt gezet. Daarbij wordt als het ware de omgekeerde weg bewandeld en de tijdsafhankelijke uitkomst van een Gaussisch proces geschreven als een lineaire combinatie van sinusvormige componenten.

A.3 Fourieranalyse

A.3.1 Inleiding

De Fourieranalyse is een veel gebruikte techniek om integrale karakteristieken in beeld te brengen van een stationair Gaussisch proces dat ofwel periodiek is, ofwel gedefinieerd op een eindig tijdsinterval. De essentie van deze aanpak is dat het proces wordt geschreven als een Fourierreeks. Dat is een lineaire combinatie van sinusvormige componenten. De frequenties van deze componenten hangen uitsluitend af van de periode van het proces of de omvang van het tijdsinterval waarop het is gedefinieerd. De bijbehorende amplitudes zijn karakteristiek voor het betreffende proces. en vormen zodoende de basis voor wat we in beeld willen brengen.

In de navolgende drie paragrafen gaan we eerst in op de Fourierreeks. We gaan in op de relatie tussen de amplitudes van de (sinusvormige) Fouriercomponenten en het proces dat we met de reeks willen beschrijven. Daarna passen we dit toe om amplitudes te schatten uit een waargenomen tijdreeks. Interpretatie van de zo gevonden amplitudes komt tot slot aan de orde.

A.3.2 De Fourierreeks

In onze analyse van tijdreeksen concentreren we ons op stationaire Gaussische processen of processen die bij goede benadering als zodanig kunnen worden beschouwd. Zoals we in een voorgaande paragraaf hebben gezien, geldt voor zulke

[98] Het is een leuke oefening om te bewijzen dat (A.8) inderdaad klopt. Houd er in dat bewijs rekening mee dat de ϕ_i onderling onafhankelijke, uniform verdeelde stochastische variabelen zijn.

processen dat een eindige realisatie daarvan, mits van voldoende lange duur, vrijwel alle eigenschappen van dat proces in zich draagt. Die eigenschappen liggen besloten in de covarianties en die kunnen we achterhalen uit de verdeling van amplitudes over de frequenties die in het proces voorkomen (zie (A.8)). Om die amplitudes te vinden, schrijven we de realisatie $y(t)$ met duur T als een Fourierreeks. Dat gaat als volgt.

Elke functie $y(t)$ die is gedefinieerd op het eindige interval $0 \leq t \leq T$ (of periodiek is met periode T), kan worden geschreven in de vorm van een Fourierreeks

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\omega_k t} \tag{A.9}$$

waarin i de imaginaire eenheid is ($i^2 = -1$) en de A_k zijn complexe amplitudes. De frequenties ω_k zijn veelvouden van de basisfrequentie $\omega_1 = 2\pi/T$:

$$\omega_k = k\omega_1 = \frac{2k\pi}{T} \tag{A.10}$$

Als de functie periodiek is met periode T komen grotere periodes dan T dus niet voor. De frequentie ω_1 is daarmee de laagst mogelijke frequentie. Daarom spreken we van de basisfrequentie.

De $\exp(i\omega_k t)$ in (A.9) worden Fouriercomponenten genoemd. Ze vormen een complete set van onderling orthogonale functies, zoals dat in de wiskunde wordt genoemd. Dankzij deze eigenschap is de reeks in (A.9) identiek aan $y(t)$. De orthogonaliteit houdt voor deze reeks in dat het product van twee e-machten, geïntegreerd over de duur T, alleen ongelijk is aan nul indien ze elkaars complexe geconjugeerde zijn[99]. We kunnen dit schrijven als

$$\int_0^T e^{i\omega_k t} e^{i\omega_n t} \mathrm{d}t \begin{cases} = 0 & ; \quad n \neq -k \\ \neq 0 & ; \quad n = -k \end{cases} \tag{A.11}$$

(bedenk hoe dit overeenkomt met de orthogonaliteit van vectoren, bekend uit de lineaire algebra. Twee vectoren zijn orthogonaal (staan loodrecht op elkaar) als hun inproduct gelijk is aan nul. Dat inproduct is het equivalent van de integraal in bovenstaande uitdrukking).

Van deze eigenschap maken we gebruik om de amplitudes A_k te bepalen. Daartoe vermenigvuldigen we beide zijden van (A.9) met $\exp(i\omega_n t)$ en integreren we over de duur T. Dit levert

$$\int_0^T y(t) e^{i\omega_n t} \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \int_0^T e^{i\omega_k t} e^{i\omega_n t} \mathrm{d}t \tag{A.12}$$

[99] In het algemeen is orthogonaliteit gedefinieerd met inbegrip van een weegfunctie $w(t)$ in de integraal. Het linker lid van (A.11) heeft dan de vorm $\int_0^T w(t) e^{i\omega_k t} e^{i\omega_n t} \mathrm{d}t$. Bij een Fourierreeks is $w(t) = 1$.

Vanwege (A.11) is in de sommatie in het rechter lid van (A.12) alleen de term met $k = -n$ ongelijk aan nul. Met de definitie (A.10) van ω_n geldt voor de integraal in die term dat

$$\omega_{1-n} = -\omega_n \quad \rightarrow \quad \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{i\omega_{-n} t} \mathrm{d}t = \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_n t} \mathrm{d}t = \int_0^T \mathrm{d}t = T \tag{A.13}$$

waarmee (A.12) reduceert tot

$$A_{-n} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{i\omega_n t} \mathrm{d}t \tag{A.14}$$

en dat geldt voor alle n.

Omdat de amplitudes A complex zijn, bevatten ze tevens de fases behorend bij de termen in de reeks (A.9). Dit is in te zien met behulp van de gelijkheid

$$A_k = |A_k| \, e^{i\phi_k} \quad ; \quad \tan \phi_k = \frac{\mathrm{Im}\{A_k\}}{\mathrm{Re}\{A_k\}} \tag{A.15}$$

waarmee

$$A_k e^{i\omega_k t} = |A_k| \, e^{i(\omega_k t + \phi_k)} \tag{A.16}$$

Hierin is ϕ_k de fase behorend bij de k-de term in de sommatie in (A.9).

In bovenstaande beschouwing hebben we verondersteld dat y in (A.9) een complexe functie is van t. In veel waterbouwkundige toepassingen hebben we echter te maken met een reële functie y. Voor zulke functies geldt dat de amplitudes A_k en A_{-k} elkaars complexe geconjugeerde zijn. Immers, voor reële y volgt met (A.14) dat

$$A_k = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cos \omega_k t \mathrm{d}t - i \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \sin \omega_k t \mathrm{d}t \tag{A.17}$$

$$A_{-k} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cos \omega_k t \mathrm{d}t + i \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \sin \omega_k t \mathrm{d}t \tag{A.18}$$

Hiermee kunnen we de sommatie in het rechter lid van (A.9) herschrijven in termen van reële grootheden. Dat begint met

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\omega_k t} = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{-k} e^{-i\omega_k t} + A_k e^{i\omega_k t} \right) \tag{A.19}$$

Volgens (A.16) kunnen we voor de som van de termen k en $\breve{}k$ schrijven dat

$$\begin{aligned} A_{-k} e^{-i\omega_k t} + A_k e^{i\omega_k t} &= |A_k| \left(e^{-i\phi_k} e^{-i\omega_k t} + e^{i\phi_k} e^{i\omega_k t} \right) \\ &= 2 \, |A_k| \cos \left(\omega_k t + \phi_k \right) \end{aligned} \tag{A.20}$$

Bedenk hierbij dat $|A_k| = |A_{-k}|$ omdat beide amplitudes elkaars complexe geconjugeerde zijn. Als we vervolgens (A.19) en (A.20) combineren met (A.9), vinden we

$$y(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \cos(\omega_k t + \phi_k) \tag{A.21}$$

Voor het schatten van amplitudes $|A_k|$ en fasen ϕ_k is (A.21) doorgaans geen handig uitgangspunt. De reden daarvoor is dat de periodieke componenten in deze reeks, anders dan bij (A.9), niet per definitie orthogonaal zijn. Daaraan valt tegemoet te komen door de cosinus in bovenstaande uitdrukking te herschrijven. Dit leidt tot

$$y(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos\omega_k t + S_k \sin\omega_k t) \quad ; \quad \begin{cases} C_k = 2\,|A_k| \cos(-\phi_k) \\ S_k = 2\,|A_k| \sin(-\phi_k) \end{cases} \tag{A.22}$$

De cos en sin in deze sommatie zijn onderling wel orthogonaal. Op dezelfde manier als de complexe amplitudes A volgen uit (A.12)- (A.14) vinden we voor hun reële tegenhangers C en S dat

$$\begin{aligned} \int_0^T y(t)\cos\omega_n t\mathrm{d}t &= A_0 \int_0^T \cos\omega_n t \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T (C_k \cos\omega_k t \cos\omega_n t + S_k \sin\omega_k t \sin\omega_n t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{T}{2} C_n \end{aligned} \tag{A.23}$$

en

$$\begin{aligned} \int_0^T y(t)\sin\omega_n t\mathrm{d}t &= A_0 \int_0^T \sin\omega_n t \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T (C_k \cos\omega_k t \sin\omega_n t + S_k \sin\omega_k t \cos\omega_n t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{T}{2} S_n \end{aligned} \tag{A.24}$$

zodat

$$C_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos\omega_n t\mathrm{d}t \quad ; \quad S_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin\omega_n t\mathrm{d}t \tag{A.25}$$

en A_0 is het gemiddelde van y over de duur T. In de literatuur wordt in plaats van A_0 vaak een nulde term aan de Fourierreeks toegevoegd (n =0). Aangezien de bijbehorende frequentie gelijk is aan nul, is C_0 het gemiddelde van y en S_0 is altijd gelijk aan nul.

Hiermee sluiten we deze kennismaking met de Fourierreeks af. In de volgende paragraaf gaan we in op het schatten van de amplitudes A_k in het geval dat we de functie $y(t)$ niet volledig kennen, maar slechts beschikken over een tijdreeks van y.

A.3.3 Schatting van amplitudes

In het begin van dit hoofdstuk hebben we ons ten doel gesteld om de dominante kenmerken van een stationair Gaussisch proces te kwantificeren aan de hand van een tijdreeks die uit dat proces is voortgekomen. We hebben gezien dat die kenmerken besloten liggen in covarianties van uitkomsten van het proces op verschillende tijdstippen. Omdat de covariantie afneemt naarmate die tijdstippen verder uit elkaar liggen, bevat een eindige realisatie (mits van voldoende lange duur) vrijwel alle dominante kenmerken van het onderliggende proces. We kunnen zodoende volstaan met een analyse van een eindige realisatie.

Bij die analyse zien we de realisatie als een functie van de tijd die is gedefinieerd op een eindig interval, gelijk aan de duur T van die realisatie. Vervolgens schrijven we de realisatie in de vorm van een Fourierreeks. Volgens (A.8) zijn de covarianties van het onderliggende proces direct te herleiden uit de amplitudes behorend bij de termen uit deze reeks.

In veel praktisch relevante situaties hebben we te maken met een discrete tijdreeks in plaats van een continu. Dat wil zeggen dat de realisatie van het proces dat we willen bestuderen, bestaat uit een eindig aantal uitkomsten van dat proces op evenveel verschillende tijdstippen. Als gevolg daarvan kunnen we voor slechts een beperkt aantal termen in de Fourierreeks de amplitude en fase bepalen. Bij reële tijdreeksen zijn immers voor elke combinatie van amplitude en fase tenminste twee uitkomsten nodig en bij complexe reeksen is dat één uitkomst. We komen hier op terug nadat we hebben bekeken hoe we de amplitudes A (of A_0, C en S) uit een discrete tijdreeks kunnen schatten.

Stel dat we een proces $y(t)$ gedurende een periode met duur T bemonsteren met frequentie $(2M+1)/T$. Dat wil zeggen dat we om de $\Delta t = T/(2M+1)$ een uitkomst y registreren. Op die manier krijgen we een reeks opeenvolgende uitkomsten y_m (met $m = 1 \ldots 2M+1$) van het proces voor de tijdstippen $t_m = t_0 + (m-1)\Delta t$. De reeks y_m is een discrete tijdreeks.

Bij zo'n discrete tijdreeks benaderen we de integraal in uitdrukking (A.14) voor de amplitudes van de Fouriercomponenten met

$$A_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)e^{i\omega_n t}\mathrm{d}t \approx \frac{1}{T}\sum_{m=1}^{2M+1} y_m e^{i\omega_n t}\Delta t \tag{A.26}$$

of, in het geval van een reële y,

$$C_n \approx \frac{2}{T}\sum_{m=1}^{2M+1} y_m \cos(\omega_n t_m)\,\Delta t \quad ; \quad S_n \approx \frac{2}{T}\sum_{m=1}^{2M+1} y_m \sin(\omega_n t_m)\,\Delta t \tag{A.27}$$

en A_0 het gemiddelde van de y_m.

Met deze uitdrukkingen is het mogelijk om amplitudes voor een willekeurige n te berekenen. Dat lijkt aan te geven dat ook een discrete tijdreeks kan worden geschreven als een oneindige som van Fouriercomponenten, maar dat is niet het

geval. Dat heeft te maken met een verschijnsel dat *aliasing* wordt genoemd. We laten dat zien aan de hand van een voorbeeld op basis van de reële functie

$$z(t) = \cos \frac{4\pi}{T} t \quad ; \quad 0 \leq t \leq T \tag{A.28}$$

Deze functie heeft de vorm van een enkele Fouriercomponent en we weten dus op voorhand welke amplitudes we zouden moeten vinden als we z schrijven als een Fourierreeks. Door toepassing van uitdrukking (A.25) op deze continue functie vinden we voor de amplitudes C en S van de componenten in de Fourierreeks dat

$$C_n = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 2 \\ 0 & ; \quad n \neq 2 \end{cases} \tag{A.29}$$

en $S_n = 0$ voor alle n. In de duur T passen precies twee periodes van z en daarom vinden we alleen voor $n = 2$ een amplitude C ongelijk aan nul.

Met (A.27) kunnen we de amplitudes berekenen voor het geval dat we z alleen kennen in de vorm van een discrete tijdreeks z_m, gegeven door

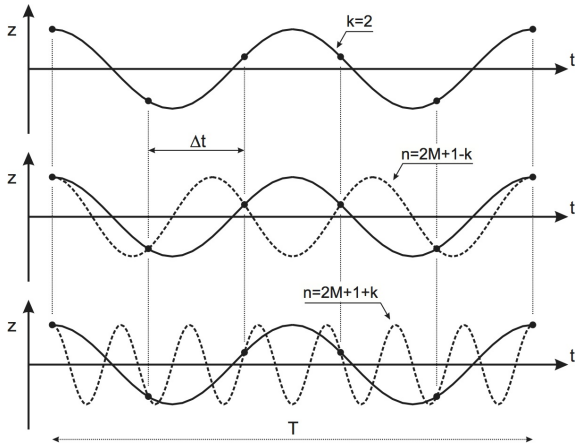
$$z_m = z(t_m) \quad ; \quad t_m = (m-1)\frac{T}{2M+1} \quad ; \quad m = 1 \ldots 2M+1 \tag{A.30}$$

Voor de tijdstippen t_m is deze reeks identiek aan de continue functie z uit (A.28). Toepassing van (A.27) laat zien dat $S_n = 0$ voor alle n. Voor de amplitudes C_n vinden we echter dat niet alleen $C_2 = 1$, maar ook de C_n met $n = j(2M + 1) + 2$ en $n = j(2M + 1) - 2$ (waarbij $j = 1, 2 \ldots$. De reden daarvoor is dat de Fouriercomponenten voor al deze n op de tijdstippen t_m niet van elkaar te onderscheiden zijn. Er geldt dat

$$\cos(\omega_k t_m) = \cos(\omega_n t_m) \quad ; \quad n = j(2M+1) \pm k \tag{A.31}$$

Dit is geïllustreerd in figuur A.2 voor $k = 2$, $M = 2$ en $j = 1$.

Dit verschijnsel doet zich voor bij alle componenten en dus ook bij alle lineaire combinaties van componenten. Voor elke Fouriercomponent zijn er zodoende hogere orde componenten die zich bij de analyse van een discrete tijdreeks manifesteren met precies dezelfde amplitude en fase. Deze componenten zijn als het ware elkaars alias, vandaar de benaming aliasing. Het gevolg hiervan is dat uit de discrete tijdreeks slechts M componenten kunnen worden gedestilleerd. De component met $k = M + 1$, bijvoorbeeld, is niet te onderscheiden van die met $k = M$. Dat blijkt direct uit (A.31). Met $j = 1$ volgt voor $k = M + 1$ dat $n = M$. Zo is elke $k > M$ een alias voor een n in de range $n = 1 \ldots M$. Dit past bij de eerdere opmerking dat we uit een discrete tijdreeks slechts een eindig aantal Fouriercomponenten kunnen herleiden. Als zo'n reeks uit $2M + 1$ reële waarden bestaat, kunnen we daar één reëel gemiddelde (A_0) uit bepalen en M reële amplitudes C en S. Meer informatie zit niet in de reeks. Op dezelfde manier kunnen we bij een complexe reeks $2M + 1$ complexe amplitudes A_n ($n = -M \ldots M$) vinden.



Figuur A.2: Voorbeeld van aliasing. De stippen geven de discrete tijdreeks aan die hoort bij de functie z(t). De componenten die in de onderste twee grafieken met een streeplijn zijn aangegeven, passen net zo goed bij de discrete tijdreeks.

De frequentie van de component van de hoogste orde die kan worden onderscheiden in de tijdreeks (ω_M) wordt de Nyquist frequentie genoemd. Deze frequentie wordt volledig bepaald door het interval Δt waarmee het proces wordt bemonsterd. Als het proces hogere orde componenten bevat, vinden we die in de tijdreeks terug als een versterking van een lagere orde component. Het is echter niet vast te stellen of ergens sprake is van versterking omdat de informatie die daarvoor nodig is niet uit de tijdreeks kan worden gedestilleerd.

Een alternatieve methode om amplitudes van Fouriercomponenten uit een discrete tijdreeks te schatten, is de methode der kleinste kwadraten. Deze komt aan bod in de paragraaf over deterministische processen aan het einde van dit hoofdstuk. Eerst gaan we in op de interpretatie van amplitudes die we uit een tijdreeks hebben geschat.

A.3.4 Variantiedichtheidsspectum

In de voorgaande twee paragrafen hebben we gezien hoe we een Gaussisch proces dat periodiek is met periode T of is gedefinieerd op een tijdsinterval per duur T, kunnen schrijven als een Fourierreeks. Vervolgens is voor continue processen de relatie afgeleid tussen de uitkomsten van het proces en amplitudes van Fouriercomponenten. Voor zulke processen bevat de Fourierreeks een oneindig aantal termen. Ook processen waarvan we alleen een waarneming ter beschikking hebben in de vorm van een discrete tijdreeks, kunnen we schrijven als een Fourierreeks. Het aantal termen in de reeks is dan echter eindig, maar met dat eindige aantal termen is de waarneming exact reproduceerbaar. Er is een één–op–één relatie tussen de waargenomen tijdreeks en de amplitudes van de Fouriercomponenten.

Vanwege deze één–op–één relatie biedt de verzameling amplitudes een goed beeld van de integrale karakteristieken van het onderliggende proces. Bij fysische processen is het bovendien vaak mogelijk aan die verzameling een nuttige interpretatie te koppelen die inzicht verschaft in dat proces. Om dat te illustreren bouwen we

voort op het eerder geïntroduceerde voorbeeld van de tijdsafhankelijke variatie van de waterstand bij wind–geïnduceerde golven. Bij aanhoudende stationaire wind is die variatie na verloop van tijd bij goede benadering een stationair Gaussisch proces.

Voor dit voorbeeld laten we in het navolgende zien dat we met de covariantie van de uitkomst op een willekeurig tijdstip van het proces een beeld kunnen geven over de verdeling van de totale golfenergie over de frequenties die in het golfveld voorkomen. Die verdeling wordt in de literatuur doorgaans het energiedichtheidsspectrum of, afgekort, energiespectrum genoemd. Eigenlijk zijn geen van beide namen helemaal correct omdat ze vooruit lopen op de interpretatie die van proces tot proces kan variëren. Waar het in essentie om gaat is het varantiedichtheidsspectrum van het betreffende proces. Bij variaties in de waterstand hebben de uitkomsten van het proces de dimensie van lengte en dat geldt ook voor de amplitudes van de Fouriercomponenten waarmee dat proces wordt beschreven. Bijbehorende varianties hebben in dat geval de dimensie lengte in het kwadraat en dat is in dit voorbeeld een maat voor energie. Vermenigvuldigd met ρg heeft variantie de dimensie van energie per eenheid van oppervlakte. Bij windgolven is dat een zinvolle interpretatie.

Om tot zo'n spectrum te komen, beschrijven we eerst de variantie van de uitkomst van een stationair Gaussisch proces op een willekeurig tijdstip. Daarbij gaan we uit van de Fourierreeks die dat proces weergeeft. Net als in (A.9) noteren we deze reeks als

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\omega_k t} \quad ; \quad 0 \le t \le T \tag{A.32}$$

en we gaan er vanuit dat het gemiddelde van y over de periode T gelijk is aan nul (dus $A_0 = 0$). De covariantie van twee uitkomsten van het proces die Δt uit elkaar liggen, wordt in dat geval gegeven door

$$\mathrm{cov}\left(y(t), y(t+\Delta t)\right) = \mathrm{E}\left\{y(t)y(t+\Delta t)\right\} \tag{A.33}$$

waarin E staat voor verwachting. Invullen van (A.32) in (A.33) geeft

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}\left(y(t), y(t+\Delta t)\right) &= \mathrm{E}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\omega_k t} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\omega_j (t+\Delta t)} \right\} \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\omega_k t} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\omega_j (t+\Delta t)} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega \Delta t} A_k A_j \int_0^T e^{i\omega_k t} e^{i\omega_j t} \mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Omdat de Fouriercomponenten onderling orthogonaal zijn, is de integraal in de onderste regel van (A.34) alleen ongelijk aan nul als $j = -k$ (zie (A.11)). Daarmee

reduceert (A.34) tot

$$\mathrm{cov}\,(y(t), y(t+\Delta t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega\Delta t} A_k A_{-k} \tag{A.35}$$

Vervolgens krijgen we de variantie van de uitkomst van het proces op een willekeurig tijdstip door $\Delta t = 0$ te kiezen:

$$\mathrm{cov}\,(y(t), y(t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k A_{-k} \tag{A.36}$$

In ons voorbeeld van een tijdsafhankelijke variatie van de waterstand hebben we te maken met reële $y(t)$. In dat geval zijn de amplitudes A_k en A_{-k} elkaars complexe geconjugeerde zodat $A_k A_{-k} = |A_k|$. Omdat we bovendien de tijdreeks zo hebben verschoven dat $A_0 = 0$, is

$$\mathrm{cov}\,(y(t), y(t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 \tag{A.37}$$

Met bovenstaande uitdrukking hebben we de totale variantie geschreven als een som van bijdragen die elk geassocieerd kunnen worden met een specifieke Fouriercomponent. Echter, omdat de frequenties ω_k die bij de A_k horen geen continue reeks vormen, kunnen we (A.37) niet interpreteren als een verdeling van de totale variantie over alle frequenties. Meer dan de bijdrage $2|A_k|$ koppelen aan de frequentieband $\omega_k \leq \omega < \omega_{k+1}$ laat (A.37) niet toe. De breedte $\Delta\omega$ van deze band is volgens (A.10) gelijk aan $\omega_{k+1} \breve{} \omega_k = 2\pi/T$. De gemiddelde variantiedichtheid in deze frequentieband komt hiermee op $2|A_k|/\Delta\omega = |A_k|T/\pi$.

Omdat de frequentiebanden onderling aansluiten, dekken ze gezamenlijk het frequentiedomein $\omega \geq 2\pi/T$. Samen vormen de gemiddelde variantiedichtheden $|A_k|T/\pi$ per band zodoende een discrete variant van het gezochte variantie–dichtheids-spectrum. Het is een benadering van het continue spectrum dat wordt verkregen uit Fouriertransformatie van de verwachting $E\{y(t), y(t+\Delta t)\}$ uit (32). Deze transformatie blijft hier buiten beschouwing. We volstaan met de discrete benadering van het spectrum.

Als we beschikken over een waarneming aan een stationair Gaussisch proces in de vorm van een discrete tijdreeks met omvang $2M + 1$, kunnen we M termen in de sommatie in het rechter lid van (A.37) schatten en vervolgens de discrete benadering van het spectrum daaruit construeren. In de praktijk worden de amplitudes A_k normaal gesproken berekend met het zeer efficiënte algoritme FFT (Fast Fourier Transform), ontwikkeld door Cooley and Tukey (1965). In de meeste programmeertalen is de FFT standaard beschikbaar.

A.4 Extreme waarden

A.4.1 Inleiding

Kenmerkend voor Gaussische processen is dat de uitkomst op een willekeurig tijdstip kan worden gezien als een trekking uit een normale verdeling. Als de covariantie van twee van zulke trekkingen slechts afhangt van de duur die tussen die trekkingen is verstreken, spreken we van een stationair Gaussisch proces. In statistische zin is het proces met die covarianties volledig beschreven[100]. In veel praktische toepassingen zijn we echter niet primair geïnteresseerd in de statistiek van alle uitkomsten, maar alleen in uitkomsten met specifieke kenmerken. Zo zijn voor het ontwerp van een waterkering de veel voorkomende fluctuaties in de waterstand minder van belang dan de extremen die zich daarin voordoen. Het uitgangspunt voor het ontwerp van zo'n kering is doorgaans dat deze bestand moet zijn tegen (zeldzame) condities die gemiddeld niet meer dan eens in een periode van voorgeschreven duur worden overschreden. In deze paragraaf gaan we in op kwantificatie van de condities die bij zo'n voorschrift passen. We doen dat in twee stappen. De eerste stap gaat over de statistische beschrijving van extremen die in een Gaussisch proces verwacht kunnen worden. Daarbij geven we een kansverdeling voor pieken in het proces en we werken een methode uit om de parameters van die verdeling te schatten uit waarnemingen aan het proces. Hiermee kunnen we voor het desbetreffende Gaussisch proces bepalen hoe groot de kans is dat een willekeurige individuele piek in het proces één of ander niveau overschrijdt, ook al ligt dat niveau buiten het bereik van de waarnemingen. In de tweede stap voegen we daar een statistische beschrijving aan toe van de tijd die verstrijkt tussen twee opeenvolgende overschrijdingen van dat niveau. Samen vormen deze beide stappen het gereedschap waarmee het niveau kan worden berekend dat gemiddeld niet meer eens in een periode van voorgeschreven duur wordt overschreden.

A.4.2 Statistiek van extremen

Voortbouwend op het waterbouwkundige voorbeeld van de waterkering lijkt het voor de hand liggend om bij extremen van een Gaussisch proces te denken aan zeer hoge uitkomsten. Er zijn echter tal van situaties waarin juist lage waarden maatgevend kunnen zijn. Denk bijvoorbeeld aan een damwand waarmee de oever van een waterloop is vastgelegd. De maatgevende belasting op deze wand kan zeker zo goed worden bepaald door een extreem lage waterstand in de waterloop als door een extreem hoge.

Voor de statistische analyse van extremen maakt het niet uit of we geïnteresseerd zijn in lage of hoge uitkomsten. De methode die we daarvoor in deze paragraaf presenteren, kan op beide soorten extremen worden toegepast. Ter wille van de eenvoud beperken we ons echter tot pieken en gaan we niet in op dalen.

We zouden een piek in een Gaussisch proces $y(t)$ kunnen definiëren als de uitkomst

[100] We gaan nog steeds uit van zodanig lineair getransformeerde variabelen dat de bijbehorende gemiddelden gelijk zijn aan nul, zoals omschreven in paragraaf A.2 over Gaussische processen.

op een moment waarbij geldt dat $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0$ en $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2 < 0$. Als de tweede afgeleide groter zou zij dan nul, hebben we te maken met een dal in plaats van een piek. Deze definitie sluit echter niet goed aan bij onze belangstelling voor pieken met een relatief hoge waarde. Pieken kunnen zich immers overal in het proces voordoen en zijn niet noodzakelijk beperkt tot relatief hoge uitkomsten. Door bijvoorbeeld toevallige fluctuaties kunnen ook pieken met een relatief lage waarde voorkomen.

Voor de analyse van extremen worden in de statistiek meer restrictieve definities van pieken gehanteerd. Bij één van die definities is sprake van een piek als niet alleen $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0$ en $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2 < 0$, maar bovendien de uitkomst zelf boven een voorgeschreven drempel ligt. Deze definitie staat bekend als *Peak Over Threshold*, gebruikelijk afgekort als POT. In een andere definitie wordt het proces verdeeld in periodes van gelijke duur en wordt per periode de hoogste uitkomst waarvoor geldt dat $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0$ en $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2 < 0$ aangemerkt als een piek. Deze aanpak wordt wel *Periodic Extreme Value* genoemd (PEV)[101].

Voor beide definities geldt dat pieken in een Gaussisch proces stochastische variabelen zijn. Net zo goed als elke uitkomst van een Gaussisch proces een trekking is uit een multi–normaal verdeelde populatie, zijn de pieken in dat proces ook trekkingen uit een populatie. Die populatie is echter niet normaal verdeeld. Welk type verdeling daar wel bij hoort, hangt af van de manier waarop pieken worden geselecteerd. Zo hoort bij POT een ander type verdeling dan bij PEV.

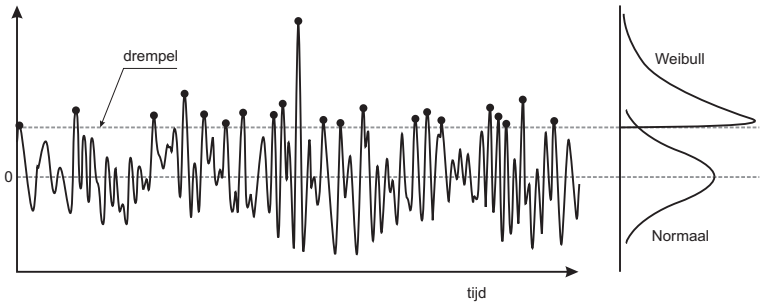
Zonder in te gaan op de onderliggende theorie, noemen we in deze paragraaf een voorbeeld van beide. Voor de POT methode is dat de Weibull verdeling en voor de PEV methode kijken we naar de Gumbel verdeling. In de literatuur zijn meer verdelingen te vinden, maar we beperken ons tot Weibull en Gumbel omdat die veel worden toegepast in de waterbouwkunde.

Peak over Threshold en Weibull

In deze paragraaf gaan we in op de toepassing van de Weibull verdeling voor extrapolatie van pieken die zijn geselecteerd op basis van de POT methode. Ter illustratie is in figuur A.3 een fragment geschetst van een Gaussisch proces. Het gemiddelde van de uitkomsten van het proces is gelijk aan nul en in de grafiek aangegeven met de onderste horizontale gestreepte lijn. De uitkomsten van het Gaussisch proces zijn normaal verdeeld. De bijbehorende kansdichtheidsfunctie is in het rechter deel van de figuur aangegeven, zij het een kwart slag gedraaid ten opzichte van de gebruikelijke weergave. Dat is gedaan om de verticale assen van beide grafieken overeen te laten stemmen.

In de linker grafiek zijn ook de pieken aangegeven die in het geschetste fragment van het Gaussisch proces voorkomen. De drempel die is gehanteerd bij de definitie

[101] In veel waterbouwkundige toepassingen spelen seizoensgebonden fluctuaties een rol bij het vaststellen van ontwerpcondities. Denk bijvoorbeeld aan wind-geïnduceerde verhogingen van de waterstand. Vanuit dat perspectief wordt vaak een jaar gekozen als periode om pieken te selecteren en spreekt men van *Annual Extreme Value*, afgekort als AEV.



Figuur A.3: Fragment van een Gaussisch proces (links) en de kansdichtheid (rechts) voor alle uitkomsten van het proces (Normaal) en die voor de pieken boven een drempel (Weibull).

van de pieken is aangegeven met de bovenste horizontale gestreepte lijn. Deze pieken zijn Weibull verdeeld en ook de kansdichtheidsfunctie die daarbij hoort, is in het rechter deel van de figuur getekend.

De Weibull kansverdeling $F(x)$ wordt gegeven door

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x - x_0}{\sigma}\right)^{\alpha}\right) \tag{A.38}$$

Merk op dat $F(x)$ een onderschrijdingskans is. De bijbehorende kansdichtheid $f(x)$ luidt

$$f(x) = \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{x - x_0}{\sigma}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x - x_0}{\sigma}\right)^{\alpha}\right) \tag{A.39}$$

Hierin is σ een schaalparameter, α een vormparameter en x_0 is de toegepaste drempel.

Met betrekking tot de keuze van de drempel x_0 blijken de meningen uiteen te lopen. In praktische toepassingen wordt de drempel wel gebruikt als een filter om pieken naar oorzaak te kunnen onderscheiden. Zo kan in de benedenloop van een rivier die in een meer uitmondt, de waterstand fluctueren als gevolg van windopzet op het meer, maar ook door hoge rivierafvoer. Als die hoge afvoer doorgaans gepaard gaat met hogere waterstanden dan die ten gevolge van de wind, kan x_0 zo worden gekozen dat pieken in de waterstand vrijwel uitsluitend aan hoge afvoeren kunnen worden toegeschreven.

In een andere aanpak wordt de drempel x_0 samen met de parameters α en σ geschat door de kansverdeling (A.38) te passen aan waargenomen pieken. Dat kan op diverse manieren. Een daarvan is de Kleinste Kwadraten methode. Daarbij worden eerst de waargenomen pieken naar grootte gerangschikt, zodanig dat $x_n < x_{n+1} \quad (n = 1 \ldots N)$ en wordt voor elke piek een onderschrijdingskans aangenomen volgens

$$\hat{P}(x_n) = \frac{n - \beta_1}{N + \beta_2} \tag{A.40}$$

waarin N het aantal waargenomen pieken is, $\hat{P}$ aangeeft dat het om een aanname (of model) van P gaat en voor de coëfficiënten β geldt dat $0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1$. Bij toepassing van de Kleinste Kwadraten methode wordt de onderschrijdingskans P volgens (A.38) gezien als een model dat door variatie van de parameters wordt aangepast aan waarnemingen volgens (A.40). Het verschil ϵ_n tussen model en waarneming wordt gegeven door

$$\epsilon_n = (\sigma, \alpha, x_0) = P(x_n) - \hat{P}(x_n) \tag{A.41}$$

en is afhankelijk van de modelparameters σ, α en x_0. De optimale waarden van deze parameters worden volgens de Kleinste Kwadraten methode gevonden bij het minimum van $\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n^2$. Voor dat minimum geldt dat

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n^2 = \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=1}^{N} = \frac{\partial}{\partial x_0} \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n^2 \epsilon_n^2 = 0 \tag{A.42}$$

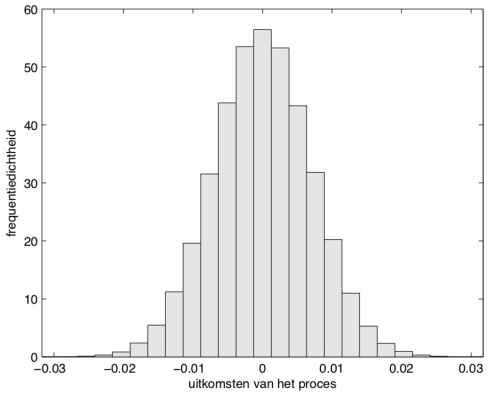
en dat zijn drie (niet-lineaire) vergelijkingen waaruit de parameters kunnen worden bepaald.

Aan deze optimalisatie van de parameters van een extreme waarden verdeling kleven twee belangrijke bezwaren. Een daarvan is dat de keuze van de coëfficiënten β_1 en β_2 niet alleen arbitrair is, maar ook van grote invloed op onderschrijdingskansen die met de aangepaste verdeling worden bepaald. Met $\beta_1 = \beta_2 = 0$ wordt bijvoorbeeld impliciet verondersteld dat de hoogste waarneming niet kan worden overschreden en dat is meestal onzin. In het verleden is overigens wel onderzoek gedaan naar geschikte waarden van deze coëfficiënten. Een veel geciteerd artikel over dit onderwerp en toegespitst op de Weibull verdeling is dat van Petruskas and Aagaard (1971).

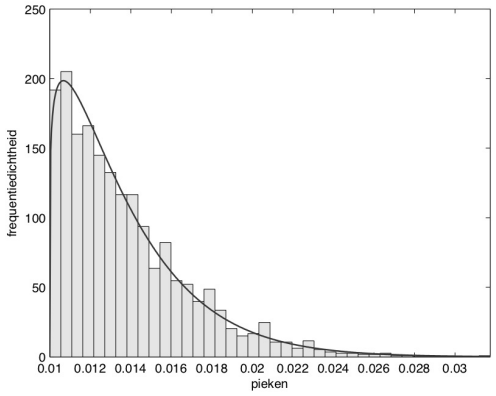
Een ander bezwaar is dat de definitie van pieken afhankelijk is af de uitkomst van de optimalisatie. Dat is inherent aan optimalisatie van de drempel. Daardoor kan achteraf blijken dat meer waarnemingen in de optimalisatie betrokken hadden moeten worden dan feitelijk is gedaan. Dit bezwaar is niet beperkt tot toepassing van de Kleinste Kwadraten methode, maar geldt voor elke optimalisatie waarin de drempel is begrepen.

Een alternatieve methode die het eerstgenoemde bezwaar van de β's niet kent, is de Maximum Likelihood methode. De essentie van deze methode is dat de waargenomen pieken identiek verdeeld en bovendien onderling statistisch onafhankelijk worden verondersteld. Als $f(x)$ de kansdichtheid van de betreffende verdeling is, dan is de gezamenlijke kansdichtheid van alle N waarnemingen samen gelijk aan $f(x)^N$. De set van N waarnemingen wordt vervolgens gezien als één trekking uit een N–dimensionaal verdeelde populatie met kansdichtheid $f(x)^N$. Van die enkele trekking die we hebben, kennen we de bijbehorende kansdichtheid niet, maar het meest waarschijnlijk is dat deze hoort bij de hoogste kansdichtheid. Op basis hiervan worden de parameters van de verdeling geschat (zie appendix B).

Tot slot van deze paragraaf is in de figuren A.4 en A.5 het resultaat getoond van een analyse van een fictief Gaussisch proces. Voor dit proces is een tijdreeks



Figuur A.4: Histogram van 400.000 discrete uitkomsten van een fictief Gaussisch proces dat is gebaseerd op het *random phase* model.

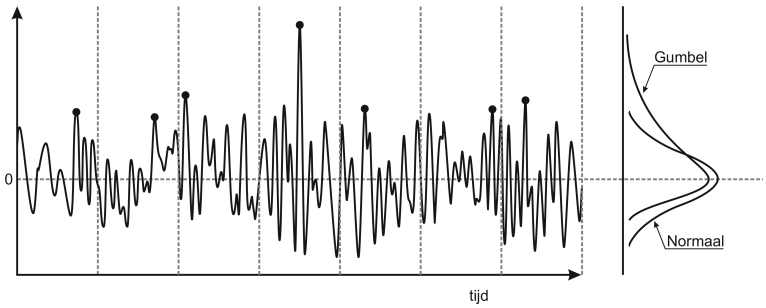


Figuur A.5: Histogram van de pieken in het Gaussisch proces van figuur A.4. Voor de definitie van de pieken is een drempel van 0,01 gebruikt. De kromme is de bijbehorende Weibull kansdichtheidsfunctie.

met 400.000 uitkomsten gegenereerd. Een fragment daarvan is getoond in figuur A.3. De lengte van de complete reeks komt overeen met de periode van de laagste component en met 10.000 keer de periode van de hoogste component. In figuur A.4 is een histogram te vinden van alle 400.000 uitkomsten. Dit histogram zou moeten passen bij de kansdichtheid van de normale verdeling. Dat lijkt inderdaad het geval.

Voor een analyse van de extremen die zich in dit proces voordoen, is de Weibull verdeling met behulp van de Maximum Likelihood methode gepast aan alle maxima boven 0,01. Alle uitkomsten y_m in de tijdreeks waarvoor geldt dat $y_{m-1} < y_m < y_{m+1}$ en $y_m > 0,01$ zijn in deze analyse betrokken. Een histogram van deze pieken is gegeven in figuur A.5. Daarin is ook de kansdichtheid getekend van de Weibull verdeling waarvan de parameters met de Maximum Likelihood methode uit de pieken zijn geschat.

In veel praktische toepassingen zullen de resultaten van een analyse van extremen minder fraai zijn dan in dit voorbeeld waarin een omvangrijke tijdreeks is gebruikt



Figuur A.6: Fragment van een Gaussisch proces (links) en de kansdichtheid (rechts) voor alle uitkomsten van het proces (Normaal) en die voor de pieken per periode (Gumbel).

van een proces dat bij zeer goede benadering Gaussisch is.

Ook als het proces waarvan we de extremen willen analyseren daadwerkelijk Gaussisch is, speelt de omvang van de tijdreeks een rol bij de betrouwbaarheid van de schattingen van de Weibull parameters. Die betrouwbaarheid neemt toe met het aantal pieken dat we ter beschikking hebben en werkt rechtstreeks door in de betrouwbaarheid van overschrijdingskansen die we bepalen met de aan de pieken gepaste Weibull verdeling. Er bestaat een methode om deze betrouwbaarheid te kwantificeren aan de hand van de kromming van de log–likelihoodfunctie $\ln(L)$ ter plaatse van z'n maximum. Anders dan met de opmerking dat een zeer gepronnonceerd maximum (sterke kromming) op een hogere betrouwbaarheid wijst dan een afgevlakt maximum, gaan we op deze materie niet in.

Periodic Extreme Value en Gumbel

Pieken kunnen ook worden geselecteerd door het proces op te knippen in moten van gelijke duur en vervolgens in elke moot het extreem op te zoeken.

Pieken die op deze manier zijn geselecteerd, kunnen worden beschreven met de Gumbel verdeling (zie Gumbel (1958)). Dit is geschetst in figuur A.6 voor hetzelfde fragment van een Gaussisch proces als in figuur A.3.

De onderschrijdingskans $F(x)$ en kansdichtheid $f(x)$ voor de Gumbel verdeling worden achtereenvolgens gegeven door

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \tag{A.43}$$

en

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \tag{A.44}$$

De parameters μ en σ van deze verdeling kunnen uit waarnemingen worden geschat, bijvoorbeeld met behulp van de Maximum Liklelihood methode (zie appendix B).

A.4.3 Herhalingstijd

In de inleiding van deze paragraaf hebben we aangegeven op zoek te zijn naar het niveau dat door pieken in een Gaussisch proces gemiddeld niet meer dan één keer in een periode van voorgeschreven duur wordt overschreden. We bepalen dat niveau in twee stappen. In de eerste stap, die we in de vorige paragraaf hebben gezet, gaat het om de statistische beschrijving van pieken in het proces. We hebben gezien dat pieken, gedefinieerd als maxima die uitstijgen boven een vooraf vastgestelde drempel, Weibull verdeeld zijn. De parameters van die verdeling kunnen bijvoorbeeld met de Maximum Likelihood methode worden geschat. Met die schattingen is het mogelijk om de kans te bepalen dat een willekeurige piek in het betreffende proces boven één of ander niveau ligt. Essentieel hierbij is dat we naar één willekeurige piek kijken. Die zegt helemaal niets over de frequentie waarmee pieken zich in het proces voordoen en dus ook niets over de te verwachten duur tussen twee opeenvolgende overschrijdingen van welk niveau dan ook. Er is dus meer nodig om een uitspraak te kunnen doen over het niveau dat gemiddeld hooguit eens in de zoveel tijd door een piek wordt overschreden. We moeten een relatie leggen tussen kans en frequentie. De tweede stap, die we in deze paragraaf behandelen, gaat over die relatie.

In de waterbouwkundige praktijk worden de begrippen kans en frequentie helaas te vaak met elkaar verward. Het verschil is echter fundamenteel, al was het alleen al omdat kans een dimensieloze grootheid is terwijl frequentie de dimensie 1/tijd draagt. Daarnaast is een kans altijd groter dan of gelijk aan nul en kleiner dan of gelijk aan 1. Voor een frequentie bestaat die bovengrens niet. Zo kan de frequentie waarmee één of andere waterstand wordt overschreden groter zijn dan eens per jaar, terwijl de kans dat diezelfde waterstand in een willekeurig jaar wordt overschreden nooit groter kan zijn dan 1. In dit voorbeeld is het duidelijk dat kans en frequentie niet door elkaar gebruikt kunnen worden, maar dat is niet altijd evident. Van een (andere) waterstand met een gemiddelde overschrijdingsfrequentie van eens in de 10.000 jaar, wordt al gauw maar net zo onterecht gezegd dat de kans dat deze in een willekeurig jaar wordt overschreden gelijk is aan 1/10.000 of, gruwelijker nog, dat die overschrijdingskans 1/10.000 per jaar is. Kans is immers dimensieloos en dus nooit 'per jaar'.

Aan het einde van deze paragraaf komen we terug op deze verwarring. Ze komt voort uit een benadering van de theoretisch juiste relatie tussen kans en frequentie en daar kijken we eerst naar. We gaan de kans bepalen dat een piek in een stationair Gaussisch proces $y(t)$ in een periode met duur τ het niveau y_{crit} overschrijdt. Dit niveau is niet de drempelwaarde die in de voorgaande paragraaf is geïntroduceerd bij de definitie van extremen volgens de POT methode. De y_{crit} ligt boven die drempel. Ook daar komen we later op terug.

Om de kans te bepalen dat een piek in een duur τ het niveau y_{crit} overschrijdt, denken we de tijd opgebouwd uit een serie aaneengeschakelde intervallen met lengte Δt. Deze lengte kiezen we zo klein, dat zich in zo'n interval ten hoogste één piek groter y_{crit} kan voordoen. Dat wil zeggen dat zich in een willekeurig interval Δt

geen enkele piek groter y_{crit} voordoet, of precies één zo'n piek. Meer dan één van die pieken in een willekeurige Δt is uitgesloten.

Vervolgens vragen we ons af hoe groot de kans is dat zich in een willekeurig interval een piek voordoet die uitsteekt boven y_{crit}. Deze kans wordt bepaald door de frequentie waarmee pieken in het betreffende Gaussisch proces y_{crit} overschrijden. We kunnen deze frequentie schatten aan de hand van waarnemingen aan het proces door het aantal waargenomen pieken boven y_{crit} te delen door de duur van de waarneming. Omdat pieken niet met de regelmaat van de klok voorkomen, spreken we van een gemiddelde frequentie.

Bij een gemiddelde frequentie f is het te verwachten aantal pieken groter dan y_{crit} in een duur τ gelijk is aan $f\tau$. Er zijn, met andere woorden, $f\tau$ intervallen in duur τ waarin zich een piek voordoet die groter is dan y_{crit}. Aangezien die duur is opgebouwd uit $n = \tau/\Delta t$ intervallen is de kans dat zich in een willekeurig interval een piek voordoet die groter is dan y_{crit} gelijk aan $f\tau/n$. Omdat zich vanwege de keuze van de duur Δt van een interval nooit meer pieken in een duur τ kunnen optreden dan er intervallen in die duur passen, is per definitie $f\tau \leq n$ en dus is $f\tau/n \leq 1$.

Met de gevonden kans van $f\tau/n$ dat zich in een willekeurig interval Δt een piek boven y_{crit} voordoet, kunnen we kans op precies k van die pieken in een duur $\tau = n\Delta t$ bepalen. Dat is de kans dat in k van de n intervallen wel een piek groter dan y_{crit} voorkomt en in $n - k$ intervallen juist niet. De volgorde van intervallen met en zonder piek maakt hierbij niet uit. Het gaat alleen om het aantal.

Deze kans op een piek boven y_{crit} in k van de n intervallen wordt gegeven door de Binomiaalverdeling:

$$P(k|n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad ; \quad p = \frac{f\tau}{n} \tag{A.45}$$

Hierin geeft het binomiaalquotiënt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{A.46}$$

het aantal mogelijke ordeningen van k intervallen met een piek groter dan y_{crit}en $n - k$ zonder. Voorts is $p^k(1-p)^{n-k}$ de kans op de combinatie van k intervallen met zo'n piek én $n - k$ intervallen zonder.

In waterbouwkundige toepassingen is k doorgaans beperkt terwijl n juist heel groot kan worden. De extremen waar we in de praktijk mee te maken hebben houden in vergelijking met bijvoorbeeld de levensduur van een constructie niet lang aan. Zo duurt een stormvloed waar en waterkering tegen bestand moet zijn één tot enkele dagen. Vergeleken met een jaar levert dat een n van de orde 100 en in verhouding tot de beoogde levensduur van de kering komt n nog veel hoger uit. Tegelijkertijd kan één overschrijding van de waterstand die nog juist gekeerd kan worden, dus $k = 1$, al tot falen leiden.

Voor de combinatie van een beperkte k en een zeer grote n gaat de Binomiaalverdeling over in de Poisson verdeling. Voor de afleiding van deze overgang herschrijven we eerst de Binomiaalverdeling (A.45) in termen van het te verwachten aantal pieken groter dan y_{crit} in een duur τ. Dit aantal noteren we met μ en het is, zoals eerder vermeld, gelijk aan $f\tau$. Dit geeft

$$P(k|n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\mu}{n}\right)^k\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \quad ; \quad \mu = f\tau \tag{A.47}$$

Vervolgens bepalen we hiervan de limiet voor $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} P(k|n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\mu}{n}\right)^k\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \tag{A.48}$$

Met

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\mu}{n}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k}\frac{\mu^k}{k!} = \frac{\mu^k}{k!} \tag{A.49}$$

en

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-k} = e^{-\mu} \tag{A.50}$$

vinden we

$$\lim_{n\to\infty} P(k|n) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} \tag{A.51}$$

Het rechter lid van (A.51) staat bekend als de Poisson verdeling. We noteren deze als

$$P(k|\mu) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} \tag{A.52}$$

Deze verdeling geeft de kans dat zich in een duur τ precies k pieken boven y_{crit} voordoen, terwijl er, gelet op de gemiddelde frequentie waarmee zulke pieken voorkomen, μ in die periode verwacht mogen worden. Hiermee kunnen we bijvoorbeeld voor een waterbouwkundige constructie uitrekenen hoe groot de kans is dat tijdens de levensduur van die constructie de ontwerpconditie y_{crit} één of meerdere malen wordt overschreden. Die kans is gelijk aan het complement van de kans dat die ontwerpconditie helemaal nooit wordt overschreden tijdens die levensduur. Dat complement is

$$1 - P(k=0|\mu) = 1 - e^{-\mu} = 1 - e^{f\tau} \tag{A.53}$$

waarbij τ in dit geval staat voor de levensduur van de constructie en k het aantal pieken is dat de ontwerpconditie y_{crit} overschrijdt[102].

[102]De kans dat de ontwerpconditie één of meerdere malen wordt overschreden in duur τ is gelijk aan $\sum_{k=1}^{\infty}(\mu^k/k!)\exp(-\mu)$ (met $\mu = f\tau$). Het gaat om de kans op één overschrijding, of twee, of drie et cetera. En die is gelijk aan de kans op één overschrijding plus die op twee overschrijdingen plus die op drie overschrijdingen en zo eindeloos verder. Die sommatie omvat alle mogelijkheden behoudens de kans op geen enkele overschrijding ($k = 0$). Als we die erbij optellen, moeten we dus uitkomen op 1, ofte wel $\sum_{k=0}^{\infty}(\mu^k/k!)\exp(-\mu) = 1$. En dat klopt, want $\sum_{k=0}^{\infty}(\mu^k/k!) = \exp(\mu)$.

Overigens wordt bij het ontwerp van een waterbouwkundige constructie de ontwerpconditie gebruikelijk bepaald op basis van een nog juist acceptabel geachte kans op falen. Uit de combinatie van deze kans P_τ en de beoogde levensduur τ van de constructie vinden we met (A.53) de gemiddelde frequentie f waarmee de ontwerpconditie ten hoogste mag worden overschreden:

$$P_\tau = 1 - e^{f\tau} \quad \Longrightarrow \quad f = \frac{1}{\tau}\ln(1 - P_\tau) \tag{A.54}$$

Om bij deze frequentie een overschrijdingsniveau y_{crit} te vinden, kijken we naar het onderliggende stationaire Gaussisch proces en in het bijzonder de extremen die daarin optreden. In de voorgaande paragraaf hebben we die extremen in algemene zin gedefinieerd als pieken die boven een voorgeschreven drempel x_0 uitkomen. Deze manier van definiëren is de zogeheten POT–methode. De kans dat een willekeurige piek één of ander niveau x overschrijdt, hebben we beschreven met de Weibull verdeling (zie (A.38); de $F(x)$ in deze uitdrukking is de onderschrijdingskans; het complement $1 - F(x)$ is de overschrijdingskans).

De parameters van de Weibull verdeling hebben we geschat uit alle pieken (boven de drempel) in een waarneming aan het Gaussisch proces. Als we het aantal van deze pieken delen door de duur van de waarneming, krijgen we een schatting van de gemiddelde frequentie f_p waarmee pieken in het proces voorkomen. Het gaat hierbij om alle pieken, onafhankelijk van hun niveau.

Voor het ontwerp van de constructie zijn we echter niet geïnteresseerd in alle pieken, maar slechts in die pieken die zich met een gemiddelde frequentie f volgens (A.54) voordoen. Onze belangstelling gaat dus uit naar de fractie f/f_p hoogste pieken. Dat zijn immers de pieken die y_{crit} overschrijden. Die fractie is gelijk aan de kans dat een willekeurige piek uitkomt boven y_{crit} en wordt gegeven door de Weibull verdeling waarvan we de parameters σ en α uit alle waargenomen pieken hebben geschat. Kortom,

$$\exp\left(-\left(\frac{y_{\text{crit}} - x_0}{\sigma}\right)^\alpha\right) = \frac{f}{f_p} = \frac{1}{f_p\tau}\ln(1 - P_\tau) \tag{A.55}$$

Inverteren van bovenstaande uitdrukking levert het gezochte overschrijdingsniveau y_{crit}.

Bij de afleiding van (A.55) zijn we uitgegaan van de Weibull verdeling voor de beschrijving van overschrijdingskansen van pieken. Dat sluit aan bij de voorgaande paragraaf waarin we ons tot die verdeling hebben beperkt. De hier beschreven relatie tussen kans en frequentie geldt echter algemeen. In plaats van de Weibull verdeling hadden we elke andere extreme waarden verdeling kunnen gebruiken en moet het linker lid van (A.55) conform worden aangepast. Herschreven in algemene termen luidt (A.55)

$$1 - F(y_{\text{crit}}) = \frac{1}{f_p\tau}\ln(1 - P_\tau) \tag{A.56}$$

waarin F de gekozen kansverdeling is (onderschrijdingskans).

Toepassing van deze theorie in het kader van bijvoorbeeld veiligheid tegen overstromen wordt soms lastig gevonden omdat aan die veiligheid niet zomaar een duur te koppelen is zoals levensduur bij een constructie. Die veiligheid dient immers een permanentie te zijn. Om daaraan tegemoet te komen, wordt een soort eenheidsduur gehanteerd. In de praktijk is dat meestal een jaar en wordt veiligheid uitgedrukt als de kans dat zich in een willekeurig jaar een overstroming voordoet. Bij een hoge mate van veiligheid hoort een kleine gemiddelde frequentie waarmee overstromingen optreden. Het verwachte aantal $f\tau$ overstromingen in één jaar (τ=1 jaar) is in dat geval ook klein, als regel veel kleiner dan 1. Aangezien voor zeer kleine $f\tau$ het rechter lid van (A.53) bij benadering gelijk is aan $f\tau$, is de kans dat zich in een willekeurig jaar een overstroming voordoet ongeveer gelijk aan $f\tau$. Deze benadering is de bron van de verwarring die in het begin van deze paragraaf is genoemd met betrekking tot de relatie tussen kans en frequentie. Combinatie van deze benadering met de gebruikelijke keuze τ=1 jaar wekt de fundamenteel onjuiste indruk dat de kans op een overstroming in een willekeurig jaar gelijk is aan f. De fout zit in het gemakzuchtig of naïef weglaten van de dimensie van τ.

A.4.4 Toepassing

De theorie die in de voorgaande twee paragrafen is gepresenteerd over statistiek van extreme waarden en herhalingstijden van extreme gebeurtenissen, vindt in de praktijk toepassing in onder meer de vaststelling van ontwerpcondities voor waterbouwkundige constructies. Voor drie van zulke toepassingen geven we een aanpak die direct volgt uit de gepresenteerde theorie. Het gaat om de bepaling van

1. de extreme conditie y_{crit} die gemiddeld niet meer dan één keer wordt overschreden in een willekeurige periode met duur T;
2. de kans dat zich in een willekeurige periode met duur τ een extreme conditie voordoet waarbij de waarde y_{crit} wordt overschreden;
3. de extreme conditie y_{crit} waarvoor geldt dat de kans dat deze in een willekeurige periode met duur τ wordt overschreden, niet groter is dan P_τ.

In alle drie gevallen gaan we uit van een discrete tijdreeks van waarnemingen y aan het tijdsafhankelijke proces waarvan we geïnteresseerd zijn in de extremen die zich daarin kunnen voordoen. In de waterbouwkunde kan dat bijvoorbeeld gaan om waterstanden, afvoeren van een rivier, golfhoogtes en zo meer. Voor de beschrijving van die extremen veronderstellen we dat we te maken hebben met een bij goede benadering Gaussisch proces. Pieken in dat proces die een drempel y_0 overschrijden, beschouwen we als extremen en we nemen aan dat die extremen kunnen worden beschreven met de Weibul verdeling. Dat is consistent met de aanname van een Gaussisch proces.

De parameters van die Weibul verdeling schatten we in twee stappen:

a) We kiezen een drempel y_0 om een onderscheid te maken tussen, zeg maar, alledaagse pieken in het proces en pieken die horen bij uitzonderlijke ge-

beurtenissen. Dit is niet triviaal. In de praktijk beslaat de beschikbare tijdreeks altijd een eindige periode en dus een eindig aantal pieken. Naarmate de drempel hoger wordt gekozen, blijven steeds minder pieken over voor de schatting van de parameters en daarmee wordt die schatting steeds minder betrouwbaar. Anderzijds geldt dat bij het aanleggen van een betrekkelijk lage drempel, gematigde pieken een steeds grotere invloed hebben op de schatting van de parameters waardoor het (statistische) gedrag van uitzonderingen minder goed wordt beschreven. Wie bij wijze van experiment speelt met de keuze van y_0, zal zien dat de schattingen van de parameters navenant variëren.

b) We selecteren alle pieken in de tijdreeks die groter zijn dan de gekozen y_0. Vervolgens bepalen we de parameters σ en α van de Weibul verdeling zodanig dat deze verdeling zo goed mogelijk past bij de geselecteerde pieken. In dit verband is *zo goed mogelijk* gekoppeld aan een of ander optimalisatie criterium zoals bijvoorbeeld uitgewerkt in de Kleinste Kwadraten methode of de Maximum Likelihood Method (zie appendix B).

Een andere belangrijke factor in de drie toepassingen is de gemiddelde frequentie f_p waarmee pieken die uitstijgen boven y_0 zich voordoen. Ook die is te schatten uit de beschikbare tijdreeks. Als zich in die reeks m pieken voordoen die groter zijn dan y_0 en die reeks een periode met duur T_r beslaat, dan is

$$f_p = \frac{m}{T_r} \tag{A.57}$$

Volgende stappen verschillen per toepassing, niet in de laatste plaats met de betrekking tot de volgorde waarin ze worden toegepast. Daar gaan we voor elke toepassing apart op in.

1. In de eerste toepassing zijn we op zoek naar de extreme conditie y_{crit} die gemiddeld niet meer dan één keer wordt overschreden in een willekeurige periode met duur T. Dat is hetzelfde als vragen welke y wordt overschreden met een gemiddelde frequentie $f = 1/T$. De relatie tussen deze f en de frequentie f_0 van voorkomen van extremen in het algemeen (althans volgens onze keuze dat sprake is van een extreem ingeval van een piek waarbij y_0 wordt overschreden), zit in de Weibul verdeling waarvan we vooraf de parameters hebben geschat. Als we kijken naar een hele lange periode met duur D, dan mogen we verwachten dat zich daarin $f_0 D$ extremen voordoen. Op dezelfde manier is het aantal extremen waarbij y_{crit} wordt overschreden naar verwachting gelijk aan fD. Met $D \to \infty$ is de verhouding tussen het aantal extremen boven y_{crit} (dus fD) en het totaal aantal extremen ($f_p D$) gelijk aan de kans P dat als zich een extreem voordoet, de waarde y_{crit} daarbij wordt overschreden. Kortom

$$P(y > y_{\text{crit}}) = \lim_{D\to\infty} \frac{fD}{f_p D} = \frac{f}{f_p} \tag{A.58}$$

Met de veronderstelling dat de kans P wordt beschreven door de Weibul verdeling met de eerder geschatte parameters σ en α, volgt dat

$$y_{\text{crit}} = y_0 + \sigma \left(-\ln \frac{f}{f_p} \right)^{1/\alpha} \tag{A.59}$$

2. In de tweede toepassing bepalen we de kans $P_\tau(y > y_{\text{crit}})$ dat zich in een willekeurige periode met duur τ een extreme conditie voordoet waarbij de waarde y_{crit} wordt overschreden. Op het eerste gezicht lijkt dit wellicht op de eerste toepassing, maar er is een wezenlijk verschil. In de eerste toepassing keken we naar **gemiddeld** één overschrijding in de beschouwde duur, terwijl het in deze tweede toepassing gaat om **ten minste** één overschrijding. Daarmee nemen we expliciet de optie mee dat zich in de duur τ meerdere extremen voordoen waarbij y_{crit} wordt overschreden.

   Voor de berekening van de kans $P_\tau(y > y_{\text{crit}})$ verdelen we de periode met duur τ in n intervallen die elk zo klein zijn dat zich daarin ten hoogste één extreem kan voordoen waarbij y_{crit} wordt overschreden. Voor elk interval geldt zodoende dat daarin 0 of 1 zo'n extreem optreedt en nooit meer dan 1.

   Voor grote n wordt de kans dat zich in een duur τ ten minste één keer een een extreem boven y_{crit} voordoet, gegeven door

$$P_\tau(y > y_{\text{crit}}) = 1 - e^{f\tau} \tag{A.60}$$

   (zie (A.53)) waarin f de gemiddelde frequentie is waarmee pieken optreden die groter zijn dan y_{crit}. Deze volgt direct uit (A.58):

$$f = f_p P(y > y_{\text{crit}}) \tag{A.61}$$

   Als bijvoorbeeld τ de beoogde operationele levensduur van een constructie is en y_{crit} de belasting waar die constructie op is ontworpen, dan geeft (A.60) de kans dat die ontwerpbelasting tijdens de levensduur ten minste één keer wordt overschreden.

3. De derde toepassing gaat over de extreme conditie y_{crit} waarvoor geldt dat de kans dat deze in een willekeurige periode met duur τ wordt overschreden, niet groter is dan P_τ. Dit is niets anders dan het omgekeerde van de tweede toepassing. De gezochte y_{crit} kan direct worden afgeleid uit (A.55):

$$y_{\text{crit}} = y_0 + \sigma \left(-\ln \left(\frac{1}{f_p \tau} \ln(1 - P_\tau) \right) \right)^{1/\alpha} \tag{A.62}$$

   (nog steeds met de veronderstelling dat extremen bij goede benadering Weibul verdeeld zijn).

A.4.5 Iets over instationaire processen

Belastingen op waterbouwkundige constructies zijn veelal gerelateerd aan natuurlijke, tijdsafhankelijke processen. In voorgaande paragrafen van deze appendix hebben we gezien dat als die natuurlijke processen zich bij goede benadering gedragen als een stationair Gaussisch proces en als bovendien (A.6) opgaat, dan volstaat een waarneming van beperkte duur aan dat natuurlijke proces om tot een redelijk betrouwbare schatting te komen van de kans dat zich in een voorgeschreven tijdsinterval realisaties van dat proces voordoen die een specifieke grens overschrijden. Dat ligt aan de basis van het vaststellen van ontwerpcriteria voor die constructies.

Bij natuurlijke (en ook niet–natuurlijke) processen is stationariteit echter niet vanzelfsprekend. Als voorbeeld noemen we tijdsafhankelijke fluctuaties in de waterstand op een rivier. Een plotselinge ingreep in het dwarsprofiel van die rivier kan leiden tot een abrupte wijziging in het gedrag van zulke fluctuaties in de omgeving van die ingreep. Daarnaast is het mogelijk dat het karakter van die tijdsafhankelijke fluctuaties geleidelijk wijzigt onder invloed van bijvoorbeeld morfologische ontwikkelingen van het rivierbed of verandering van het klimaat.

Ook al geldt in zulke omstandigheden nog steeds dat de correlatie tussen realisaties van het betreffende proces afneemt met de tijd die tussen die realisaties is verstreken (dus dat (A.6) nog steeds opgaat), is toch geen sprake van een stationair proces en volstaat een waarneming van beperkte duur niet om tot een betrouwbare schatting te komen van ontwerpcondities (bijvoorbeeld extreme waterstanden), dat wil zeggen een uitspraak te doen over condities die gemiddeld niet meer dan eens per zoveel jaar worden overschreden. De reden daarvoor is dat de parameters van het Gaussisch proces (gemiddelden en covarianties) dat wordt gebruikt als model voor het natuurlijke proces door de abrupte of geleidelijke wijziging in dat natuurlijke proces niet zomaar constant kunnen worden verondersteld.

Om in zulke gevallen toch tot een betrouwbare schatting van ontwerpcondities te kunnen komen, is het nodig om het effect van de wijzigingen in het natuurlijke proces op de modelparameters (in casu de gemiddelden en covarianties van het representatief veronderstelde Gaussisch proces) in kaart te brengen. Dat is geen sinecure.

Voortbouwend op het voorbeeld van waterstanden op een rivier kan het effect van een abrupte ingreep vaak adequaat worden onderzocht aan de hand van simulaties met rekenkundige of schaal–modellen. Dat is efficiënter dan opnieuw waterstanden registreren in de zin dat het direct inzicht geeft in effecten van de ingreep. Voor een adequate statistische extrapolatie van waterstanden is, aangenomen dat het na de ingreep opnieuw om een stationair proces gaat waarbij (A.6) opgaat, een registratie nodig die ten minste enkele decennia omvat en pas na de ingreep begint. Het is doorgaans niet verantwoord om zo lang te moeten wachten op een antwoord op de vraag wat het effect van een ingreep zal zijn. Een en ander laat overigens onverlet dat het zinvol is om wel zo'n nieuwe registratie op te bouwen voor toekomstig nut.

Bij een geleidelijke wijziging ligt dat doorgaans gecompliceerder. Zo kan het tijdsafhankelijke gedrag van waterstanden op een rivier op een tijdschaal van decennia of langer wijzigen door verandering van het klimaat. Ook in dat geval kan een Gaussisch proces dienen als model voor fluctuaties in die waterstanden, maar de parameters van dat model variëren op een tijdschaal die overeenkomt met die van, in dit voorbeeld, lange–termijn veranderingen in het gedrag van de waterstanden. Het begrijpen en voorspellen van zulke lange–termijn veranderingen vereist inzicht in de onderliggende fysica. Ten tijde van het schrijven van dit boek wordt daar (ook) voor waterbouwkundige toepassingen veel wetenschappelijk onderzoek naar gedaan. Voor vorderingen met en uitkomsten van dat onderzoek wordt verwezen naar de literatuur.

A.5 Deterministische processen

De deterministische processen waar we ons in deze paragraaf toe beperken, zijn opgebouwd uit periodieke componenten waarvan de frequenties op voorhand vanuit de fysica bekend zijn. Veruit het meest bekende waterbouwkundige voorbeeld van zo'n proces is de tijdsafhankelijke variatie van de waterstand die hoort bij het getij. We gaan in op een betrekkelijk eenvoudige methode om de amplitudes van de bekende componenten te schatten uit een discrete tijdreeks.

Natuurlijk kan (de uitkomst van) een deterministisch proces ook worden onderworpen aan een Fourieranalyse, net zoals we dat bij een stationair Gaussisch proces hebben gedaan. Het wezenlijke verschil zit in de frequenties van de periodieke componenten die het proces beschrijven. Bij een Fourieranalyse schrijven we het betreffende proces als een oneindige lineaire combinatie van sinusvormige functies (de Fourier–componenten) die onderling orthogonaal zijn en samen een complete set vormen. Deze wiskundige eigenschappen maken het mogelijk om het proces exact weer te geven zonder voorafgaande kennis over de samenstelling en structuur daarvan. Daar staat tegenover dat die wiskundige eigenschappen zich uitsluitend voordoen bij een specifieke verhouding tussen de frequenties van de sinusvormige componenten waarmee we het proces beschrijven. Als het proces is gedefinieerd op een tijdsinterval met duur T of periodiek is met die duur, zijn de frequenties van de componenten gehele veelvouden van $2\pi/T$.

Als we een deterministisch proces willen analyseren dat is opgebouwd uit periodieke componenten met vooraf bekende frequenties, ligt een Fourieranalyse niet per definitie voor de hand. De frequenties van de Fouriercomponenten hoeven immers niet overeen te komen met de frequenties die in het deterministische proces voorkomen. Ontbinding in Fouriercomponenten kan overigens wel een indicatie opleveren van de dominante frequenties door na te gaan welke proces–gebonden frequenties in de buurt liggen van frequenties van Fouriercomponenten met een relatief grote amplitude.

Om de amplitudes van bekende componenten te schatten uit een discrete tijdreeks maken we in deze paragraaf gebruik van de eerder genoemde Kleinste Kwadraten

methode (zie uitdrukkingen (A.41) en (A.42)). Bovendien laten we zien dat deze methode hetzelfde resultaat oplevert als Fourieranalyse indien toegepast op Fourier–componenten.

We gaan uit van een discrete tijdreeks $y_m = y(t_m)$ $(m = 1..M)$ afkomstig van een proces dat wordt beschreven door

$$y(t) = \sum_{k=1}^{K} (C_k \cos \omega_k t + S_k \sin \omega_k t) \tag{A.63}$$

Deze $y(t)$ noemen we het model dat we door variatie van de amplitudes C_k en S_k $(k = 1 \ldots K)$ aan de tijdreeks y_m gaan aanpassen. Daartoe kijken we naar de verschillen ϵ_m tussen tijdreeks en model op tijdstippen tm en we bepalen die amplitudes C_k en S_k $(k = 1 \ldots K)$ waarvoor $\sum \epsilon_m^2$ minimaal is. Dat minimum wordt gevonden voor

$$\frac{\partial}{\partial C_n} \sum_{m=1}^{M} \epsilon_m^2 = \frac{\partial}{\partial S_n} \sum_{m=1}^{M} \epsilon_m^2 = 0 \quad ; \quad n = 1 \ldots K \tag{A.64}$$

met

$$\epsilon_m = y_m - \sum_{k=1}^{K} (C_k \cos \omega_k t_m + S_k \sin \omega_k t_m) \tag{A.65}$$

Uitdrukking (A.64) is een set van $2K$ lineaire vergelijkingen waaruit de amplitudes C_n en S_n $(n = 1..K)$ kunnen worden bepaald. Invullen van (A.65) in (A.64) levert

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial C_n} \sum_{m=1}^{M} \epsilon_m^2 &= 2 \sum_{m=1}^{M} \epsilon_m \frac{\partial \epsilon_m}{\partial C_n} \\ &= -2 \sum_{m=1}^{M} \left(y_m - \sum_{k=1}^{K} (C_k \cos \omega_k t_m + S_k \sin \omega_k t_m) \right) \cos \omega_n t_m \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.66}$$

en

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S_n} \sum_{m=1}^{M} \epsilon_m^2 &= 2 \sum_{m=1}^{M} \epsilon_m \frac{\partial \epsilon_m}{\partial S_n} \\ &= -2 \sum_{m=1}^{M} \left(y_m - \sum_{k=1}^{K} (C_k \cos \omega_k t_m + S_k \sin \omega_k t_m) \right) \sin \omega_n t_m \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.67}$$

voor n=1..K.

We kunnen dit herschrijven als

$$\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{K} q_{n,k}^{(cc)} C_k + \sum_{k=1}^{K} q_{n,k}^{(sc)} S_k = q_n^{(yc)} \\ \sum_{k=1}^{K} q_{n,k}^{(cs)} C_k + \sum_{k=1}^{K} q_{n,k}^{(ss)} S_k = q_n^{(ys)} \end{array} \quad ; \quad n = 1 \ldots K \tag{A.68}$$

waarin

$$\begin{array}{lll} q_{n,k}^{(cc)} = \sum_{m=1}^{M} \cos\omega_k t_m \cos\omega_n t_m & ; & q_{n,k}^{(sc)} = \sum_{m=1}^{M} \sin\omega_k t_m \cos\omega_n t_m \\ q_{n,k}^{(cs)} = \sum_{m=1}^{M} \cos\omega_k t_m \sin\omega_n t_m & ; & q_{n,k}^{(ss)} = \sum_{m=1}^{M} \sin\omega_k t_m \sin\omega_n t_m \end{array} \tag{A.69}$$

en

$$q_n^{(yc)} = \sum_{m=1}^{M} y_m \cos\omega_n t_m \quad ; \quad q_n^{(yc)} = \sum_{m=1}^{M} y_m \sin\omega_n t_m \tag{A.70}$$

Voor numerieke bepaling van de amplitudes C_k en S_k $(k = 1..K)$ is het handig om (A.68) in matrix–vorm te schrijven, bijvoorbeeld

$$\left(\begin{array}{c|c} q_{n,k}^{(cc)} & q_{n,k}^{(sc)} \\ \hline q_{n,k}^{(cs)} & q_{n,k}^{(ss)} \end{array}\right) \left(\frac{C_k}{S_k}\right) = \left(\frac{q_n^{(yc)}}{q_n^{(ys)}}\right) \tag{A.71}$$

(waarbij de eerste index van q, C en S verwijst naar een rij en de tweede naar een kolom).

Alle coëfficiënten q in bovenstaande uitdrukkingen zijn bekend uit de componenten waaruit het betreffende proces opgebouwd wordt verondersteld en de tijdreeks y_m. De onbekenden zijn de amplitudes C_k en S_k $(k = 1..K)$ en deze kunnen worden berekend door (A.71) te inverteren. De resulterende amplitudes worden Kleinste Kwadraten schatters genoemd.

Als de tijdreeks y_m equidistant is in de zin dat $t_{m+1} - t_m = \Delta t$ voor alle $m = 1 \ldots M-1$, zijn de coëfficiënten q te zien als benaderingen van integralen over de tijd. Zo is

$$q_{n,k}^{(cc)} = \sum_{m=1}^{M} \cos\omega_k t_m \cos\omega_n t_m \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1 - \Delta t/2}^{t_M + \Delta t/2} \cos\omega_k t \cos\omega_n t \mathrm{d}t \tag{A.72}$$

en zo'n benadering kan ook voor de andere q worden gegeven. Als bovendien de frequenties ω gehele veelvouden zijn van $2\pi/(t_M - t_1 + \Delta t)$ en daarmee overeenkomen met Fouriercomponenten, geldt dat

$$q_{n,k}^{(cs)} = q_{n,k}^{(sc)} = 0 \quad ; \quad q_{n,k}^{(cc)} = q_{n,k}^{(ss)} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ; \quad n \neq k \\ \frac{t_M - t_1 + \Delta t}{2\Delta t} & ; \quad n = k \end{array} \right. \tag{A.73}$$

en wordt de matrix in (A.71) een diagonaalmatrix. Voor de bijbehorende amplitudes vinden we

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2}{t_M - t_1 + \Delta t} \int_{t_1 - \Delta t/2}^{t_M + \Delta t/2} y_m \cos \omega_k t \mathrm{d}t \\ S_k &= \frac{2}{t_M - t_1 + \Delta t} \int_{t_1 - \Delta t/2}^{t_M + \Delta t/2} y_m \sin \omega_k t \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{A.74}$$

Dat is identiek aan wat we met Fourieranalyse gevonden zouden hebben (zie uitdrukking (A.25)).

Net als bij de Fourieranalyse geldt ook hier dat de omvang M van de tijdreeks een bovengrens stelt aan het aantal componenten waarvoor we amplitudes kunnen bepalen. Indien niet $M \geq 2K$ is de matrix in (A.71) singulier.

Tot slot merken we nog op dat de Kleinste Kwadraten methode ook kan worden toegepast als de tijdreeks y_m niet equidistant is en ook als het model $y(t)$ er volstrekt anders uitziet dan een lineaire combinatie van periodieke componenten. Afhankelijk van $y(t)$ kunnen de vergelijkingen $\partial \sum \epsilon_m^2 / \partial x_k = 0$ waaruit de modelparameters x_k worden bepaald, zodanig ingewikkelde niet–lineaire vormen aannemen dat inzet van iteratieve methoden onvermijdelijk is. Een tamelijk robuuste is de simplex–methode van Nelder and Mead (1965) die in diverse numerieke bibliotheken beschikbaar is.

B

Maximum Likelihood

De Maximum Likelihood methode (in het Nederlands de methode van de meest aannemelijke schatter genoemd), is een methode die in de statistiek wordt gebruikt om de parameters van een kansverdeling te schatten aan de hand van waarnemingen aan die verdeling. Als die waarnemingen afkomstig zijn van dezelfde populatie, zijn ze identiek verdeeld. Dat is één van de twee basale uitgangspunten van de methode. De andere is dat de waarnemingen in statistische zin onderling onafhankelijk zijn.

Als $f(x)$ de kansdichtheid van de betreffende verdeling is en er N waarnemingen, dan is de gezamenlijke kansdichtheid van deze set waarnemingen gelijk aan $f(x)^N$. Deze set wordt gezien als één trekking uit een N–dimensionaal verdeelde populatie met kansdichtheid $f(x)^N$. Van die enkele trekking die we hebben (de set), kennen we de bijbehorende kansdichtheid niet, maar het meest waarschijnlijk is dat deze hoort bij de hoogste kansdichtheid. De parameters van de kansdichtheidsfunctie $f(x)$ worden zo gekozen dat de waargenomen set past bij het maximum van $f(x)^N$.

Ter illustratie passen we de Maximum Likelihood methode toe om de parameters van de Weibull verdeling te schatten uit N waargenomen pieken $x_n \quad (n = 1 \ldots N)$ van een Gaussisch proces (zie appendix A). Ter wille van de eenvoud gaan we uit van een voorgeschreven drempel x_0. Daarmee ligt de definitie van een piek vast en hoeven we nog slechts de parameters σ en α te schatten.

Als deze pieken inderdaad allemaal Weibull verdeeld zijn (met identieke parameters) ´n onderling onafhankelijk zijn, wordt hun gezamenlijke kansdichtheid L gegeven door

$$L(\alpha, \sigma) = \prod_{n=1}^{N} f(x_n) \tag{B.1}$$

Het product in het rechter lid van deze uitdrukking is niets anders dan $f(x)^N$ uitgewerkt voor de set van N pieken. Voorts wordt L de likelihood functie genoemd.

Deze functie is alleen afhankelijk van de parameters van, in dit geval, de Weibull verdeling. Als de set pieken daadwerkelijk hoort bij de hoogste gezamenlijke kansdichtheid, dan moeten de waarden van de parameters σ en α zodanig zijn dat L daarvoor een maximum bereikt. Met andere woorden, volgens de Maximum Likelihood methode vinden we de meest waarschijnlijke waarden van de parameters ter plaatse van het maximum van L. Dat maximum vinden we bij

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0 \tag{B.2}$$

Omdat L een product is, kan uitwerking van (B.2) behoorlijk arbeidsintensief zijn, zeker bij grote N. Daarom wordt doorgaans gewerkt met de logaritme van L in plaats van met L zelf. Dat maakt voor de schattingen van de parameters niets uit. Omdat

$$\frac{\partial L}{\partial \bullet} = L \frac{\partial \ln L}{\partial \bullet} \tag{B.3}$$

en $L > 0$ voor alle $x > x_0$, bereikt $\ln(L)$ voor dezelfde σ en α een maximum als L.

Voor de log–likelihood functie $\ln(L)$ vinden we

$$\ln L = \sum_{n=1}^{N} \ln\left(f(x)\right) = N \ln \frac{\alpha}{\sigma} + (\alpha - 1) \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{x_n - x_0}{\sigma} - \sum_{n=1}^{N} \exp\left(\alpha \ln \frac{x_n - x_0}{\sigma}\right) \tag{B.4}$$

en we gaan op zoek naar die σ en α waarvoor geldt dat

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0 \tag{B.5}$$

Dit zijn twee niet–lineaire vergelijkingen waar geen analytische oplossing voor is. Om de beide parameters toch te kunnen schatten, maken we gebruik van de Newton–Raphson iteratie. Voor toepassing van die methode is het handig om de log–likelihood functie te formuleren in termen van de parameter ξ, gedefinieerd als

$$\xi = -\alpha \ln \sigma \tag{B.6}$$

waarmee

$$\ln\left(L(\alpha, \xi)\right) = N \ln \alpha + N\xi + (\alpha - 1) \sum_{n=1}^{N} \ln(x_n - x_0) - e^{\xi} \sum_{n=1}^{N} \exp\left(\alpha \ln(x_n - x_0)\right) = 0 \tag{B.7}$$

en in plaats van (B.5) bepalen we

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \tag{B.8}$$

Combinatie van (B.7) en (B.8) geeft

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = N - e^{\xi} \sum_{n=1}^{N} \exp\left(\alpha \ln(x_n - x_0)\right) = 0 \tag{B.9}$$

en

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{N}{\alpha} + \sum_{n=1}^{N} \ln(x_n - x_0) - e^{\xi} \sum_{n=1}^{N} \ln(x_n - x_0) \exp\left(\alpha \ln(x_n - x_0)\right) = 0 \tag{B.10}$$

Eliminatie van ξ uit deze beide vergelijkingen levert

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \ln(x_n - x_0) - \frac{\mu_1}{\mu_2} = 0 \tag{B.11}$$

waarin

$$\mu_m(\alpha) = \sum_{n=1}^{N} \ln^m(x_n = x_0) \exp\left(\alpha \ln(x_n - x_0)\right) \tag{B.12}$$

In het linker lid van (B.11) komt alleen α als onbekende voor. We noemen dit linker lid $h(\alpha)$ en we gebruiken de Newton–Raphson methode om die α te vinden waarvoor $h(\alpha) = 0$. Deze methode gaat uit van een eerste orde Taylor benadering van h voor $\alpha = \alpha^{(j)}$, gegeven door

$$h\left(\alpha^{(j)} + \Delta\alpha\right) = h\left(\alpha^{(J)}\right) + \Delta\alpha \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^{(j)}} \tag{B.13}$$

Hierin is $\alpha^{(j)}$ een schatting van de gezochte α. Als bovenstaande benadering correct zou zijn, kunnen we die α vinden uit $h(\alpha^{(j)} + \Delta\alpha) = 0$. Dit levert een correctie

$$\Delta\alpha = -h\left(\alpha^{(j)}\right) \left(\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^{(j)}} \right)^{-1} \tag{B.14}$$

op voor de schatting $\alpha^{(j)}$. Op deze manier worden achtereenvolgende schattingen gevonden uit

$$\alpha^{(j+1)} = \alpha^{(j)} + \Delta\alpha = \alpha^{(j)} - h\left(\alpha^{(j)}\right) \left(\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^{(j)}} \right)^{-1} \tag{B.15}$$

waarin, zoals volgt uit (B.11),

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} + \frac{\mu_1^2}{\mu_0^2}\right) \tag{B.16}$$

Deze iteratie kan worden gestopt zodra het verschil tussen twee opeenvolgende schatting zeer klein is ten opzichte van die schattingen zelf.

Om vervolgens de parameter σ te bepalen, bereken we eerst ξ door de gevonden α te substitueren in (B.9). Dit geeft

$$\xi = -\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp\left(\alpha\ln(x_n - x_0)\right)\right) \tag{B.17}$$

waarin, met (B.6),

$$\sigma = \exp\left(-\frac{\xi}{\alpha}\right) \tag{B.18}$$

C

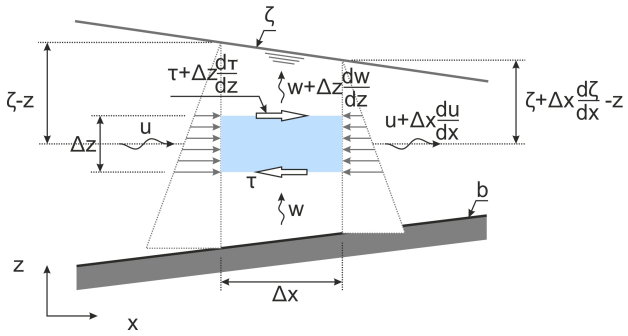
Impulsbalans voor een vertikaal vlak

In de waterbouwkunde kunnen we voor veel vraagstukken met betrekking tot stroming in een open waterloop volstaan met de diepte–geïntegreerde ondiep water vergelijkingen, maar het kan ook nodig zijn om inzicht te hebben in de verdeling van de horizontale snelheid over de waterkolom. Voorbeelden daarvan zijn windopzet (zie paragraaf 3.6.2) en stroming in een rivierbocht (zie paragraaf 3.6.3). Om die verticale verdeling te beschrijven, leiden we de impulsbalans nogmaals af, maar deze keer gebruiken we een blokje uit de waterkolom als controlevolume in plaats van de hele waterkolom ineens.

Het controlevolume waar we ons op richten, is geschetst in figuur C.1. Het symbool u staat hierbij voor de stroomsnelheid op een specifieke hoogte: $u = u(z)$. Als we kijken naar de overdracht van impuls naar en van dit volume, zijn er overeenkomsten met de eerdere beschouwing van de volledige waterkolom en ook enkele toevoegingen. Net als bij de waterkolom hebben we de hydrostatische druk aan weerszijden van het volume. Daarnaast zijn er schuifspanningen langs de boven- en onderzijde van het volume als de horizontale stroomsnelheid net boven of onder dat volume niet gelijk is aan die net erin. Tot slot is er de advectieve overdracht van impuls (overdracht als gevolg van de stroming zelf).

Vergeleken met de eerdere beschouwing over de volledige waterkolom (paragraaf 2.4) is advectie voor een blokje uit die kolom iets uitgebreider. Voor de horizontale impulsbalans kijken we naar waterdeeltjes met een horizontale snelheidscomponent die het controlevolume in– of uitgaan. Dat kan via de zijwanden van het volume, maar ook via de boven– en onderkant als die waterdeeltjes naast een horizontale ook een verticale snelheidscomponent hebben. Zodoende bestaat advectie in dit geval uit twee componenten: horizontale overdracht van horizontale impuls (via de zijwanden) en verticale overdracht van horizontale impuls (via de boven– en onderzijde).

Bij de volledige waterkolom hebben we ook rekening gehouden met een normaal-



Figuur C.1: Controlevolume (grijs) in een primair horizontale stroming met de daarop werkende hydrostatische druk, schuifspanningen en de in- en uitgaande stroming, zowel horizontaal als vertikaal.

spanning tegen de onderzijde. Dat was daar relevant omdat die normaalspanning vanwege de bodemhelling een horizontale component heeft. Het controlevolume waar we echter nu naar kijken, heeft horizontale boven- en onderzijden. De normaalspanning daarop draagt niet bij aan de horizontale impulsbalans.

Samenvattend komen we tot de volgende bijdragen aan de impulsbalans:

- hydrostatische drukken aan weerszijden van het controlevolume;
- schuifspanningen aan boven- en onderzijde
- advectie samengesteld uit twee componenten.

De gemiddelde hydrostatische druk tegen de zijwanden van het volume is gelijk aan de druk halverwege de hoogte van dat volume. Voor de linker zijwand van het volume is die druk gelijk aan $\rho g(\zeta - z)$ (zie figuur C.1). De resultante F_h van de drukken aan weerszijden komt hiermee op

$$F_h = \rho g(\zeta - z)\Delta z - \rho g\left(\zeta + \Delta x\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} - z\right)\Delta z = -\rho g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\Delta x\Delta z \tag{C.1}$$

Voor de resultante F_w van de schuifspanning aan boven– en onderzijde van het controlevolume vinden we

$$F_w = \left(\tau + \Delta z\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z}\right)\Delta x - \tau\Delta x = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z}\Delta x\Delta z \tag{C.2}$$

De resultante $F_{a,h}$ voor horizontale overdracht van impuls lijkt sterk op die bij de afleiding van de impulsbalans voor de volledige waterkolom. Het wezenlijke verschil is dat de afmeting van het controlevolume in x-richting niet verandert. De resultante luidt

$$F_{a,h} = \rho u^2\Delta z - \rho\left(u + \Delta x\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Delta z = -2\rho u\frac{\partial u}{\partial z}\Delta x\Delta z \tag{C.3}$$

Deze $F_{a,h}$ is één van de twee componenten van advectie. De andere is de overdracht van horizontale impuls in verticale richting. De resultante hiervan noteren we met

$F_{a,v}$ en deze is

$$\begin{aligned} F_{a,v} &= \rho u w \Delta x - \rho \left(u + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(w + \Delta x \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Delta x \\ &= -\rho w \frac{\partial u}{\partial z} \Delta x \Delta z - \rho w \frac{\partial w}{\partial z} \Delta x \Delta z \end{aligned} \tag{C.4}$$

Hiermee zijn alle bijdragen aan de overdracht van horizontale impuls van en naar het controlevolume gekwantificeerd. Deze zijn met elkaar in balans indien

$$F_h + F_w + F_{a,h} + F_{a,v} = 0 \tag{C.5}$$

Met (C.1)–(C.4) en na delen door $\rho \Delta x \Delta z$ kunnen we dit schrijven als

$$2u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{d\zeta}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{dz} \tag{C.6}$$

Net als bij de beschouwing van de volledige waterkolom kunnen we bovenstaande balans enigszins vereenvoudigen door ook naar continuïteit te kijken. Met de veronderstelling van onsamendrukbaarheid vinden we de continuïteitsvergelijking voor het controlevolume door de totale uitwisseling van water tussen dat volume en z'n omgeving gelijk te stellen aan nul. Dit geeft

$$u \Delta z - \left(u + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta z + w \Delta x \left(w + \Delta z \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Delta x = 0 \tag{C.7}$$

ofwel, na uitwerken en delen door $-\Delta x \Delta z$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{C.8}$$

Gecombineerd met (C.6) levert dit

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z} \tag{C.9}$$

voor de horizontale impulsbalans voor stationaire stroming in één horizontale richting.

In het bijzondere geval dat de waterdiepte in stroomrichting niet verandert, is het linker lid van (2.29) gelijk aan nul. Dat doet zich bijvoorbeeld voor bij stationaire stroming in een rivier waarvan de dwarsdoorsnede in stroomrichting niet verandert en de waterspiegel in langsrichting dezelfde helling heeft als de bodem. De natte dwarsdoorsnede van de waterloop verandert dan niet in langsrichting. De richting van de stroming is in dat geval parallel aan de bodem zodat

$$\frac{w}{u} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} \tag{C.10}$$

Voor het linker lid van (2.29) kunnen we hiermee schrijven dat

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{C.11}$$

De term tussen haken in bovenstaande uitdrukking is de verandering in stroomrichting van de component van de snelheid evenwijdig aan de bodem. Als de natte dwarsdoorsnede van de waterloop in langsrichting niet verandert, doet deze component van de snelheid dat ook niet en is de term tussen haken in (C.11) gelijk aan nul. Het linker lid van (2.29) is daarmee ook gelijk aan nul. Wat overblijft is de horizontale impulsbalans voor zogeheten horizontaal uniforme, stationaire stroming (geen verandering in langsrichting en geen verandering met de tijd):

$$0 = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z} \tag{C.12}$$

Waar in dit boek de verticale verdeling van de horizontale stroomsnelheid aan de orde komt, gaan we er steeds vanuit dat de stroming bij redelijke benadering horizontaal uniform is. Uitdrukking (C.12) vormt de basis voor de beschrijving van die verdeling. Meer complexe situaties komen in dit boek niet aan bod.

Om uit (C.12) de snelheidsverdeling te kunnen bepalen, moet een relatie worden gelegd tussen deze snelheid en de schuifspanning. Bij de diepte geïntegreerde impulsbalans hebben we dat gedaan voor de gemiddelde stroomsnelheid en de bodemschuifspanning. Voor de lokale impulsbalans (C.12) richten we ons op de lokale snelheid en schuifspanning.

Een voorstelling van de relatie tussen snelheid en schuifspanning kunnen we krijgen door de waterkolom opgebouwd te denken uit horizontale lagen. Als de snelheid in één laag afwijkt van die in een aangrenzende laag treedt als gevolg van moleculaire viscositeit wrijving tussen beide lagen op. In laminaire stroming, waarbij er geen uitwisseling is tussen lagen, is dit effect bepalend voor de schuifspanning. Bij turbulente stroming daarentegen, gaat de voorstelling van stroming in lagen niet op. We kunnen de waterkolom dan nog steeds in gedachten opdelen in lagen, maar er is wel sprake van uitwisseling van waterdeeltjes tussen aangrenzende lagen. Die uitwisseling komt voort uit fluctuaties in de beweging van waterdeeltjes rond een gemiddelde dat we zien als de stroming en de fluctuaties staan daar loodrecht op.

De fluctuaties uiten zich als een schuifspanning tussen de lagen waarin we de waterkolom opgebouwd denken. Als deeltjes uit één laag terecht komen in een aangrenzende, minder snel stromende laag en omgekeerd, werkt dat reducerend op het snelheidsverschil tussen die lagen. Dit verschijnsel heeft het karakter van viscositeit en wordt turbulentie viscositeit genoemd[103]. Het is een eigenschap van de stroming. Daarin onderscheidt het zich wezenlijk van moleculaire viscositeit dat een eigenschap is van de vloeistof.

[103]In de literatuur komt ook de term 'turbulente viscositeit' voor. Dat suggereert ten onrecht dat viscositeit turbulent kan zijn. De Engelse term is 'eddy viscosity'.

Om dit effect te kwantificeren, kijken we nogmaals naar de overdracht van horizontale impuls in verticale richting door de onderkant van het controlevolume dat is geschetst in figuur C.1. Per eenheid van oppervlak van die onderkant wordt de overdracht van impuls gegeven door ρuw. Bij de beschrijving van het effect van turbulentie op de gemiddelde stroming, zien we de snelheid op een willekeurig moment als de som van een gemiddelde $\overline{u}$ en een turbulente fluctuatie u':

$$u = \overline{u} + u' \tag{C.13}$$

Dit wordt Reynolds decompositie genoemd, naar de bedenker Osbourne Reynolds (1842-1912). Met dit onderscheid tussen een gemiddeld en een fluctuerend deel van de snelheid is de advectieve overdracht van impuls op het niveau van turbulente fluctuaties gelijk aan

$$\rho(\overline{u} + u')(\overline{w} + w') = \rho\overline{u}\overline{w} + \rho u'\overline{w} + \rho\overline{u}w' + \rho u'w' \tag{C.14}$$

Middeling hiervan over die turbulente fluctuaties levert

$$\rho\overline{(\overline{u} + u')(\overline{w} + w')} = \rho\overline{u}\overline{w} + \rho\overline{u'w'} \tag{C.15}$$

(bedenk dat de gemiddelden van u' en w' per definitie gelijk zijn aan nul).

Als we (C.9) interpreteren als de impulsbalans gemiddeld over turbulente fluctuaties, is $\rho\overline{u}\overline{w}$ onderdeel van de advectieve termen in het linker lid van deze balans. Het gedeelte $\rho\overline{u'w'}$ is het aandeel van turbulente fluctuaties in de overdracht van impuls en dat beschrijven we als een schuifspanning:

$$\tau = \rho\overline{u'w'} \tag{C.16}$$

Dit is de zogeheten Reynoldse schuifspanning of schijnbare schuifspanning. In turbulente stroming is deze schuifspanning veel groter dan die ten gevolge van moleculaire viscositeit. In de beschrijving van dit type stroming kan het effect van moleculaire viscositeit doorgaans worden verwaarloosd.

Om de balans (C.9) sluitend te maken, is het nodig om $\overline{u'w'}$ te relateren aan de snelheidscomponenten u en w (gemiddeld over turbulente fluctuaties). Dat is voor het eerst gedaan door de Franse wetenschapper Joseph Boussinesq (1842-1929). Hij legde een verband tussen gradiënten in die snelheidscomponenten en $\overline{u'w'}$. Qua vorm lijkt dat verband op de relatie tussen schuifsppanning en snelheidsgradiënt bij laminaire stroming:

$$\frac{\tau_{\text{lam}}}{\rho} = \nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} \tag{C.17}$$

waarin ν de moleculaire viscositeit is. Voor turbulente condities introduceerde Boussinesq het concept turbulentie viscositeit.

In de literatuur zijn diverse modellen te vinden waarin turbulentie viscositeit is gerelateerd aan snelheidsgradiënten. Zo heeft de Duitse ingenieur Ludwig Prandtl

(1875-1953) in het begin van de 20e eeuw de relatie tussen de Reynoldse schuifspanning en de gemiddelde stroomsnelheid in de buurt van een wand onderzocht. Zijn beschrijving staat bekend als het mengweglengte concept. Vertaald naar het denkbeeld van een gelaagde waterkolom komt het er ruwweg op neer dat de omvang van turbulente fluctuaties evenredig is met het verschil in de gemiddelde snelheid tussen lagen, ofwel

$$u' \propto \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z} \tag{C.18}$$

De evenredigheidsconstante in deze relatie hangt af van de afstand $z - b$ tot de wand. Die afstand beperkt de lengte waarover zulke fluctuaties zich kunnen ontwikkelen. Volgens Prandtl is

$$u' = l^2 \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z} \quad ; \quad l = \kappa(z - b) \tag{C.19}$$

Hierin is l de mengweglengte en κ de constante van Von Karman ($\kappa \approx 0,41$), genoemd naar de wis– en natuurkundige Theodore von Karman (1881–1963) die in zijn onderzoek naar turbulentie in stromingen nabij een vaste wand onder meer de evenredigheid (C.19) aan de orde heeft gesteld.

Voorts veronderstelde Prandtl dat de omvang van turbulente fluctuaties in alle richtingen van dezelfde orde van grootte zijn, dus dat $|u'| = |w'|$. Gecombineerd met (C.16)–(C.19) levert dat

$$\tau = \rho l^2 \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z} \left| \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z} \right| \tag{C.20}$$

De absolute waarde is in bovenstaande uitdrukking toegevoegd om ervoor te zorgen dat het teken van τ in overeenstemming is met de gradiënt van de stroomsnelheid ter hoogte van de wand van het controlevolume. In relatie (2.30) tussen de dieptegemiddelde snelheid en de bodemschuifspanning hebben we dat ook gedaan.

Als we uitdrukking (C.20) voor de Reynoldse schuifspanning herschrijven in de vorm (C.17), krijgen we

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu_t \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} \quad ; \quad \nu_t = l^2 \left| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} \right| \tag{C.21}$$

waarin ν_t de turbulentie viscositeit is[104]. De u in (C.21) staat voor de snelheid na middeling over turbulente fluctuaties. Omdat we het in het navolgende steeds over de gemiddelde stroomsnelheid hebben, laten we de overstreping gemakshalve weg.

Uitdrukking (C.21) met de mengweglengte l volgens (C.19) is van toepassing op stroming op betrekkelijk korte afstand van een vaste wand. Op enige afstand van

[104]Moleculaire viscositeit wordt doorgaans aangeduid met het symbool ν. De toevoeging van het subscript t geeft aan dat het om turbulentie viscositeit gaat. In de literatuur wordt daarvoor ook A_v of A_z gebruikt, met name in de oceanografie.

de wand is er vanwege het turbulente karakter van de stroming wel een schijnbare schuifspanning, maar de mengweglengte neemt niet meer lineair toe met de afstand tot de wand. In het bovenste deel van een waterkolom in een open waterloop heeft ook de afstand tot het vrije oppervlak invloed op de mengweglengte. Hiermee wordt rekening gehouden in een uitbreiding van het mengweglengte concept van de nabijheid van een vaste wand naar de hele waterkolom. In deze uitbreiding wordt de mengweglengte voor een stationaire, verhang–gedreven, horizontaal uniforme stroming gegeven door

$$l = \kappa(z-b)\sqrt{\frac{\zeta - z}{h}} \tag{C.22}$$

Zeer dicht bij de wand, dus voor $\zeta - z \approx h$, nadert (C.22) tot $l = \kappa(z-b)$.

Met (C.21) en (C.22) hebben we een relatie verkregen tussen schuifspanning en stroomsnelheid voor stationaire, verhang-gedreven stromingen. Hiermee kunnen we de impulsbalans (C.12) voor dit type stroming verder uitwerken. Invullen van (C.21) in deze balans geeft

$$0 = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\nu_t \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) \tag{C.23}$$

We integreren deze uitdrukking naar z met de randvoorwaarde dat er aan het wateroppervlak ($z = \zeta$) geen schuifspanning heerst. Een schuifspanning aan het oppervlak doet zich bijvoorbeeld voor als de stroming (deels) door wind wordt aangedreven. We beperken ons in deze paragraaf echter tot verhang–gedreven stroming. Na integratie vinden we

$$\nu_t = \left(\kappa(z-b)\sqrt{\frac{\zeta - z}{h}}\right)^2 \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right| \tag{C.24}$$

Combinatie met uitdrukking (C.21) voor de turbulentie viscositeit leidt tot

$$l^2 \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = -g\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}(\zeta - z) \tag{C.25}$$

Invullen van (C.22) voor de mengweglengte en worteltrekken levert

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \pm\frac{1}{\kappa}\sqrt{gh\left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\right|}\frac{1}{z-b} \tag{C.26}$$

De $\pm$ in deze uitdrukking komt voort uit het gebruik van de absolute waarde van de drukgradiënt in (C.26) (in (C.25) komt die absolute waarde niet voor). Dat was nodig om wortel te kunnen trekken, maar daarmee is informatie over de richting van de stroming buiten beeld geraakt.

Nogmaals integreren geeft

$$u = \pm\frac{1}{\kappa}\sqrt{gh\left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\right|}\ln(z-b) + I_c \tag{C.27}$$

waarin I_c een integratieconstante is.

Dit resultaat staat bekend als het logaritmisch snelheidsprofiel voor stationaire, horizontaal uniforme, verhang–gedreven, turbulente stroming. Het treedt op over dat deel van de waterkolom waar turbulentie tot ontwikkeling kan komen. Dicht bij de wand is dat niet het geval. In een dunne laag tegen de wand aan is de stroming laminair. Dit is de zogeheten laminaire sublaag. De dikte ervan is gerelateerd aan de ruwheid van de wand. Het snelheidsprofiel wijkt daar substantieel af van het log-profiel (C.27).

In de meeste waterbouwkundige toepassingen hebben we te maken met turbulente stroming en zijn we niet geïnteresseerd in de details van de laminaire sublaag. Over de hele waterkolom wordt gerekend met het log-profiel en de integratieconstante I_c in (C.27) wordt bepaald door extrapolatie van het log-profiel vanuit het turbulente deel van de waterkolom tot in de laminaire sublaag, ook al geeft het in die laag geen juist beeld van het werkelijke snelheidsverloop. Bij die extrapolatie vinden we dat de snelheid volgens (C.27) gelijk wordt aan nul op afstand z_0 vanaf de wand. De grootte van z_0 is afhankelijk van de dikte van de sublaag en daarmee van de ruwheid van de bodem. Aan dit resultaat wordt de randvoorwaarde

$$u(z = b + z_0) = 0 \tag{C.28}$$

ontleend waarmee de integratieconstante I_c kan worden bepaald. Het resultaat luidt

$$u = \pm\frac{1}{\kappa}\sqrt{gh\left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\right|}\ln\frac{z-b}{z_0} \quad ; \quad z \geq b + z_0 \tag{C.29}$$

De bijbehorende bodemschuifspanning vinden we door de snelheidsgradiënt volgens (C.26) samen met de mengweglengte (C.22) in te vullen in (C.20) en het resultaat te evalueren voor het nuldoorgangsniveau $b + z_0$ van de snelheid. Dit geeft

$$\frac{\tau_b}{\rho} = -g(h - z_0)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} \approx -gh\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} \tag{C.30}$$

Precies hetzelfde resultaat wordt verkregen door de impulsbalans (C.12) te integreren van bodem ($z = b + z_0$) tot oppervlak ($z = \zeta$) met als randvoorwaarde dat de schuifspanning aan het oppervlak gelijk is aan nul. Bij een stroming die bijvoorbeeld (deels) door wind wordt gedreven, is de schuifspanning aan het oppervlak niet gelijk aan nul, maar bij een uitsluitend verhang–gedreven stroming wel.

Het verloop van de turbulentie viscositeit over de waterkolom krijgen we door (C.26) en (C.22) in te vullen in het rechter deel van (C.21). Samen met relatie (C.30)

tussen verhang en bodemschuifspanning leidt dit tot

$$\nu_t(z) = \kappa \frac{(z-b)(\zeta - z)}{h} u_* \quad ; \quad u_* = \sqrt{\frac{|\tau_b|}{\rho}} \tag{C.31}$$

Hierin is u_* de schuifspanningssnelheid. Deze grootheid is direct gerelateerd aan de bodemschuifspanning en draagt de dimensie van snelheid. Dat verklaart de naam. Deze u_* wordt veelvuldig gebruikt in de beschrijving van turbulentie die wordt gegenereerd vanuit wandwrijving. Met de definitie van u_* en de relatie (C.31) kunnen we (C.29) schrijven als

$$u(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z-b}{z_0} \quad ; \quad z \geq z_0 + b \tag{C.32}$$

Dit is de vorm waarmee het log-profiel gebruikelijk wordt weergegeven. Het toont het verband tussen het verticale verloop van de horizontale snelheid en de bodemschuifspanning.

Verder blijkt uit (C.31) dat de turbulentie viscositeit parabolisch verloopt over de waterkolom. Dat is typerend voor een verhang–gedreven stroming zoals we die in rivieren en kanalen tegenkomen en bij het getij. Ook voor stromingen die mede door andere krachten worden aangedreven, zoals wind of een dichtheidsgradiënt, is het parabolische verloop vaak een goede benadering van de werkelijkheid. Echter, in zulke gevallen kan de diepte–gemiddelde turbulentie viscositeit afwijken van $\kappa u_* h/6$ wat het volgens (C.31) is.

D

Excentriciteit en korrelspanning

In hoofdstuk 8 over constructie met een waterkerende functies is kantelen genoemd als één van de mogelijke faalmechanismen (paragraaf 8.5). Dit mechanisme doet zich voor zodra de korrelspanning onder het grondvlak van de constructie bij één van de uiteinden van dat grondvlak gelijk wordt aan nul (zie paragraaf 8.5.1). Voor de controle op kantelen is in die paragraaf het begrip excentriciteit geïntroduceerd, genoteerd als e. Dat is de afstand tussen het midden van het grondvlak van de constructie en het snijpunt met dat grondvlak van de werklijn van de resultante van de belastingen op de constructie (exclusief de korrelspanning).

Het verband tussen de excentriciteit e en de belastingen op de constructie (exclusief de korrelspanning) is in paragraaf 8.5.1 gegeven in uitdrukking (8.41):

$$e = \frac{M_v(\alpha) + M_h}{F_v} - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) L$$

waarin L de lente van het grondvlak van de constructie, F_v de resultante van de verticale belasting op de constructie (exclusief de korrelspanning), $M_v(\alpha)$ het bijbehorende moment ten opzichte van een punt dat in horizontale richting op een afstand αL uit de rand van het grondvlak ligt en M_h is het moment ten opzichte van dat zelfde punt van alle horizontale belastingen op de constructie.

Voor verticaal evenwicht is het nodig dat de resultante van de korrelspanning even groot is als de verticale component van de resultante van alle andere belastingen op de constructie, maar tegengesteld gericht. Daarnaast is het voor evenwicht van momenten noodzakelijk dat de bijbehorende werklijnen samenvallen. Dat wil zeggen dat de werklijn van de resultante van de korrelspanning het grondvlak van de constructie ook op een afstand e uit het midden snijdt en ook aan dezelfde kant van dat midden (dit is te zien in figuur 8.22, ook al is de resultante van de korrelspanning in die figuur niet getekend).

Een en ander betekent dat de excentriciteit e ook kan worden uitgedrukt in termen van de extreme korrelspanningen (dat zijn de korrelspanningen aan de uiteinden van het grondvlak van de constructie). Met de aanname dat dit grondvlak oneindig stijf is en dat het korrelskelet onder de constructie lineair elastisch gedrag vertoont, verloopt de korrelspanning onder het grondvlak lineair en wordt dat verloop dus volledig[105] beschreven met de beide uitersten (of een willekeurig ander paar van waarden).

Die extreme korrelspanningen worden gegeven door (8.20):

$$\sigma_1 = (6\alpha - 4)\frac{F_v}{BL} + \frac{M_v(\alpha) + M_h}{BL^2/6}$$
$$\sigma_2 = (2 - 6\alpha)\frac{F_v}{BL} - \frac{M_v(\alpha) + M_h}{BL^2/6}$$

(met σ_1 en σ_2 de extreme korrelspanningen en B de breedte van het grondvlak van de constructie) en daaruit volgt dat

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = (6\alpha - 3)\frac{F_v}{BL} + \frac{M_v(\alpha) + M_h}{BL^2/6} \tag{D.1}$$

en

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{F_v}{BL} \tag{D.2}$$

Combinatie van beide geeft, na vermenigvuldiging met $L/6$,

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)\frac{1}{6}L = \frac{M_v(\alpha) + M_h}{F_v} - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \tag{D.3}$$

Kortom,

$$e = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)\frac{1}{6}L \tag{D.4}$$

Al eerder hebben we aangegeven dat de grens tussen wel of niet kantelen zich voordoet bij $e = -L/6$ of $e = L/6$, maar ook bij $\sigma_1 = 0$ of $\sigma_2 = 0$. Die twee zijn identiek. Immers, uit (D.4) blijkt dat

$$\begin{aligned} \sigma_1 = 0 \quad &\rightarrow \quad e = -L/6 \\ \sigma_2 = 0 \quad &\rightarrow \quad e = L/6 \end{aligned} \tag{D.5}$$

waaruit tevens volgt dat $\sigma_1 < 0$ samen gaat met $e < -L/6$ en $\sigma_2 < 0$ met $e > L/6$[106]. Dit houdt in dat als blijkt dat het voor evenwicht van momenten

[105] Het heeft helemaal niets met excentriciteit van doen (hoewel?), maar is wel een leuk weetje: het woord *volledig* is eigenlijk met zichzelf in conflict. Vol en ledig gaan niet samen. In taalkundige zin is zo'n betekenisvolle combinatie van tegenstellingen een stijlfiguur met de naam oxymoron. En om het helemaal leuk te maken: ook oxymoron is een oxymoron (kijk maar naar de herkomst van de term uit het oud Grieks).

[106] Dit geldt zolang $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$, ofte wel dat de netto korrelspanning opwaarts is. Zodra dat niet het geval is, drijft de constructie op.

en verticale belastingen nodig is dat één van de extreme korrelspanningen een trekspanning is, sprake is van kantelen.

Het verband tussen de extreme korrelspanningen en de excentriciteit is niet beperkt tot identificatie van de grens tussen wel of niet kantelen. Zoals in deze bijlage aangegeven, zijn zowel de extreme korrelspanningen als de excentriciteit afhankelijk van de resultante verticale belasting F_v en de som van momenten $M_v(\alpha)+M_h$ (en de afmetingen B en L van het grondvlak van de constructie). Dat is achtereenvolgens weergegeven in (8.20) en (8.41). Combinatie van deze beide uitdrukkingen leidt, na enig herleiden, tot

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\frac{F_v}{BL^2/6}\left(\frac{1}{6}L - e\right)\\ \sigma_2 &= -\frac{F_v}{BL^2/6}\left(\frac{1}{6}L + e\right)\end{aligned} \tag{D.6}$$

Ook hieruit valt af te leiden dat als sprake is van kantelen (dus als $|e| > L/6$) de extreme korrelspanningen σ_1 en σ_2 een verschillend teken hebben. Het laat ook zien dat als kantelen niet aan de orde is, de extreme korrelspanningen niet alleen een gelijk teken hebben, maar dat dit teken ook tegengesteld is aan dat van F_v. Dat is logisch omdat de resultante van de korrelspanning evenwicht moet maken met F_v. De berekening van de extreme korrelspanningen is mede daarop gebaseerd. Het is echter te kort door de bocht om hieruit te concluderen dat als σ_1 en σ_2 hetzelfde teken hebben, geen sprake is van kantelen. Die gelijkheid van teken sluit immers niet uit dat $F_v > 0$, in welk geval de constructie opdrijft.

E

Golfvergelijking

In de waterbouwkunde denken we bij golven meestal aan (min of meer) periodieke beweging van een wateroppervlak of een heen en weer gaande stroming, zoals het getij, door wind opgewekte golven of scheepsgolven. Maar golven zijn niet beperkt tot water. Denk bijvoorbeeld aan licht en geluid, of trillingen in constructies. De beschrijving van het verloop van al dit soort golven in ruimte en tijd is gebaseerd op de zogeheten golfvergelijking. Dit is een tweede orde partiële differentiaalvergelijking die toepasbaar is voor tal van golfbewegingen, zij het soms voor geïdealiseerde omstandigheden.

Een van die toepassingen is een golf in een lange, rechte, open waterloop. Voor dit 1–dimensionale, instationaire geval hebben we in paragraaf 2.4 over instationaire stroming, gekeken naar continuïteit en impulsbehoud. Voor continuïteit hebben we gevonden dat

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \tag{E.1}$$

(zie (2.51)).

Voor wat betreft de impulsbalans is in paragraaf 2.4 gesteld dat, conform de tweede wet van Newton, het totaal aan krachten dat werkt op een controlevolume evenwicht moet maken met de verandering van impuls in dat volume. Dat evenwicht is geschreven als

$$F_h + F_w - F_b \sin\theta + F_a = \frac{\partial(\rho V u)}{\partial t} \tag{E.2}$$

(zie (2.48)). Hierin is F_h de resultante van de hydrostatische drukken, F_w de bodemwrijving, F_a het effect van advectie en $F_b \sin\theta$ is de horizontale component van de resultante van de druk die door de bodem op het controlevolume wordt uitgeoefend (met θ de hellingshoek van de bodem). Het rechter lid van bovenstaande uitdrukking staat voor de verandering van impuls in het controlevolume (met inhoud V).

Voor de beschrijving van de golf die zich door de waterloop voortplant, gaan we uit van enigszins geïdealiseerde omstandigheden. Zo veronderstellen we dat de lengte

van de golf groot is ten opzichte van de waterdiepte en bovendien de amplitude van de golf klein ten opzichte van die diepte. In dat geval speelt advectie een relatief kleine rol in de impulsbalans. Daarnaast veronderstellen we dat ook wrijving van ondergeschikt belang is. Daarmee zijn F_a en F_w te verwaarlozen ten opzichte van de andere termen in de balans en reduceert deze tot

$$F_h - F_b \sin\theta = \frac{\partial(\rho V u)}{\partial t} \tag{E.3}$$

Uitwerken van deze vergelijking, waarbij we uitgaan van een horizontale bodem ($\theta = 0$), zodat $\partial h/\partial x = \partial\zeta/\partial x$, geeft

$$-gh\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\partial(hu)}{\partial t} \tag{E.4}$$

en dat is gelijk aan (2.50) als daaruit de termen voor wrijving en advectie worden verwaarloosd.

Uitdrukkingen (E.4) en (E.1) beschrijven de 1–dimensionale waterbeweging voor geïdealiseerde omstandigheden (advectie en wrijving ondergeschikt en een horizontale bodem). Ze vormen een set van twee vergelijkingen met onbekenden hu (het debiet per eenheid van breedte van de waterloop) en ζ. Na invullen van $\partial h/\partial t = \partial\zeta/\partial t$ (vaste bodem) in de continuïteitsvergelijking, luidt deze set

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + gh\frac{\partial\zeta}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{E.5}$$

De drukgradiënt $gh\partial\zeta/\partial x$ in de impulsbalans (de tweede vergelijking in (E.5)) is afhankelijk van de waterdiepte h. Deze varieert in ruimte en tijd. Echter, omdat we hebben aangenomen dat de amplitude van de golf klein is ten opzichte van de waterdiepte, zijn die variaties in h betrekkelijk klein in vergelijking tot de golf-gemiddelde waterdiepte. Tegen deze achtergrond is het redelijk om het effect van die variaties op de drukgradiënt buiten beschouwing te laten en voor h de golf-gemiddelde waterdiepte aan te houden. Die is niet afhankelijk van plaats en tijd.

Met deze vereenvoudiging kan hu uit de set (E.5) worden geëlimineerd door de impulsbalans in (E.5) te differentiëren naar de plaats x en de continuïteitsvergelijking naar de tijd t:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = 0 \tag{E.6}$$

waarin $c = \sqrt{gh}$.

Op overeenkomstige manier kan ook ζ worden geëlimineerd, met

$$\frac{\partial^2(hu)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2(hu)}{\partial x^2} = 0 \tag{E.7}$$

als resultaat.

Een uitdrukking van de vorm (E.6) (of (E.7)) wordt golfvergelijking genoemd omdat deze de voortplanting in ruimte en tijd van een elementaire golf weergeeft. Het elementaire zit in de geïdealiseerde omstandigheden waarvoor de vergelijking is afgeleid.

Elke willekeurige functie van de vorm $\zeta = \zeta(x \pm ct)$ (dus elke functie van $x \pm ct$) voldoet aan (E.6)[107]. Dat wil onder meer zeggen dat ζ constant is als ook $x \pm ct$ constant is. Differentiatie hiervan naar de tijd geeft

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \pm ct) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\text{constant} \quad \Longrightarrow \quad c = \mp\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{E.8}$$

De $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ hierin geeft de verandering van de locatie x met de tijd t van een punt waar ζ constant is, ofte wel de snelheid waarmee een punt waar ζ constant is, zich verplaatst. En die snelheid is gelijk aan $c = \sqrt{gh}$.

We nemen deze theoretische beschouwing mee terug naar de golf waar we mee zijn begonnen en die zich door een waterloop voortplant. Uit de golfvergelijking blijkt dat elk punt van die golf zich door de waterloop verplaatst met een snelheid c in positieve of negatieve x-richting (vanwege de $\pm$). We kunnen zodoende stellen dat de ruimtelijke vorm van het wateroppervlak niet verandert met de tijd, maar zich met een snelheid $\pm c$ verplaatst.

Een voorbeeld van een sinusvormige golf is genoemd in paragraaf 5.3.7 over de voortplanting van het getij in een betrekkelijk diepe oceaan. In die paragraaf is de beweging van de getijgolf beschreven als

$$\zeta_g(x,t) = \zeta_0 e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{\zeta}_0 e^{-i(\omega t - kx)} \tag{E.9}$$

(zie (5.43), met ω de hoekfrequentie van de golf, k het bijbehorende golfgetal, ζ_0 een complexe amplitude en het subscript g verwijst naar getij). Dit is te schrijven als

$$\zeta_g^*(x - ct) = \zeta_0 e^{-ki(x-ct)} + \tilde{\zeta}_0 e^{ik(x-ct)} \quad ; \quad c = \frac{\omega}{k} \tag{E.10}$$

en voldoet daarmee aan de golfvergelijking (E.6). Dit is consistent met de bevinding in paragraaf 5.3.7 dat de getijgolf zich voortplant met een snelheid $c = \pm\omega/k$ en die is gelijk aan $\pm\sqrt{gh}$.

In de afleiding van de golfvergelijking hebben we ons beperkt tot één dimensie. Voor gevallen waarin de golf zich (bij goede benadering) parallel voortplant, is dat een redelijke benadering. In kanalen of rivieren is dat bijvoorbeeld het geval. In de dwarsdoorsnede van zulke waterlopen is de waterdiepte echter niet overal gelijk en dan rijst de vraag hoe groot de voortplantingssnelheid is. Het antwoord op die vraag kunnen we vinden door de golfvergelijking over de dwarsdoorsnede te

[107] Dit valt te bewijzen door substitutie van $\partial\zeta(y)/\partial\cdot = (\partial\zeta(y)/\partial y)(\partial y/\partial\cdot)$, met $y = x \pm ct$.

integreren, aangenomen dat daadwerkelijk sprake is van parallelle voortplanting van de golf, dus dat ζ niet variëert over de dwarsdoorsnede. Dit geeft

$$\int_{\text{dsn}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \mathrm{d}y - \int_{\text{dsn}} gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \mathrm{d}y = 0 \tag{E.11}$$

Hierin verwijst 'dsn' naar de dwarsdoorsnede en y is een horizontale coörinaat in die doorsnede. In deze uitdrukking is alleen de waterdiepte h afhankelijk van y. Integratie van h over de dwarsdoorsnede levert het natte oppervlak A_c van die doorsnede op. Daarmee volgt dat

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \int_{\text{dsn}} \mathrm{d}y - g \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \int_{\text{dsn}} h \mathrm{d}y = B \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - g A_c \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \tag{E.12}$$

waarin B de breedte van de waterspiegel is. Na delen door deze B vinden we dat

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - g \frac{A_c}{B} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \tag{E.13}$$

waarmee de voortplantingssnelheid uitkomt op $c = \pm\sqrt{gA_c/B}$.

Het quotiënt A_c/B is te zien als een over de breedte van de waterloop gemiddelde waterdiepte. In paragraaf 3.4.1 over de waterbeweging rond een varend schip is die genoteerd als h_{gem}.

F

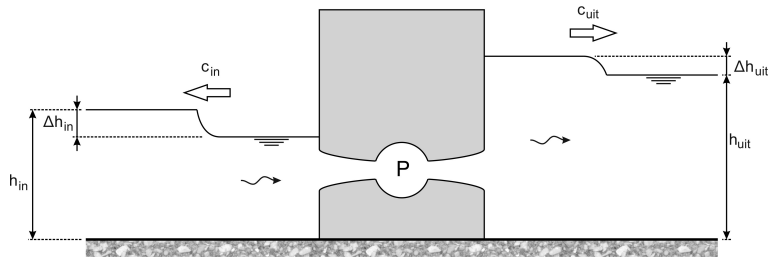
Translatiegolven

In open waterlopen kunnen translatiegolven optreden als gevolg van plotselinge veranderingen in debiet. Dat doet zich bijvoorbeeld voor als een gemaal wordt ingeschakeld of de kolk van een schutsluis wordt gevuld of geledigd. In beide gevallen wordt op een specifieke locatie in de waterloop plotsklaps een (verandering in) debiet geforceerd en het duurt even totdat de stroming zich over de volle lengte van deze waterloop heeft aangepast. Dat proces van aanpassing manifesteert zich als een enkelvoudige golf die zich door de waterloop voortplant. Zo'n golf wordt een translatiegolf genoemd.

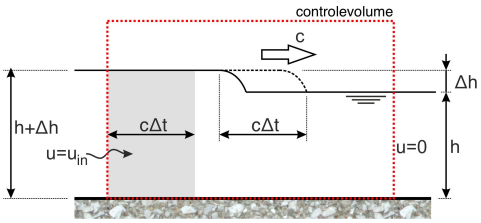
In deze appendix illustreren we dat aan de hand van het inschakelen van een gemaal, ergens in een open waterloop. We beperken ons hierbij tot het principe en dat is ook van toepassing op andere gevallen waarin zich een abrupte verandering van debiet voordoet, zoals bij het genoemde vullen of ledigen van een schutkolk.

Als een pomp wordt ingeschakeld, levert deze vrijwel direct een debiet door het gemaal. Het duurt echter even voordat in de aan– en afvoerkanalen aan weerszijden van het gemaal de bijbehorende stroming volledig op gang komt. In het aanvoerkanaal, bijvoorbeeld, wordt die stroming eerst vlakbij het gemaal opgewekt door de aanzuiging door de pomp. Als gevolg daarvan daalt de waterstand vlakbij het gemaal. Dat gebeurt echter niet in één keer over de volle lengte van het kanaal. Vlak na het aanzetten van de pomp is op enige afstand van het gemaal nog de ongestoorde waterstand aanwezig. Die is op dat moment hoger dan de waterstand vlak naast het gemaal. Dit verschil in waterstand brengt een stroming in de richting van het gemaal op gang en daarbij verplaatst dit verschil in waterstand zich in stroomopwaartse richting, dus weg van het gemaal. Dat is de translatiegolf in het aanvoerkanaal.

Aan de andere kant van het gemaal, in het afvoerkanaal, leidt het plotseling optredende debiet tot een verhoging van de waterstand vlakbij het gemaal terwijl een stukje verderop nog de ongestoorde waterstand aanwezig is. Ook hier is sprake van een verschil in waterstand dat zich van het gemaal af verplaatst. Een impressie



Figuur F.1: Translatiegolven die aan weerszijden van een gemaal optreden bij een geforceerde, abrupte verandering van het debiet door dat gemaal (het inschakelen van de pomp P, bijvoorbeeld).



Figuur F.2: Voor toepassing van impulsbehoud en continuïteit is een controlevolume gekozen waarin het front van de translatiegolf zich in een tijdsinterval Δt verplaatst over een afstand $c\Delta t$. In datzelfde tijdsinterval neemt het gebied binnen het controlevolume waarin de stroomsnelheid gelijk is aan u_{in} toe. Die toename is in de figuur met grijs aangegeven.

van dit verschijnsel is geschetst in figuur F.1.

De snelheid waarmee een translatiegolf zich door een open waterloop voortplant, is af te leiden uit continuïteit en behoud van impuls in de richting waarin de translatiegolf zich voortplant (langs de as van de waterloop waarin die golf zich voordoet). Omdat die golf zich verplaatst met de tijd, hebben we te maken met een instationaire situatie. Als gevolg daarvan reduceert de impulsbalans niet tot evenwicht van krachten en advectieve overdracht van impuls zoals dat bij stationaire stroming het geval is (zie hoofdstukken 2 en 3).

Voor wat betreft behoud van impuls gaan we, net als in paragraaf 2.4, uit van de tweede wet van Newton:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{u})}{\mathrm{d}t} \tag{F.1}$$

waarin de kracht $\vec{F}$ en de snelheid $\vec{u}$ vectoriële grootheden zijn, m staat voor massa en t voor tijd. Deze wet passen we toe op een controlevolume waarbinnen het front van de translatiegolf in een tijdsinterval Δt verplaatst over een afstand $c\Delta t$ (met c de voortplantingssnelheid van de translatiegolf). Dit is geschetst in figuur F.2.

In een tijdsinterval Δt neemt de horizontale component van de impuls die in het controlevolume is geborgen, toe met $\rho u_{\mathrm{in}}(h + \Delta h)c\Delta t$ per eenheid van breedte loodrecht op het vlak van tekening in figuur F.2. Die toename moet balans maken met de netto overdracht van impuls door de wanden van het controlevolume. Aan de linker kant bestaat die overdracht uit een combinatie van een hydrostatische

druk (met resultante $\rho g(h+\Delta h)^2/2$) en een advectieve component ($\rho u_{\rm in}^2(h+\Delta h)$). Aan de rechterkant, waar de stroomsnelheid gelijk is aan nul, is er alleen een hydrostatische druk (met resultante $\rho g h^2/2$).

Vanwege de keuze van het controlevolume, variëren de componenten van de overdracht van impuls door de verticale wanden van dat volume in het tijdsinterval Δt niet met de tijd. In dat interval verplaatst het front van de translatiegolf zich immers alleen binnen het controlevolume, terwijl waterdiepten en stroomsnelheden aan de randen van het controlevolume ongewijzigd blijven.

Zo redenerend wordt de impulsbalans (per eenheid van breedte loodrecht op het vlak van tekening in figuur F.2) gegeven door

$$\frac{1}{2}\rho g(h+\Delta h)^2 + \rho u_{\rm in}^2(h+\Delta h) - \frac{1}{2}\rho g h^2 = \frac{\rho u_{\rm in}(h+\Delta h)c\Delta t}{\Delta t} \tag{F.2}$$

Voorts hebben we te maken met continuïteit. In het tijdsinterval Δt stroomt aan de linkerkant een hoeveelheid $u_{\rm in}(h+\Delta h)\Delta t$ het controlevolume binnen (ook per eenheid van breedte loodrecht op het vlak van tekening in figuur F.2). En in datzelfde tijdsinterval gaat er aan de rechterkant niets uit, want daar is de stroomsnelheid gelijk aan nul. Dat betekent dat de hoeveelheid water in het controlevolume met zijn toegenomen. En dat is ook zo omdat in de periode Δt het front van de translatiegolf over een afstand $c\Delta t$ naar rechts is verplaatst. Dat gaat gepaard met een toename van het geborgen volume van $c\Delta t\Delta h$ (nogmaals per eenheid van breedte). Kortom

$$u_{\rm in}(h+\Delta h)\Delta t = c\Delta t\Delta h \tag{F.3}$$

waaruit volgt dat

$$u_{\rm in} = c\frac{\Delta h}{h+\Delta h} \tag{F.4}$$

Door dit kennelijke verband tussen $u_{\rm in}$ en c in te vullen in de impulsbalans (F.2), komen we uit op

$$\frac{1}{2}\rho g(h+\Delta h)^2 + \rho c^2\frac{\Delta h^2}{h+\Delta h} - \frac{1}{2}\rho g h^2 = \rho c^2\Delta h \tag{F.5}$$

Na enig herleiden volgt hieruit dat

$$c^2 = g\frac{((h+\Delta h)+h)(h+\Delta h)}{2h} \tag{F.6}$$

of, met (F.3),

$$u_{\rm in}^2 = \left(\frac{\Delta h}{h+\Delta h}\right)^2 g\frac{((h+\Delta h)+h)(h+\Delta h)}{2h} \tag{F.7}$$

waaruit Δh valt te berekenen voor bekende ongestoorde waterdiepte h en $u_{\rm in}$. In veel praktische gevallen zal niet de stroomsnelheid $u_{\rm in}$ bekend zijn, maar wel het

debiet per eenheid van breedte $q_{\text{in}} = (h + \Delta h)u_{\text{in}}$. Met (F.7) geldt voor dit debiet dat

$$q_{\text{in}}^2 = g\Delta h^2 \frac{((h + \Delta h) + h)(h + \Delta h)}{2h} \tag{F.8}$$

In veel gevallen zal de hoogte Δh van de translatiegolf klein zijn ten opzichte van de ongestoorde waterdiepte h. Dat laat een benadering toe van het quotiënt $(((h + \Delta h) + h)(h + \Delta h))/(2h)$ dat voorkomt in bovenstaande uitdrukkingen voor c^2, u_{in}^2 en q_{in}^2. Dit quotiënt is te schrijven als

$$\begin{aligned} \frac{((h + \Delta h) + h)(h + \Delta h)}{2h} &= \frac{1}{2}h\left(2 + \frac{\Delta h}{h}\right)\left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right) \\ &= h\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\Delta h}{h} + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{F.9}$$

Voor de voortplantingssnelheid c van de translatiegolf (zie (F.6)) kunnen we dus schrijven dat

$$\frac{c^2}{gh} = 1 + \frac{3}{2}\frac{\Delta h}{h} + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 \tag{F.10}$$

Als $\Delta h \ll h$, dan is $(\Delta h/h)^2 \ll (3/2)\Delta h/h$ en geldt de benadering

$$\frac{c^2}{gh} \approx 1 + \frac{3}{2}\frac{\Delta h}{h} \tag{F.11}$$

En als bovendien $(3/2)\Delta h/h \ll 1$ is

$$\frac{c^2}{gh} \approx 1 \quad \Longrightarrow \quad c = \pm\sqrt{gh} \tag{F.12}$$

wat overeenkomt met de voortplantingssnelheid van golven in zogeheten *ondiep water* (zie uitdrukking (4.9) in paragraaf 4.3).

In de praktijk worden zowel de volledige uitdrukking (F.10) als de eerste benadering (F.11) gebruikt. Met die eerste benadering kan de hoogte Δh van de translatiegolf voor een bekend debiet per eenheid van breedte q_{in} en ongestoorde waterdiepte h worden geschat uit

$$\frac{3}{2h}\Delta h^3 + \Delta h^2 - \frac{q_{\text{in}}^2}{g} = 0 \tag{F.13}$$

Dit is een derde-graads vergelijking in Δh, voor de oplossing waarvan wordt verwezen naar appendix I.

G

Berekening van verhanglijnen

In paragraaf 3.2.1 over verhanglijnen is op basis van continu iteit en behoud van impuls een vergelijking afgeleid die het verloop van de waterdiepte beschrijft langs de as van waterloop, afhankelijk van het debiet in die waterloop en de helling van de bodem. Daarbij is verondersteld dat

- sprake is van een stationaire situatie,
- het gaat om een prismatische waterloop (dat wil zeggen dat de dwarsdoorsnede overal gelijk is) en
- de helling van de bodem constant is.

Voor die veronderstellingen is gevonden dat (zie (3.14) en (3.15))

$$(\alpha - 1)H(y) + y = -\frac{1}{h_e}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}x + I \tag{G.1}$$

waarin

$$\alpha = \frac{1}{c_f}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}\right| \tag{G.2}$$

en

$$H(y) = \frac{1}{6}\ln\frac{y^2 + y + 1}{(y-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y-1}{\sqrt{3}} \tag{G.3}$$

In deze uitdrukkingen is x een coördinaat langs de as van de waterloop, $b(x)$ het niveau van de bodem (zodat $\mathrm{d}b/\mathrm{d}x$ de bodemhelling, waarvan is aangenomen dat die niet variëert met x), y de relatieve waterdiepte, gedefiniëerd als $y = h/h_e$ (met h de waterdiepte en h_e de evenwichtsdiepte, afhankelijk van een voorgeschreven debiet en een voorgeschreven dwarsdoorsnede van de waterloop) en c_f een wrijvingscoëfficiënt gerelateerd aan de ruwheid van de bodem.

Voorts is I een integratieconstante, bepaald door een randvoorwaarde van de vorm $h(x_b) = h_b$, ofte wel een voorgeschreven waterdiepte (h_b) op een voorgeschreven locatie (x_b).

Nadat deze integratieconstante is bepaald, kan met (G.1) direct worden berekend op welke locatie x zich een of andere relatieve waterdiepte y voordoet. In veel praktisch relevante toepassingen is ook het omgekeerde interessant, dus hoe groot de relatieve waterdiepte y is op een of andere locatie x.

Vanuit fysisch perspectief is de relatie tussen x en y eenduidig. Gelet op de uitgangspunten die zijn gehanteerd bij de afleiding van (G.1) hoort bij elke locatie x precies één relatieve waterdiepte y en omgekeerd. De gevonden relatie tussen beide is echter van de vorm $x = x(y)$ en de inverse daarvan ($y = y(x)$) kan niet als een expliciete vergelijking worden geschreven.

Het is echter wel mogelijk om y voor een voorgeschreven x langs numerieke weg te benaderen. Een van de methoden om dat te doen, is gebaseerd op het steeds verder verkleinen van een interval voor x waarbinnen de gezochte locatie ligt. Als we voor locatie $\hat{x}$ op zoek zijn naar de relatieve waterdiepte $\hat{y} = y(\hat{x})$, gaat dat als volgt:

1. Kies een relatieve waterdiepte y_{klein} waarvoor geldt dat de bijbehorende locatie $x_{\text{klein}} < \hat{x}$. Deze x_{klein} volgt door substitutie van y_{klein} in (G.1).
2. Kies ook een relatieve waterdiepte y_{groot} waarvoor geldt dat de bijbehorende locatie $x_{\text{groot}} > \hat{x}$.
3. Kies een y_{midden} in het interval $[y_{\text{klein}}; y_{\text{groot}}]$ en bepaal de bijbehorende x_{midden}.
4. Verklein het interval voor y afhankelijk van hoe x_{midden} zich verhoudt tot $\hat{x}$:
   - als $x_{\text{midden}} > \hat{x}$, vervang dan y_{groot} door y_{midden}, anders
   - als $x_{\text{midden}} < \hat{x}$, vervang dan y_{klein} door y_{midden}.
5. Ga verder met stap 3 totdat y_{groot} en y_{klein} vrijwel aan elkaar gelijk zijn. De gezochte $\hat{y}$ ligt binnen dit interval voor y. Hoe dichter de grenzen van het interval bij elkaar liggen, hoe nauwkeuriger het resultaat is.

Daarnaast is het mogelijk om voor specifieke intervallen van y een redelijke benadering te geven voor $x(y)$. Een voorbeeld hiervan voor $\alpha \ll 1$ (zodat $\alpha - 1 \approx -1$) is

$$\begin{aligned} y = &- 1,8885w^6 + 7,9708w^5 - 13,6434w^4 \\ &+ 11,4843w^3 - 5,2365w^2 + 1,1433w + 0,9067 + \epsilon \end{aligned} \tag{G.4}$$

voor het interval $0,300 \leq y \leq 0,999$ en

$$\begin{aligned} y = &- 0,0254w^6 + 0,2303w^5 - 0,7917w^4 \\ &+ 1,2007w^3 - 0,5839w^2 + 0,1610w + 0,9840 + \epsilon \end{aligned} \tag{G.5}$$

voor het interval $1,001 \leq y \leq 1,700$.

In deze benaderingen is

$$w = \exp\left(-\frac{1}{h_e}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}x + I\right) \tag{G.6}$$

en ϵ staat voor de afwijking tussen de benadering en de werkelijke y. Voor (G.4) geldt dat $\max(|\epsilon|) = 0,0035$ en voor (G.5) is dat $\max(|\epsilon|) = 0,0028$[108].

Deze benadering is gevonden door voor een reeks van waarden voor y in de genoemde intervallen de bijbehorende w te bepalen en vervolgens met de methode der Kleinste Kwadraten (zie ook appendix A.5) de coëfficiënten van het polynoom te optimaliseren. Dat daarbij onderscheid is gemaakt tussen $y < 1$ en $y > 1$ heeft te maken met het asymptotisch gedrag van de verhanglijn. In de uitdrukking voor de verhanglijn uit zich dat in $H(1) = \infty$. Dat laat zich niet zomaar vatten in een simpele polynoom benadering en daarom is een klein gebied rond $y = 1$ buiten beschouwing gelaten.

Een andere iteratieve manier om de $\hat{y}$ te benaderen die hoort bij een voorgeschreven $\hat{x}$, gaat uit van de Newton–Raphson methode[109]. Daarmee kan het nulpunt van een functie worden benaderd. Om de methode te kunnen toepassen, moeten we een functie $f(y)$ definiëren waarvoor geldt dat $f(\hat{y}) = 0$ bij een voorgeschreven $\hat{x}$. Met $x(\hat{y}) = \hat{x}$ is $f(y) = x(y) - \hat{x}$ zo'n functie.

Met de Newton–Raphson methode volgen achtereenvolgende schattingen y_n van de gezochte $\hat{y}$ uit

$$y_{n+1} = y_n - f(y_n) \left(\left. \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} \right|_{y_n} \right)^{-1} \tag{G.7}$$

waarin, in dit geval,

$$\begin{aligned} f(y) &= -\frac{1}{\beta}\left((\alpha-1)H(y) + y - I\right) - \hat{x} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{h_e}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} &= -\frac{1}{\beta}\left((\alpha-1)\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y} + 1\right) \end{aligned} \tag{G.8}$$

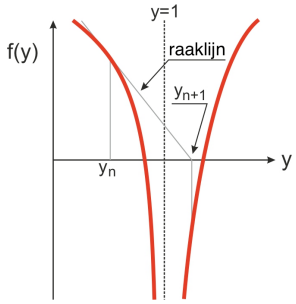
met

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{6}\left(\frac{2y+1}{y^2+y+1} - \frac{2}{y-1}\right) + \frac{2}{3}\left(1 + \left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)^{-1} \tag{G.9}$$

[108] In het algemeen is het bij polynomen verstandig om kritisch te letten op het verschil tussen de orde van grootte van individuele termen en die van de uitkomst. Als veel significante cijfers moeten worden meegenomen om een relatief klein verschil tussen individuele termen nauwkeurig weer te geven, kunnen kleine afrondingen tot grote fouten leiden. Dat kan bijvoorbeeld worden voorkomen door het polynoom te schrijven als een product in plaats van als een som. Zo kunnen we het polynoom in (G.4) ook schrijven als

$$y = w(w(w(w(-1,8885w + 7,9708) - 13,6434) + 11,4843) - 5,2365) + 1,1433) + 0,9067 + \epsilon$$

[109] Deze methode is gebaseerd op het herhaald toepassen van een eerste orde Taylor benadering (zie (2.6)) van de functie $f(\xi)$ waarvan het nulpunt wordt gezocht. Voor een schatting ξ_k van dat nulpunt wordt de functie benaderd door de raaklijn daaraan in het punt $(\xi_k, f(\xi_k))$. Het nulpunt van die raaklijn is een volgende schatting ξ_{k+1} van het nulpunt van de functie. In termen van de eerste orde benadering veronderstellen we dat $f(\xi_k + \Delta\xi) \approx f(\xi_k) + \Delta\xi \, \mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi|_{\xi_k} = 0$. Hieruit volgt $\Delta\xi$ en dan is $\xi_{k+1} = \xi_k + \Delta\xi$.



Figuur G.1: Schets van de functie $f(y)$ volgens (G.8) en de raaklijn aan deze functie in het punt waar $y = y_k$. Deze raaklijn snijdt de y-as bij $y = y_{k+1}$.

Bij een gestuwde afvoer (sub–kritische stroming) neigt de waterdiepte in stroomopwaartse richting asymptotisch naar de evenwichtsdiepte ($y = 1$)[110]. Als op een of andere lokatie x de waterdiepte kleiner is dan de evenwichtsdiepte ($y < 1$), dan is dat overal stroomopwaarts van die x ook zo. Op dezelfde manier is de waterdiepte stroomopwaarts van x overal groter dan de evenwichtsdiepte ($y > 1$) als die dat op locatie x is.

Uitdrukking (G.1) geldt voor beide situaties. Er zijn waarden voor x zijn waarbij aan (G.1) wordt voldaan voor twee verschillende waarden van y, waarvan er een groter dan 1 en de ander kleiner dan 1. Slechts één van beide is fysisch relevant. Welke dat is, valt direct af te leiden uit de randvoorwaarde $h(x_b) = h_b$ die wordt gebruikt om de integratieconstante I te bepalen. Als $h_b < h_e$, dan is $y < 1$ overal bovenstrooms van x_b en analoog voor $h_b > h_e$.

Bij toepassing van de Newton–Raphson methode om y te bepalen voor een voorgeschreven x, moet ervoor worden gezorgd dat de fysisch juiste oplossing wordt benaderd. De keuze van een beginschatting y_0 speelt daarin een belangrijke rol. Dit is geïllustreerd in figuur G.1.

Als we bijvoorbeeld te maken hebben met een randvoorwaarde waarbij $h_b < h_e$, is $y(x_b) < 1$. In overeenstemming daarmee kiezen we een y_0 die ook kleiner is dan 1 en beginnen daarmee het iteratieve proces (G.7). Stel dat zich ergens in dat proces de schatting y_n voordoet die is aangegeven in figuur G.1. Die is kleiner dan 1 en past dus bij de randvoorwaarde.

Voor de volgende schatting y_{n+1} geldt dat niet. Zoals geschetst in figuur G.1 is $y_{n+1} > 1$. Van daar uit convergeert het iteratieve proces (G.7) naar een oplossing waarbij $y > 1$ en dat past niet bij de randvoorwaarde. In de stap van y_n naar y_{n+1} zijn we over de asymptoot $y = 1$ gesprongen en daardoor uitgekomen bij de oplossing die, gezien de randvoorwaarde, niet fysisch relevant is.

Dit kan worden voorkomen met een beginschatting y_0 die dicht bij 1 ligt en, afhankelijk van de randvoorwaarde, net daarboven of daaronder. Als in het iteratieve proces een schatting y_k aan de verkeerde kant van $y = 1$ wordt gevonden, kan dit proces opnieuw worden gestart met een y_0 die nog dichter bij 1 ligt. Bedenk overigens dat $y_0 = 1$ geen goede beginschatting is, want dan is $H = \infty$.

[110] Bij super–kritische stroming is die neiging er in stroomafwaartse richting.

H

Iteratieve oplossing van de dispersierelatie

Golven op open water, zoals die aan het strand, worden veelel beschreven aan de hand van de lineaire golftheorie (zie bijvoorbeeld Holthuijsen (2007)). Volgens deze theorie wordt het verband tussen de golflengte L, de waterdiepte h en de golfperiode T gegeven door de zogeheten dispersierelatie

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \tag{H.1}$$

waarin g de versnelling van de zwaartekracht.

Deze uitdrukking is impliciet in de golflengte L. Voor voorgeschreven T en h kan L iteratief worden benaderd. Dat kan op meerdere manieren. We noemen er twee en voor beide herschrijven we bovenstaande uitdrukking voor L als

$$\frac{1}{x} = \lambda \tanh(x) \quad ; \quad x = \frac{2\pi h}{L} \quad ; \quad \lambda = \frac{gT^2}{(2\pi)^2 h} \tag{H.2}$$

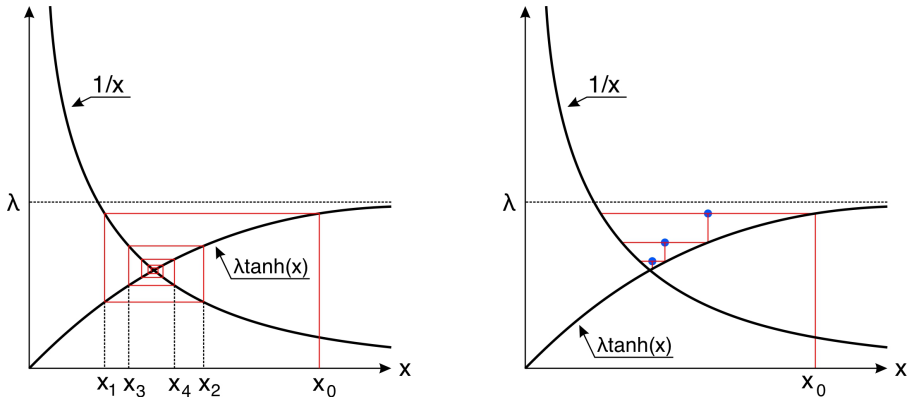
Omdat T en h zijn voorgeschreven, is λ dat ook. Door x te benaderen uit de linker gelijkheid in (H.2), volgt de gezochte benadering voor de golflengte uit $L = 2\pi h/x$.

methode 1

Een methode om x iteratief te benaderen is de zogeheten substitutie-methode. Als x_i de schatting van x is met volgnummer i, dan volgt de volgende schatting uit

$$x_{i+1} = \frac{1}{\lambda \tanh(x_i)} \tag{H.3}$$

conform de linker gelijkheid in (H.2)



Figuur H.1: Verloop van het iteratieve proces dat leidt tot een steeds nauwkeuriger schatting van de oplossing van de linker gelijkheid in (H.2). De linker grafiek heeft betrekking op (H.3) en de rechter op (H.6).

Een gebruikelijke beginschatting x_0 voor dit iteratieve proces is $x_0 = 1/\lambda$. Deze beginschatting past bij de situatie waarin $\tanh(x) = 1$ (ofte wel $x = \infty$). Fysisch gezien kan dat niet omdat h altijd eindig is en L altijd groter dan nul (anders zouden er geen golven zijn). Daarom is deze beginschatting steeds een overschatting.

Het verloop van het iteratieve proces (H.3) dat met deze beginschatting leidt tot een steeds nauwkeuriger benadering van de x die voldoet aan de linker gelijkheid in (H.2), is geschetst in de linker grafiek in figuur H.1.

In deze grafiek is x uitgezet langs de horizontale as. De twee krommen in de grafiek komen overeen met $1/x$ (het linker lid in de linker gelijkheid in (H.2)) en $\lambda \tanh(x)$ (het rechter lid in die gelijkheid). De gezochte x ligt op het snijpunt van de beide krommen. Het iteratieve proces (H.3) spiraalt als het ware naar dat snijpunt. Dat proces verloopt langs de rode lijn en de grafiek. Elke knik in de rode lijn komt overeen met een schatting van x en elke volgende schatting benadert het snijpunt beter dan het voorgaande.

Dit iteratieve proces leidt na oneindig veel stappen tot de exacte oplossing van (H.2). In de praktijk is het echter niet mogelijk om oneindig veel stappen uit te voeren. Hoeveel stappen echt nodig zijn, hangt af van de gewenste nauwkeurigheid van de uitkomst en die hangt weer af van de toepassing.

Voor de planning van offshore operaties op de Noordzee, bijvoorbeeld voor de aanleg van een windmolenpark, is inzicht gewenst in de golfcondities die zich enkele tientallen kilometers uit de kust voordoen. De waterdiepte h is daar van de orde 10m en een veel voorkomende golfperiode T is tussen 6 en 10 seconden. De bijbehorende golflengte is circa 70m.

Voor de genoemde planning maakt het niet echt uit of de golflengte 69m is of 71m. Kortom, een fout van zo'n 1% in de schatting van de golflengte heeft geen

significante invloed op de planning van de operatie. Vanwege het alternerende karakter van het iteratieve proces (van twee opeenvolgende schattingen is de ene altijd te hoog en de andere altijd te laag; zie de linker grafiek in figuur H.1), kan dat proces worden gestaakt zodra twee opeenvolgende schattingen minder dan 1% van elkaar verschillen.

methode 2

De tweede iteratieve methode die we in deze notitie noemen, is een verfijning van de eerste. Ook in deze tweede methode gaan we uit van een beginschatting $x_0 = 1/\lambda$. Met (H.3) leidt die eerste methode tot opeenvolgende schattingen van x die afwisselend te groot en te klein zijn. Dat inzicht kunnen we gebruiken om het iteratieproces te versnellen.

Als van twee opeenvolgende schattingen volgens (H.3) de ene een overschatting is en de andere een onderschatting, dan ligt het gemiddelde van die twee schattingen dichter bij het exacte antwoord dan die beide schattingen afzonderlijk. Met andere woorden, als x het exacte antwoord is, dan geldt dat

$$\left| \frac{x_{i+1} + x_i}{2} - x \right| < \min\left\{ |x_{x+1} - x|, |x_i - x| \right\} \quad ; \quad x_{i+1} = \frac{1}{\lambda \tanh(x_i)} \tag{H.4}$$

Voor de volgende schatting x_{i+2} geldt een overeenkomstige betrekking:

$$|x_{i+2} - x| < \min\left\{ |x_{x+1} - x|, |x_i - x| \right\} \quad ; \quad x_{i+2} = \frac{1}{\lambda \tanh(x_{i+1})} \tag{H.5}$$

Gegeven x_i en x_{i+1} kunnen we ervoor kiezen om x_{i+2} als volgende schatting te nemen of $(x_i + x_{i+1})/2$. Met een keuze voor die laatste, wordt een stap in het iteratieproces gegeven door

$$x_{k+1} = \frac{x_k + x'}{2} \quad ; \quad x' = \frac{1}{\lambda \tanh(x_k)} \tag{H.6}$$

Deze aanpak is geschetst in de rechter grafiek in figuur H.1. De blauwe stippen daarin verwijzen naar schattingen x_k volgens (H.6).

Het voordeel is dat het berekenen van $(x_i + x_{i+1})/2$ (of $(x_k + x')/2$ volgens (H.6)) minder tijd kost dan het berekenen van $1/(\lambda \tanh(x_{i+1})$. Of daarmee het hele proces significant wordt versneld, hangt af van het aantal stappen dat nodig is om dezelfde nauwkeurigheid te bereiken. Dat aantal neemt toe met het verschil tussen de beginschatting $x_0 = 1/\lambda$ en de $x = 2\pi h/L$ die voldoet aan de dispersierelatie. Kortom, hoe ondieper het water (althans in termen van de verhouding tussen waterdiepte en golflengte), hoe rekentechnisch voordeliger de tweede methode is.

Toegift

I

Wortels van een derde graads vergelijking

Voor vergelijkingen van de vorm

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \ldots a_1 z + a_0 = 0 \tag{I.1}$$

(met $n \in \mathrm{N}$ en reële coëfficiënten a) zijn analytische oplossingen voor z bekend voor $n \leq 4$. In de engelstalige literatuur worden daaromtrent veel voorkomede vormen *cubics* ($n = 3$), *quartics* ($n = 4$) en *quintics* ($n = 5$) genoemd. De meest bekende is de zogeheten *abc*-formule voor $n = 2$. Voor $n > 4$ zijn alleen analytische oplossingen bekend voor bijzondere combinaties van de coëficiënten a_n, met name voor $n = 5$. Voor grotere waarden van n dan 5 zijn analytische oplossingen ook voor bijzondere gevallen steeds zeldzamer naarmate n toeneemt. Termen als *sixtics*, *septics* en zo verder komen in de literatuur niet voor, althans niet voorzover de auteur van dit werk bekend[111]. Daarnaast is het soms mogelijk om vergelijking (I.1) middels factorisatie te schrijven als een product van polynomen die elk een graad van ten hoogste $n = 4$ hebben. Een voorbeeld daarvan is

$$z^5 - z^4 - z^3 + z^2 - z - 1 = 0 \tag{I.2}$$

wat te schrijven is als

$$(z^3 + 1)(z^2 - z - 1) = 0 \tag{I.3}$$

en dat heeft als oplossingen $z = -1$, $z = (1 \pm i\sqrt{3})/2$ (waarin $i^2 = -1$) voor $z^3 + 1 = 0$ en $z = (1 \pm \sqrt{5})/2$ voor $z^2 - z - 1 = 0$.

In deze appendix kijken we naar een analytische oplossing van derde graads vergelijkingen, dus met $a_3 \neq 0$ en $a_n = 0$ voor $n > 3$ in (I.1). Na delen door a_3 kunnen we zo'n polynoom schrijven als

$$z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0 = 0 \tag{I.4}$$

[111] Behalve *septic tank*, maar dat heeft met de behandeling van afvalwater te maken en helemaal niets met het oplossen van een zevende graads vergelijking.

met $b_m = a_m/a_3$ $(m = 0, 1, 2)$.

Volgens Abramowitz and Stegun (1970) wordt de oplossing hiervan gegeven door

$$\begin{aligned} z_1 &= s_1 + s_2 - b_2/3 \\ z_2 &= -(s_1 + s_2)/2 - b_2/3 + i\sqrt{3}(s_1 - s_2)/2 \\ z_3 &= -(s_1 + s_2)/2 - b_2/3 - i\sqrt{3}(s_1 - s_2)/2 \end{aligned} \tag{I.5}$$

waarin

$$s_1 = \sqrt[3]{v + \sqrt{D}} \quad ; \quad s_1 = \sqrt[3]{v - \sqrt{D}} \tag{I.6}$$

met

$$D = u^3 + v^2 \quad ; \quad u = b_1/3 - b_2/9 \quad ; \quad v = (b_1 b_2 - 3b_0)/6 - b_2^3/27 \tag{I.7}$$

Voor $D < 0$ zijn er drie reële oplossingen. Ook als $D = 0$ zijn er drie reële oplossingen, maar daarvan zijn er ten minste 2 aan elkaar gelijk. In alle andere gevallen, dus als $D > 0$, zijn er 1 reële en 2 complexe oplossingen. Die complexe oplossingen zijn elkaars complexe geconjugeerde.

Een alternatieve, meer inzichtelijke methode is de zogeheten *Vieta substitutie*, genoemd naar de Franse wiskundige François Viète (1540-1603) die onder meer het verband heeft onderzocht tussen coëfficiënten van een polynoom en producten van wortels. Deze substitutie methode kan worden toegepast op derde graads polynomen waarbij $b_2 = 0$. In het algemeen is dat niet zo, maar met een lineaire transformatie van z kan dat eenvoudig worden bereikt. Als we in (I.4) $z = y + b_2/3$ invullen, dan volgt

$$y^3 + py - q = 0 \tag{I.8}$$

waarin

$$p = b_1 - \frac{1}{3}b_2^2 \quad ; \quad q = -\frac{2}{27}b_2^3 + \frac{1}{3}b_1 b_2 - b_0 \tag{I.9}$$

De Vieta substitutie bestaat uit de introductie van een nieuwe variabele w die y vervangt:

$$y = w - \frac{p/3}{w} \tag{I.10}$$

Invullen in (I.8) geeft, na vermenigvuldigen met w^3,

$$(w^3)^2 - q(w^3) - (p/3)^3 = 0 \tag{I.11}$$

en dit heeft als oplossingen

$$w^3 = (q/2) \pm \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3} \tag{I.12}$$

Voor w levert dit zes oplossingen en dat geldt dan ook voor y. Dat is twee keer zo veel als de drie oplossingen die je bij een derdegraads vergelijking zou verwachten.

Er kan echter worden aangetoond dat de zes oplossingen voor y altijd minstens twee aan twee aan elkaar gelijk zijn.

Voor de uitwerking van de oplossingen (I.12) gaan we uit van reële coëfficiënten p en q en onderscheiden we drie gevallen:

- $(q/2)^2 + (p/3)^3 > 0$

  In dit geval zijn er twee reële oplossingen voor w^3. We kunnen deze schrijven als

  $$w^3 = |w^3| \exp\left(i(\theta + 2k\pi)\right) \quad ; \quad |w^3| = \left|(q/2) \pm \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}\right| \tag{I.13}$$

  waarbij $k = \cdots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$ en voor de hoek θ geldt dat $\theta = 0$ als $w^3 \geq 0$ en $\theta = \pi$ als $w^3 < 0$. Omdat de uitkomsten w_k voor k en $k+3$ aan elkaar gelijk zijn, volstaat het om naar drie waarden van k te kijken die niet een veelvoud van 3 van elkaar verschillen, bijvoorbeeld $k = 0, 1, 2$. Daarmee is

  $$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{|w^3|} \exp\left(i\frac{\theta}{3}\right) \\ w_1 &= \sqrt[3]{|w^3|} \exp\left(i\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) \\ w_2 &= \sqrt[3]{|w^3|} \exp\left(i\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) \end{aligned} \tag{I.14}$$

  en omdat $\theta = 0$ of $\theta = \pi$ zijn altijd twee van deze uitkomsten complex (tevens elkaars complexe geconjugeerde) en is er één reëel.

- $(q/2)^2 + (p/3)^3 = 0$

  Er zijn twee identieke, reële oplossingen voor w^3, namelijk $w^3 = q/2$ (maar nog steeds drie oplossingen voor w). Verdere uitwerking is analoog aan het vorige geval.

- $(q/2)^2 + (p/3)^3 < 0$

  Dit kan zich alleen voordoen als $p < 0$ en

  $$-\sqrt{-(p/3)^3} < q/2 < \sqrt{-(p/3)^3} \tag{I.15}$$

  We maken hiervan gebruik door in (I.12) de term $\sqrt{-(p/3)^3}$ buiten haakjes te brengen. Dat levert

  $$w^3 = \sqrt{-(p/3)^3} \left(\frac{q/2}{\sqrt{-(p/3)^3}} \pm \sqrt{\left(\frac{q/2}{\sqrt{-(p/3)^3}} \right)^2 - 1} \right) \tag{I.16}$$

  en dat schrijven we als

  $$w^3 = \sqrt{-(p/3)^3} \left(\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2} \right) \quad ; \quad \xi = \frac{q/2}{\sqrt{-(p/3)^3}} \tag{I.17}$$

waarin, vanwege (I.15), $-1 < \xi < 1$.

Vervolgens definiëren we een hoek θ zodanig dat $\cos\theta = \xi$ en $\sin\theta = \sqrt{1-\xi^2}$. Daarmee kunnen we voor (I.17) schrijven dat

$$w^3 = \sqrt{-(p/3)^3}e^{\pm i(\theta+2k\pi)} \quad ; \quad k = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{I.18}$$

zodat

$$w_k = \sqrt{-p/3}\exp\left(\pm i\frac{\theta+2k\pi}{3}\right) \quad ; \quad k = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{I.19}$$

Ook hier geldt dat de uitkomsten w_k voor k en $k+3$ aan elkaar gelijk zijn zodat het volstaat om naar drie waarden van k te kijken die niet een veelvoud van 3 van elkaar verschillen, bijvoorbeeld $k = 0, 1, 2$.

Uit (I.19) blijkt dat $|w| = \sqrt{-p/3}$, onafhankelijk van k. Als we dat invullen in (I.10) vinden we

$$y = w - \frac{p/3}{w} = w - \frac{p/3}{w}\frac{\tilde{w}}{\tilde{w}} = w - \frac{p/3}{|w|^2}\tilde{w} = w + \tilde{w} = 2\mathrm{Re}\{w\} \tag{I.20}$$

waarbij de $\tilde{}$ aangeeft dat het om de complexe geconjugeerde gaat. Kennelijk is in dit geval sprake van drie reële wortels, gegeven door

$$y_k = 2\sqrt{-p/3}\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right) \quad ; \quad k = 0, 1, 2 \tag{I.21}$$

Bovenstaande drie gevallen hebben we onderscheiden op basis van de term $(q/2)^2 + (p/3)^3$. Deze term is vergelijkbaar met de $D = u^3 + v^2$ gedefiniëerd in (I.7). Immers, als we $b_2 = 0$, $b_1 = p$ en $b_0 = -q$ invullen in de algemene vorm (I.4), dan krijgen we (I.8) en met deze waarden van de coëfficiënten b is $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$.

J

Tekenen en projecteren

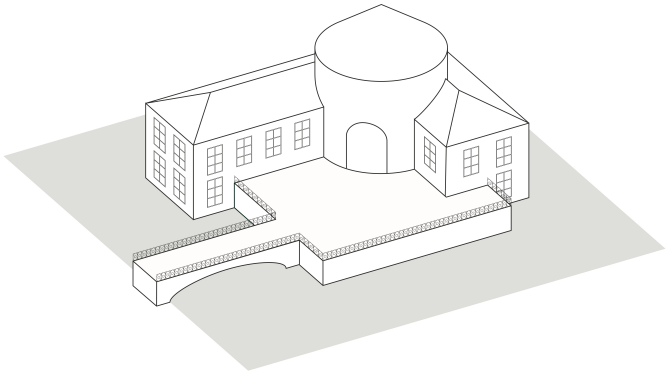
J.1 Inleiding

In de civiele techniek en dus ook in de waterbouwkunde neemt het ontwerpen en omschrijven van ruimtelijke objecten een belangrijke plaats in. Bij communicatie over zulke ontwerpen wordt van oudsher gebruik gemaakt van tekeningen. Dat kunnen eenvoudige schetsjes zijn over principes van bijvoorbeeld constructies maar ook technische tekeningen die dienen als instructie voor de realisatie van een ontwerp. In al die gevallen wordt het ruimtelijke object op één of andere manier afgebeeld op een plat vlak. We spreken dan van een projectie.

In de literatuur zijn vele methoden te vinden om een ruimtelijk object op een plat vlak af te beelden. Op de principes van twee methoden gaan we in deze appendix kort in. Het gaat om parallel en perspectief. Voor technisch tekenen is eigenlijk alleen de parallelle projectie relevant. Perspectief is een variant daarop die de illusie van diepte toelaat. Als je een tekening maakt van een lange, rechte spoorweg, dan blijven de sporen in een parallelle projectie steeds evenwijdig, maar in perspectief naderen ze elkaar in de verte. In bijvoorbeeld *artist impressions* wordt hiervan gebruik gemaakt om een natuurlijke indruk te geven: hoe verder weg, hoe kleiner het lijkt.

Met uitzondering van principeschetsjes, tekenen moderne ingenieurs nooit meer met een potlood in de hand, maar met de hand aan een muis om vrijelijk beschikbare software als Sketchup of CAD-pakketten zover te krijgen dat deze de gewenste tekeningen produceren. Hoewel daar helemaal niets mis mee is, is enig besef van de principes waar deze software op is gebaseerd een aanbeveling. Ook dat komt in deze appendix aan bod. We gaan niet alleen in op de vraag hoe een projectie werkt, maar ook op de manier waarop je die geautomatiseerd kunt genereren, zoals dat met de genoemde software gebeurt. Bij dat laatste draait het allemaal om toepassing van lineaire algebra.

In deze appendix beperken we ons tot principes. Het is zeker geen handleiding voor de ontwikkeling van CAD systemen of aanverwante software. De bedoeling



Figuur J.1: Impressie van het fictieve vakantiehuis dat in deze appendix wordt gebruikt om het principe van diverse projecties te illustreren.

is een beeld te geven van hoe projecties tot stand komen en de manier waarop die kunnen worden geconstrueerd, ook in mathematische zin. Met dat beeld zou software voor technisch tekenen geen volslagen *black box* meer moeten zijn, maar een instrument dat appelleert aan basiskennis over wiskunde.

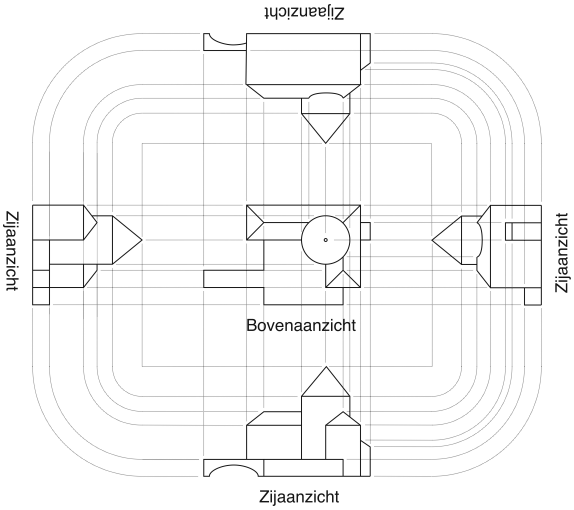
J.2 Parallelle projectie

Iets over het construeren van een projectie

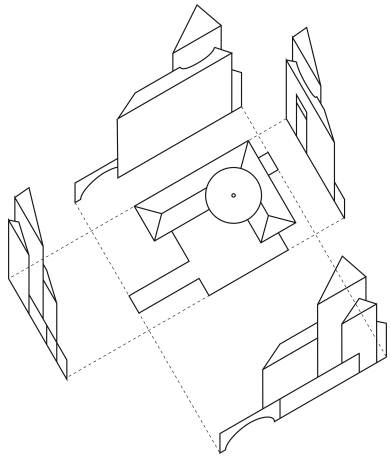
In technische tekeningen, zoals bouwtekeningen voor een civiel–technisch object, wordt veelal gebruik gemaakt van aanzichten en doorsneden die samen een compleet beeld geven van de ruimtelijke vormgeving van dat object. Voor de realisatie daarvan is dat essentiëel. En om ervoor te zorgen dat tekeningen precies zo worden gelezen als de tekenaar ze heeft bedoeld, zijn allerhande spelregels over notaties vastgelegd in normen. In deze appendix laten we die normen voor wat ze zijn. We beperken ons tot enkele methoden om aanzichten te construeren die op een of andere manier het 3–dimensionale karakter van een object terug laten komen in de projectie op een plat vlak. Het knusse vakantiehuisje, geschetst in figuur J.1 gebruiken we daarbij als voorbeeld.

Bouwtekeningen van dit vakantiehuis zouden onder meer een bovenaanzicht (of een plattegrond) en aanzichten van alle gevels bevatten (zie figuur J.2). Al die aanzichten zijn parallelle projecties en bij voorkeur ook orthogonale projecties waarbij het projectievlak evenwijdig aan een gevel wordt gekozen. In technische tekeningen heeft dat als voordeel dat maten van delen van de constructie op schaal in de tekening kunnen worden opgenomen. In alle vijf aanzichten in figuur J.2 is dat principe toegepast.

In de spreekwoordelijke middeleeuwen toen technisch tekenen nog handwerk was, werden 3–dimensionale impressies bijvoorbeeld geconstrueerd door de plattegrond van een object enigszins te roteren om van daaruit met behulp van de zijaanzichten een *birds eye view* op te bouwen. Het principe daarvan is weergegeven in figuur J.3. Daarin is het bovenaanzicht uit figuur J.2 over een hoek van 30^o linksom geroteerd.



Figuur J.2: Boven- en zijaanzichten van het vakantiehuis waarvan in figuur J.1 een impressie is gegeven. Ramen, de toegangspoort en het hekwerk langs de brug en het plein zijn gemakshalve weggelaten. In het bovenaanzicht en het zijaanzicht aan de rechterkant in deze figuur is een aanbouw te zien die in de impressie in figuur J.1 buiten beeld blijft door de hoek waaronder naar het huis wordt gekeken.

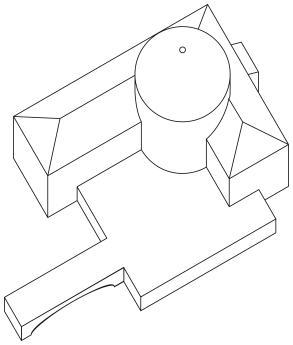


Figuur J.3: Opzet van de constructiue van een 3–dimensionale impressie van het vakantiehuis. Het bovenaanzicht is enigszins geroteerd en de zijaanzichten zijn zodanig geroteerd en scheef getrokken dat zij op het geroteerde bovenaanzicht passen en daarbij de indruk wekken loodrecht op dat bovenaanzicht te staan.

Dat is ook gedaan met de zijaanzichten en die zijn bovendien scheef getrokken zodanig dat (in werkelijkheid) verticale lijnen ook in de tekening verticaal zijn en (in werkelijkheid) horizontale lijnen evenwijdig zijn aan hun tegenhangers in het geroteerde bovenaanzicht in de tekening.

De volgende stap is dat de zijaanzichten worden gedecomponeerd in elementen die elk een andere positie hebben op de geroteerde plattegrond. Bij het zijaanzicht linksboven in figuur J.3 bijvoorbeeld, leidt die decompositie tot een onderscheid tussen de lange gevel aan de achterzijde, een deel van de brug, het deel van de toren dat boven het dak van de achtergevel uitsteekt en de aanbouw. Al die delen kunnen evenwijdig aan de stippellijnen in figuur J.3 worden verschoven tot de plaats waar ze op de geroteerde plattegrond thuis horen.

Het resultaat van deze operatie is een afbeelding van soort 3–dimensionaal draad-



Figuur J.4: Deze 3–dimensionale *birds eye view* van het vakantiehuis is een uitwerking van de opzet die in figuur J.3 is geschetst.

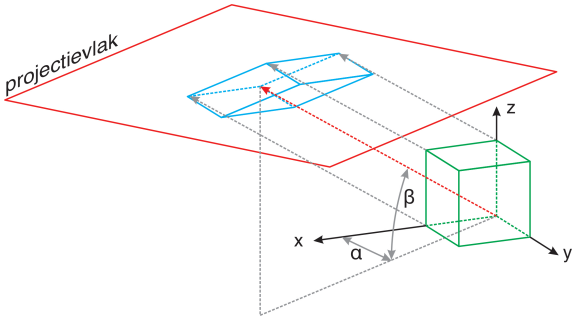
model van het vakantiehuis. Alle lijnen in figuur J.3 zijn immers (aanzichten van) randen van vlakken, zoals een gevel of een dak. Die vlakken zijn ondoorzichtig en daar moet ook rekening mee gehouden worden. Als we het verkregen draadmodel daarvoor corrigeren, krijgen we een plaatje zoals in figuur J.4.

Die lijnen, of delen van lijnen, die vanuit het gezichtspunt van de tekenaar achter een ondoorzichtig element van het getekende object liggen, worden *hidden lines* genoemd. Voor de technieken die in CAD en aanverwante systemen worden toegepast om met *hidden lines* om te gaan, wordt verwezen naar de literatuur.

De schets in figuur J.4 is een voorbeeld van een parallelle projectie. Om tot deze projectie te komen, hebben we het vakantiehuis opgebouwd gedacht uit een serie platte of gebogen delen van vlakken die op elkaar aansluiten. Vervolgens hebben we die aansluitingen weergegeven met rechte of gekromde lijnstukken en die vormen samen het draadmodel dat we hebben geprojecteerd (en achteraf hebben gecorrigeerd voor *hidden lines*). Bij zo'n parallelle projectie worden alle punten van het object in dezelfde richting op het projectievlak afgebeeld. De projectie van een punt van het object wordt verkregen door een lijn door dat punt en in de richting van de projectie te snijden met het projectievlak. Het snijpunt is de projectie.

Dit principe kan ook worden toegepast om lijnen en vlakken te projecteren. Omdat bij parallelle projectie de afbeelding van een rechte lijn ook een rechte lijn is, kan de afbeelding worden geconstrueerd door twee punten van de lijn te projecteren. Bij lijnstukken, zoals de onderdelen van een draadmodel, is het handig om daarbij uit te gaan van de uiteinden van het lijnstuk. De projecties daarvan zijn tevens de uiteinden van de projectie van het af te beelden lijnstuk.

Het principe van de parallelle projectie die we hebben gebruikt om tot figuur J.4 te komen, is geschetst in figuur J.5. Deze figuur gaat over de projectie van een kubus (in groen aangegeven) die is gedefiniëerd in een xyz-assenstelsel waarbij het xy-vlak horizontaal is en de z-as daar loodrecht op staat. Het projectievlak (het vlak waarin we de projectie tekenen, aangegeven in rood) is in dit geval ook horizontaal en zweeft als het ware boven de kubus. Alle hoekpunten van de kubus worden in dezelfde richting op het projectievlak geprojecteerd en door in dat vlak



Figuur J.5: Principe van een parallelle projectie van een kubus (in groen aangegeven in een xyz-assenstelsel) op een horizontaal vlak (waarvan de contouren in rood zijn getekend). De richting van de projectie is aangegeven met gestreepte pijlen en het blauwe model in het projectievlak is de afbeelding van de groene kubus. Dat projectievlak wordt in deze figuur schuin van bovenaf bekeken.

de projecties van de hoekpunten met elkaar te verbinden met rechte lijnen, krijgen we de projectie van de kubus. De richting waarin wordt geprojecteerd, wordt gegeven door de hoeken α en β.

De *birds eye view* in figuur J.4 hebben we opgebouwd vanuit een geroteerde plattegrond. Op die manier komen rechte hoeken in een horizontale doorsnede van het object ook als rechte hoeken in de projectie terug. Dat is alleen mogelijk als het projectievlak evenwijdig aan de plattegrond wordt gekozen, net zoals dat in figuur J.5 is gedaan. De richting waarin wordt geprojecteerd, heeft daar geen invloed op, althans niet bij een parallelle projectie.

Door de manier waarop we de *birds eye view* van het vakantiehuis hebben opgebouwd, zijn verticale afmetingen van de projectie gelijk aan die van het geprojecteerde object. Om de zijaanzichten te passen op de geroteerde plattegrond (figuur J.3), hebben we die zijaanzichten in horizontale richting geschaald en in verticale richting wel scheef getrokken, maar niet geschaald. Dit is terug te voeren op een keuze voor de hoek β in de definitie van de richting waarin wordt geprojecteerd. De hoek α is gelijk aan de hoek waarover we de plattegrond in het horizontale vlak hebben geroteerd.

De impressie van de manier waarop projecties van drie dimensionale objecten op de tekentafel kunnen worden geconstrueerd, sluiten we hierbij af en we gaan na hoe zulke projecties kunnen worden berekend. Dat ligt immers aan de basis van alle software waarmee 3D tekeningen gemaakt kunnen worden. Daarbij beperken we ons in eerste instantie tot parallelle projecties op een plat vlak. Daarna kijken we naar een specifiek voorbeeld van een niet-parallelle projectie op een plat vlak (perspectief, in paragraaf J.3).

De berekening

Voor de rekenkundige constructie van een projectie gaan we uit van een willekeurig projectievlak in een xyz-assenstelsel, gegeven door het inprodukt

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \gamma \tag{J.1}$$

waarin $\vec{x}$ de plaatsvector van een willekeurig punt in het vlak en $\vec{n}$ de normaalvector op het vlak. We gaan uit van $||\vec{n}|| = 1$ en $\gamma > 0$. In dat geval is γ de afstand tussen

de oorsprong van het assenstelsel en het vlak. Bovendien geldt daarbij dat als we vanuit de oorsprong in de richting $\vec{n}$ kijken, dan kijken we naar het projectievlak. Dat is niet *per se* nodig, maar wel handig, zoals we later zullen zien.

Stel dat we één of ander punt P (met plaatsvector $\vec{p}$) willen projecteren in de richting $\vec{r}$, gegeven door

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \tag{J.2}$$

waarin α en β de hoeken zijn die de richting van projecteren definiëren, zoals aangegeven in figuur J.5.

De projectie van punt P noemen we Q en de bijbehorende plaatsvector is $\vec{q}$. Deze Q, en dus ook $\vec{q}$, krijgen we door een lijn door P met richting $\vec{r}$ te snijden met het projectievlak. Als Q in het projectievlak ligt, dan moet gelden dat

$$\vec{q} = \vec{p} + \sigma\vec{r} \quad \text{en} \quad \vec{q}\cdot\vec{n} = \gamma \tag{J.3}$$

Als we, net als bij de normaalvector op het projectievlak, $||\vec{r}|| = 1$ kiezen (in (J.2) is dat al gedaan), is $|\sigma|$ gelijk aan de afstand tussen P en Q. Met bovenstaande uitdrukking geldt

$$\sigma = \frac{\gamma - \vec{p}\cdot\vec{n}}{\vec{r}\cdot\vec{n}} \tag{J.4}$$

en ook

$$\vec{q} = \vec{p} + \frac{\gamma - \vec{p}\cdot\vec{n}}{\vec{r}\cdot\vec{n}}\vec{r} \tag{J.5}$$

Voor het gemak noteren we dit als

$$\vec{q} = \mathrm{A}_p(\vec{p}; \vec{r}, \vec{n}, \gamma) \tag{J.6}$$

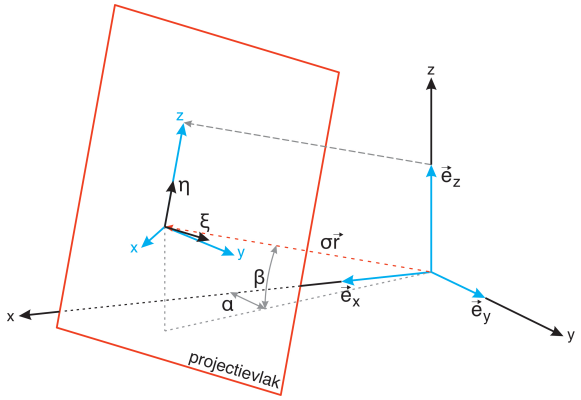
waarin A verwijst naar 'afbeelding' en het subscript p naar 'parallel'.

Hiermee is punt Q bepaald in het xyz-assenstelsel. Voor het tekenen van de afbeelding in het projectievlak hebben we daar niet direct iets aan. Voor zo'n tekening zijn de coördinaten van Q nodig ten opzichte van een twee dimensionaal assenstelsel in het projectievlak. We noemen de twee assen van dat stelsel ξ en η met bijbehorende eenheidsvectoren $\vec{\xi}$ en $\vec{\eta}$. Omdat deze twee vectoren evenwijdig moeten zijn aan het projectievlak, moet gelden dat $\vec{\xi}\cdot\vec{n} = \vec{\eta}\cdot\vec{n} = 0$.

Om ervoor te zorgen dat boven en onder in de afbeelding op het projectievlak overeenkomen met boven en onder van het drie dimensionale object dat we willen projecteren, kiezen we de η as langs de projectie van de z-as. Die projectie kunnen we krijgen door een lijn te trekken door de projecties van twee willekeurige punten op de z. We kiezen daarvoor de uiteinden van de eenheidsvector $\vec{e}_z$ in z-richting. Dat zijn de oorsprong van het xyz stelsel, $(0,0,0)$ en het punt $(0,0,1)$.

Met deze keuze ligt de vector $\vec{\eta}$ op een eventuele normering na, vast:

$$\vec{\eta} \propto \mathrm{A}_p(\vec{e}_z; \vec{r}, \vec{n}, \gamma) - \mathrm{A}_p(\vec{0}; \vec{r}, \vec{n}, \gamma) = \vec{e}_z - \frac{\vec{e}_z\cdot\vec{n}}{\vec{r}\cdot\vec{n}}\vec{r} \tag{J.7}$$



Figuur J.6: Principe van een parallelle projectie in de richting $\vec{r}$ en de keuze van een coördinaten stelsel $\xi\eta$ in het projectievlak. De η-as in het projectievlak heeft dezelfde richting als de projectie van de z-as in de 3–dimensionale ruimte en de ξ-as is evenwijdig aan het xy-vlak.

waarin $\vec{0}$ de nulvector. Inclusief normering zodat $||\vec{\eta}|| = 1$ wordt dit

$$\vec{\eta} = \left(\vec{e}_z - \frac{\vec{e}_z \cdot \vec{n}}{\vec{r} \cdot \vec{n}}\vec{r}\right) \left\|\vec{e}_z - \frac{\vec{e}_z \cdot \vec{n}}{\vec{r} \cdot \vec{n}}\vec{r}\right\|^{-1} \tag{J.8}$$

De projectie van $\vec{e}_z$ om $\vec{\eta}$ in de gewenste richting te krijgen, is geschetst in figuur J.6. In het projectievlek is deze $\vec{\eta}$ de eenheidsvector in verticale richting. De bijbehorende horizontale eenheidsvector is $\vec{\xi}$. Deze is vanzelf ook evenwijdig aan het projectievlak en staat dus loodrecht op $\vec{n}$.

We kiezen $\vec{\xi}$ bovendien loodrecht op $\vec{\eta}$, zodanig dat als we in de richting van de oorsprong van het xyz-stelsel naar het projectievlak kijken, $\vec{\eta}$ naar boven wijst en $\vec{\xi}$ naar rechts. In dat geval kunnen we $\vec{\xi}$, inclusief normering, bepalen uit

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{\eta} \times \vec{n}}{||\vec{\eta} \times \vec{n}||} \tag{J.9}$$

(waarin $\times$ het uitprodukt is) mits $\gamma > 0$ (als $\gamma < 0$, levert $\vec{n} \times \vec{\eta}$ een $\vec{\xi}$ die naar links is).

Met deze twee vectoren kunnen we de projectie in het projectievlak tekenen ten opzichte van een $\xi\eta$-assenstelsel met eenheidsvectoren $\vec{\xi}$ en $\vec{\eta}$. Deze beide vectoren kunnen we ook gebruiken in een vectorvoorstelling van het projectievlak:

$$\vec{x} = \frac{\gamma}{\vec{r} \cdot \vec{n}}\vec{r} + \lambda\vec{\xi} + \mu\vec{\eta} \tag{J.10}$$

De eerste term in het rechter lid van deze uitdrukking is de projectie van de oorsprong van het xyz-assenstelsel. Dat volgt direct uit evaluatie van $\mathrm{A}_p(\vec{0}; \vec{r}, \vec{n}, \gamma)$ (of uit (J.5) met $\vec{p} = \vec{0}$). Daarmee is de oorsprong van het $\xi\eta$-stelsel de projectie van de oorsprong van het xyz-stelsel. Noodzakelijk is dat natuurlijk niet, maar het lijkt een voor de hand liggende keuze.

De vectorvoorstelling (J.10) van het projectievlak kan worden gebruikt om de coördinaten (λ, μ) van de projectie van een willekeurig punt P (met plaatsvector

$\vec{p}$) te bepalen. Eerder hebben we die projectie berekend uit $(\vec{p}+\sigma\vec{r})\cdot\vec{n}=\gamma$ (zie (J.3) en (J.4)). Dat levert echter de coördinaten in het xyz-stelsel op, terwijl we voor het tekenen van de projectie in het projectievlak de coördinaten in het $\xi\eta$-stelsel nodig hebben. Die krijgen we door de lijn $\vec{x}=\vec{p}+\sigma\vec{r}$ te snijden met het projectievlak, net als eerst, maar nu met gebruik van de vectorvoorstelling (J.10). Dat levert

$$\vec{p}+\sigma\vec{r}=\frac{\gamma}{\vec{r}\cdot\vec{n}}\vec{r}+\lambda\vec{\xi}+\mu\vec{\eta} \tag{J.11}$$

Dit is een stelsel van drie lineaire vergelijkingen waaruit de onbekenden λ, μ en σ kunnen worden opgelost. Dat kan op diverse manieren. In deze appendix maken we daarbij gebruik van wat al eerder is genoemd, namelijk dat beide leden van (J.11) verwijzen naar een punt dat in het projectievlak ligt en dus moeten voldoen aan (J.1). Ergo

$$\begin{aligned}(\vec{p}+\sigma\vec{r})\cdot\vec{n}&=\left(\frac{\gamma}{\vec{r}\cdot\vec{n}}\vec{r}+\lambda\vec{\xi}+\mu\vec{\eta}\right)\cdot\vec{n}=\gamma\\ \vec{p}\cdot\vec{n}+\sigma(\vec{r}\cdot\vec{n})&=\gamma+\lambda(\vec{\xi}\cdot\vec{n})+\mu(\vec{\eta}\cdot\vec{n})=\gamma\end{aligned} \tag{J.12}$$

Dit is consistent met (J.4) omdat per definitie $\vec{\xi}\cdot\vec{n}=\vec{\eta}\cdot\vec{n}=0$.

Invullen van (J.4) in (J.11) geeft

$$\left[\vec{\xi},\vec{\eta}\right]\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\vec{p}-\frac{\vec{p}\cdot\vec{n}}{\vec{r}\cdot\vec{n}}\vec{r} \tag{J.13}$$

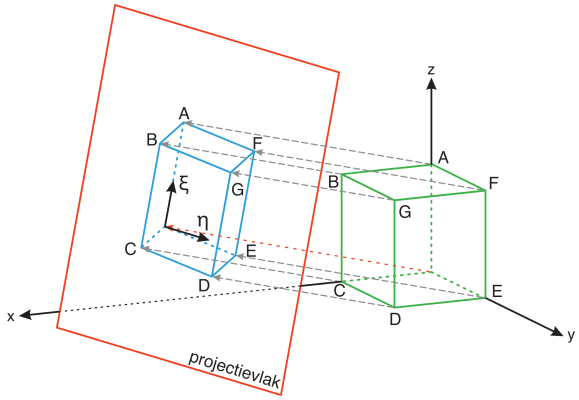
In bovenstaande uitdrukking is de term tussen rechte haken in het linker lid een 3×2 matrix met kolomvectoren $\vec{\xi}$ en $\vec{\eta}$. Zo'n stelsel is of afhankelijk of strijdig. In dit specifieke geval is het stelsel afhankelijk omdat we één van de oplossingen (J.4) in dat volledige stelsel hebben ingevuld. De oplossing voor λ en μ is vervolgens te vinden door de bovenstaande vergelijking te vermenigvuldigen met de getransponeerde van $\left[\vec{\xi},\vec{\eta}\right]$. Aangezien $\vec{\xi}$ en $\vec{\eta}$ een orthonormale basis (voor de tekening in het projectievlak) vormen, volgt dat

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\left[\vec{\xi},\vec{\eta}\right]^T\left(\vec{p}-\frac{\vec{p}\cdot\vec{n}}{\vec{r}\cdot\vec{n}}\vec{r}\right) \tag{J.14}$$

waarin het superscript T aangeeft dat het om de getransponeerde gaat. Kortom, de coördinaten (λ,μ) in de projectie van een punt P met plaatsvector $\vec{p}$ worden gegeven door

$$\lambda=(\vec{\xi}\cdot\vec{p})-\frac{\vec{p}\cdot\vec{n}}{\vec{r}\cdot\vec{n}}(\vec{\xi}\cdot\vec{r}) \tag{J.15}$$

$$\mu=(\vec{\eta}\cdot\vec{p})-\frac{\vec{p}\cdot\vec{n}}{\vec{r}\cdot\vec{n}}(\vec{\eta}\cdot\vec{r}) \tag{J.16}$$



Figuur J.7: Principe van een orthografische projectie van een kubus (in groen aangegeven) met hoekpunten A t/m G. De projecties van deze hoekpunten worden verkregen door de snijpunten te bepalen van lijnen die loodrecht staan op het projectievlak en gaan door de hoekpunten van de originele kubus. De afbeelding van de kubus is in blauw getekend.

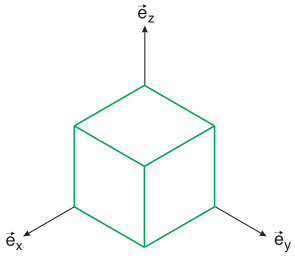
Een bijzonder geval van de parallelle projectie is de orthografische (of orthogonale) projectie. Daarbij wordt loodrecht op het projectievlak geprojecteerd en is dus $\vec{r} = \vec{n}$, zodat

$$\begin{aligned} \lambda &= (\vec{\xi} \cdot \vec{p}) - (\vec{p} \cdot \vec{n})(\vec{\xi} \cdot \vec{n}) \\ \mu &= (\vec{\eta} \cdot \vec{p}) - (\vec{p} \cdot \vec{n})(\vec{\eta} \cdot \vec{n}) \end{aligned} \tag{J.17}$$

Een toepassing op een kubus is gegeven in figuur J.7. De richting van projecteren is aangegeven met de rode streepjeslijn (die de oorsprong van het xyz-assenstelsel verbindt met die van de $\xi\eta$-stelsel in het projectievlak). Deze figuur is enigszins misleidend omdat er een projectie van een projectie in zit. Het gaat om een orthografische projectie van twee objecten: de (groene) kubus en het (rode) vlak met daarin een orthografische projectie (blauw) van de groene kubus. Beide objecten, inclusief de blauwe, 2–dimensionale afbeelding van de groene kubus, zijn geprojecteerd op een tweede projectievlak. Dat tweede vlak is niet afgebeeld in figuur J.7, maar deze figuur ís dat vlak. Als we consequent waren geweest met het rood omranden van projectievlakken, had figuur J.7 zelf ook een rode rand gehad. Wie loodrecht kijkt naar het rood omrande projectievlak dat is getekend in figuur J.7, zou de blauwe kubus ongeveer net zo zien als de groene kubus die in deze figuur is afgebeeld.

Een orthografische projectie van het vakantiehuis dat we in deze paragraaf als referentie hebben geïntroduceerd, is gegeven in figuur J.1. In het algemeen wordt een orthografische projectie als meer realistisch ervaren dan een projectie in een andere richting als het projectievlak niet horizontaal is. Het lijkt meer op een foto, maar mist het effect van diepte. De afbeelding van een object is altijd even groot, onafhankelijk van de afstand tot het projectievlak. Dat is inherent aan parallelle projectie en is in de uitdrukkingen voor de coördinaten λ en μ terug te vinden door het ontbreken van γ (zie (J.15), (J.16) en (J.17)). Bij projectie in perspectief worden objecten wel kleiner afgebeeld naarmate zij verder van het projectievlak verwijderd zijn. Daarover meer in de volgende paragraaf J.3.

Tot slot van deze paragraaf een bijzonder geval van een orthografische projectie



Figuur J.8: Bij een isometrische projectie (in deze figuur van een kubus, aangegeven in groen) wordt de vertikaal in de 3–dimensionale ruimte ook verticaal afgebeeld en de beide horizontale richtingen (die van de x- en y-assen) onder een hoek nam 30^o met de horizontaal in het projectievlak.

is de zogeheten isometrische projectie. Daarbij is de richting van projecteren en dus ook de oriëntatie van het projectievlak zodanig gekozen dat de projecties van de eenheidsvectoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ en $\vec{e}_z$ in de afbeelding gelijke hoeken met elkaar maken. Die hoeken zijn in dat geval allemaal $2\pi/3$ (ofwel 120^o). Omdat het om een orthografische projectie gaat, past hierbij dat in de 3–dimensionale ruimte de vector $\vec{r}$ (of $\vec{n}$, want die hebben bij een orthogonale projectie dezelfde richting) ook gelijke hoeken maakt met de drie eenheidsvectoren. Bij een isometrische projectie geldt zodoende dat

$$\vec{e}_x \cdot \vec{r} = \vec{e}_y \cdot \vec{r} = \vec{e}_z \cdot \vec{r} \tag{J.18}$$

Gecombineerd met(J.2) volgt dat

$$\cos\alpha \cos\beta = \sin\alpha \cos\beta = \sin\beta \tag{J.19}$$

en als we ons beperken tot richtingen van projectie in het eerste octant (dat deel van de 3–dimensionale ruimte waarin zowel x, y als z positief zijn), volgt hieruit dat $\alpha = \pi/4$ en $\beta = \arctan(\sqrt{2}/2)$ (ofwel $\beta \approx 35,26^o$). In een isometrische projectie wordt verticaal in de 3–dimensionale ruimte afgebeeld als verticaal in de projectie, wijst de x-as onder een hoek van $\pi/6$ met de horizontaal naar linksonder en de y-as met een overeenkomstige hoek naar rechtsonder. Ter illustratie is een isometrische projectie van een kubus gegeven in figuur J.8.

Andere bijzondere vormen van de orthografische projectie zijn de planimetrische projectie, de cabinet projectie en de cavalier projectie. Bij de laatstgenoemde twee valt de projectie van de x-as samen met de ξ-as. Voor meer eigenschappen van deze projecties en ook andere methoden van projecteren, wordt verwezen naar de literatuur.

J.3 Perspectief

Perspectief projectie onderscheidt zich van orthografische projectie in het weergeven van het effect van diepte. Bij orthografische projectie maakt het voor de afbeelding niet uit op welke afstand een object zich bevindt tot het projectievlak. Bij perspectief projectie is dat wel zo. Naarmate een object zich op grotere afstand tot het projectievlak bevindt (gezien in de richting waarin wordt gekeken, dus tegengesteld aan $\vec{n}$), wordt het kleiner afgebeeld. Dit geeft een illusie van diepte

in de afbeelding die dichter bij de menselijke waarneming wordt ervaren dan een orthografische projectie.

Perspectief projectie lijkt in die zin op orthografische projectie dat ergens in de 3–dimensionale ruimte waarin zich het te projecteren object bevindt, een projectievlak wordt gedefinieerd. Dit vlak is gepositioneerd tussen object en waarnemer. Dat wil zeggen dat de waarnemer door het projectievlak heen kijkt naar het object. Bij perspectief projectie is die waarnemer gereduceerd tot één punt, zeg maar het oog van de waarnemer. Vanuit dat oog kijkt de waarnemer langs rechte lijnen naar alle punten van het object. De afbeelding is opgebouwd uit de snijpunten van al die rechte lijnen met het projectievlak.

Omdat alle lijnen waarlangs het object op het projectievlak wordt geprojecteerd, samenkomen in het oog van de waarnemer, wordt deze vorm van projecteren ook convergente projectie genoemd (in tegenstelling tot parallelle projectie). Het projectievlak bevindt zich tussen dit oog en het af te beelden object. De projectie van een willekeurig punt van het object wordt verkregen door de lijn die dit punt met het oog van de waarnemer verbindt, te snijden met het projectievlak. Het snijpunt is de projectie.

Dit principe is geïllustreerd in figuur J.9. Aan de linker kant in deze figuur (figuur J.9(a)) is een drie dimensionale impressie gegeven van de projectie van een kolom met een rechthoekige horizontale doorsnede. De waarnemer kijkt van linksboven naar deze kolom. De bovenkant van de kolom verschijnt iets groter in de afbeelding dan de onderkant vanwege het verschil in afstand tot het projectievlak. Een aanzicht van dat projectievlak is gegeven in figuur J.9(b), waarin dit effect iets duidelijker tot uitdrukking komt.

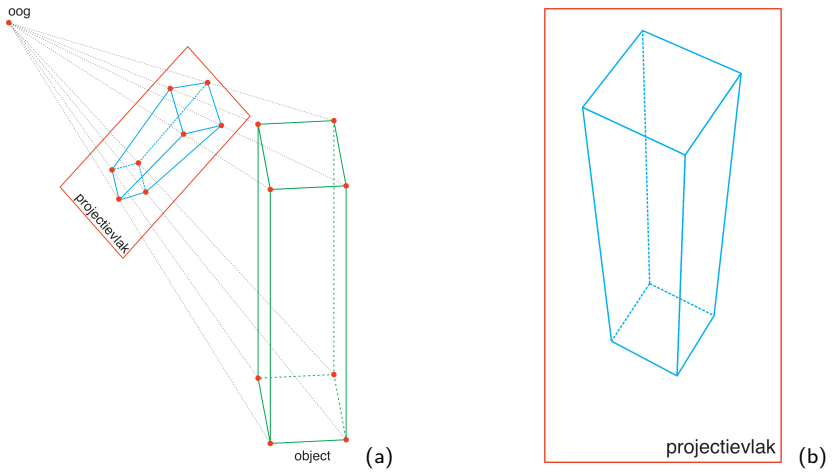
Voor de berekening van de projectie[112] gaan we weer uit van een projectievlak $\vec{x} \cdot \vec{n} = \gamma$ met $||\vec{n}|| = 1$ en $\gamma > 0$. De waarnemer kijkt in de richting van de oorsprong van het xyz-stelsel en diens oog bevindt zich in punt W. De plaatsvector van bij dit punt is $\vec{w} = \phi\vec{n}$, met $\phi > \gamma$.

Op deze manier vinden we de projectie van de oorsprong van het xyz-stelsel op $\gamma\vec{n}$, net als bij de orthografische projectie. Die projectie kiezen we als oorsprong van een $\xi\eta$ assenstelsel in het projectievlak en ten opzichte waarvan de afbeelding van een object wordt gedefiniëerd. Ook dit gaat net als bij de orthografische projectie:

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\eta} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix} \tag{J.20}$$

Om de projectie Q (met plaatsvector $\vec{q}$) van een willekeurig punt P (met plaatsvector $\vec{p}$) te bepalen, snijden we een lijn door P en het oog (met plaatsvector $\vec{w} = \phi\vec{n}$) met het projectievlak. Een vectorvoorstelling van die lijn is $\vec{x} = \vec{p} + \sigma(\phi\vec{n} - \vec{p})$.

[112] Met dank aan mr. M.C. van Imhoff voor het meedenken.



Figuur J.9: Voorbeeld van een perspectief projectie van een kolom. Het principe van deze vorm van projecteren is weergegeven in figuur (a) waarbij afbeeldingen van punten van een object worden verkregen door die punten te verbinden met het oog van de waarnemers. De snijpunten van de verbindingslijnen met het projectievlak, zijn de afbeeldingen van die punten. In figuur (b) is het aanzicht van het projectievlak gegeven. Het perspectief effect is daarin herkenbaar. De afgebeelde kolom wordt van bovenaf bekeken en de onderkant wordt kleiner weergegeven dan de bovenkant omdat deze zich verder van de waarnemer bevindt.

Voor het snijpunt met het projectievlak geldt dat

$$(\vec{p} + \sigma(\phi\vec{n} - \vec{p})) \cdot \vec{n} = \gamma \quad \Longrightarrow \quad \sigma = \frac{\gamma - \vec{p} \cdot \vec{n}}{\phi - \vec{p} \cdot \vec{n}} \tag{J.21}$$

zodat

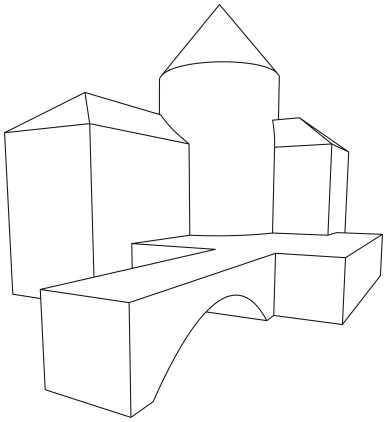
$$\vec{q} = \vec{p} + \frac{\gamma - \vec{p} \cdot \vec{n}}{\phi - \vec{p} \cdot \vec{n}}(\phi\vec{n} - \vec{p}) \tag{J.22}$$

Om de coördinaten (λ, μ) van het snijpunt Q ten opzichte van het $\xi\eta$-stelsel te bepalen, berekenen we het snijpunt nogmaals, maar dan door het projectievlak te beschrijven met de vectorvoorstelling $\vec{x} = \gamma\vec{n} + \lambda\vec{\xi} + \mu\vec{\eta}$. Dit leidt tot

$$\left[\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{p} - \phi\vec{n}\right] \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \sigma \end{pmatrix} = \vec{p} - \gamma\vec{n} \tag{J.23}$$

waaruit λ, μ en σ kunnen worden opgelost. Daarbij kan gebruik worden gemaakt van de reeds bekende oplossing voor σ (zie de rechter uitdrukking in (J.21)). Daarmee reduceert bovenstaande vergelijking tot

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \left[\vec{\xi}, \vec{\eta}\right]^T \left(\vec{p} + \frac{\gamma - \vec{p} \cdot \vec{n}}{\phi - \vec{p} \cdot \vec{n}}(\phi\vec{n} - \vec{p}) - \gamma\vec{n}\right) \tag{J.24}$$



Figuur J.10: Perspectief projectie van een draadmodel van het fictieve vakantiehuis.

ofwel, omdat $\vec{\xi} \cdot \vec{n} = \vec{\eta} \cdot \vec{n} = 0$,

$$\begin{aligned} \lambda &= (\vec{\xi} \cdot \vec{p}) \left(1 - \frac{\gamma - \vec{p} \cdot \vec{n}}{\phi - \vec{p} \cdot \vec{n}}\right) \\ \mu &= (\vec{\eta} \cdot \vec{p}) \left(1 - \frac{\gamma - \vec{p} \cdot \vec{n}}{\phi - \vec{p} \cdot \vec{n}}\right) \end{aligned} \tag{J.25}$$

Ter illustratie is een perspectief projectie van een draadmodel van het eerder genoemde vakantiehuis gegeven in figuur J.10.

Bij tekeningen uit de vrije hand wordt doorgaans gebruik gemaakt van zogeheten verdwijnpunten om perspectief aan te brengen. Dat refereert aan het verschijnsel dat als je midden op een biels van een lange, rechte spoorweg staat, de spoorstaven in de verte naar elkaar toe lijken te neigen, terwijl ze in werkelijkheid heel prettig op gelijke afstand blijven. Langs de gehele spoorweg hebben de bielzen allemaal dezelfde afmeting, maar hoe verder af van de waarnemer, hoe kleiner ze lijken en dus ook hoe dichter de spoorstaven bij elkaar lijken te liggen.

Deze schijnbare convergentie is karakteristiek voor perspectief tekeningen en geldt voor alle mogelijke sets van evenwijdige lijnen, onafhankelijk van hun richting. Dat valt af te leiden door $\vec{p}$ ergens langs een lijn $\vec{p} = \vec{u} + \psi\vec{v}$ te kiezen, met $\vec{u}$ en $\vec{v}$ willekeurige plaats–, respectievelijk richtingsvectoren. Met toenemende $|\psi|$ ligt punt P, gegeven door plaatsvector $\vec{p}$, steeds verder weg van de waarnemer.

Door $\vec{v}$ constant te houden en $\vec{u}$ te variëren, ontstaan sets van evenwijdige lijnen en naarmate $|\psi|$ toeneemt, komen projecties van P voor diverse $\vec{u}$ steeds dichter bij elkaar te liggen. Dat volgt direct door $\vec{p} = \vec{u} + \psi\vec{v}$ in te vullen in de uitdrukkingen (J.25):

$$\begin{aligned} \lambda &= (\vec{\xi} \cdot \vec{u} + \psi\vec{\xi} \cdot \vec{v}) \left(1 - \frac{\gamma - \vec{u} \cdot \vec{n} - \psi\vec{v} \cdot \vec{n}}{\phi - \vec{u} \cdot \vec{n} - \psi\vec{v} \cdot \vec{n}}\right) \\ \mu &= (\vec{\eta} \cdot \vec{u} + \psi\vec{\eta} \cdot \vec{v}) \left(1 - \frac{\gamma - \vec{u} \cdot \vec{n} - \psi\vec{v} \cdot \vec{n}}{\phi - \vec{u} \cdot \vec{n} - \psi\vec{v} \cdot \vec{n}}\right) \end{aligned} \tag{J.26}$$

Naarmate $|\psi|$ toeneemt, dus hoe verder P van de waarnemer af ligt, verliezen $\vec{u}$, γ en ϕ invloed op de coördinaten λ en μ ten opzichte van de richtingsvector $\vec{v}$. Daaruit blijkt dat evenwijdige lijnen in de verte naar elkaar toe neigen, althans in de perspectief projectie.

In de limiet voor $\psi \to \infty$ convergeren de coördinaten λ en μ naar achtereenvolgens[113]

$$\begin{aligned} \lambda_\infty &= \lim_{\psi\to\infty} (\vec{\xi}\cdot\vec{u} + \psi\vec{\xi}\cdot\vec{v}) \left(1 - \frac{\gamma - \vec{u}\cdot\vec{n} - \psi\vec{v}\cdot\vec{n}}{\phi - \vec{u}\cdot\vec{n} - \psi\vec{v}\cdot\vec{n}}\right) = (\gamma - \phi)\frac{\vec{\xi}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{n}} \\ \mu_\infty &= \lim_{\psi\to\infty} (\vec{\eta}\cdot\vec{u} + \psi\vec{\eta}\cdot\vec{v}) \left(1 - \frac{\gamma - \vec{u}\cdot\vec{n} - \psi\vec{v}\cdot\vec{n}}{\phi - \vec{u}\cdot\vec{n} - \psi\vec{v}\cdot\vec{n}}\right) = (\gamma - \phi)\frac{\vec{\eta}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{n}} \end{aligned} \tag{J.27}$$

Dit resultaat geldt voor $\psi \to +\infty$. De tegenhanger voor $\psi \to -\infty$ kunnen we vinden door in bovenstaande uitdrukkingen $\vec{v}\cdot\vec{n}$ te vervangen door $-\vec{v}\cdot\vec{n}$, als het ware door tegen de richting $\vec{v}$ in te kijken.

Het punt met coördinaten $(\lambda_\infty, \mu_\infty)$ in de projectie wordt het verdwijnpunt genoemd. Voor elke richting $\vec{v}$ (in het xyz–stelsel) kan zo'n punt worden aangewezen. Met onze keuze voor het $\xi\eta$-assenstelsel in het projectievlak geldt bijvoorbeeld dat alle lijnen van een te projecteren object die loodrecht staan op het projectievlak, in de projectie convergeren naar $(0, 0)$. Voor zulke lijnen geldt immers dat $\vec{v} \propto \vec{n}$ en dan is $\vec{\xi}\cdot\vec{v} = \vec{\eta}\cdot\vec{v} = 0$. Echter, voor lijnen van het object die evenwijdig zijn aan het projectievlak, geldt dat $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$ en ligt het verdwijnpunt oneindig ver van $(0, 0)$.

[113] Dit kan worden berekend met de regel van l'Hôpital.

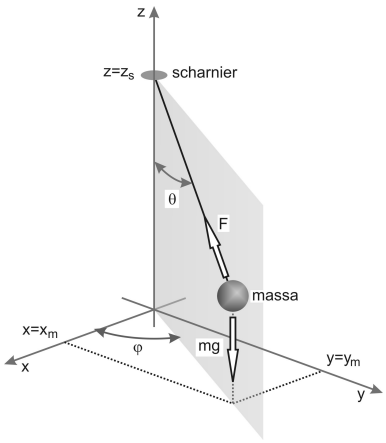
K

Slinger van Foucault

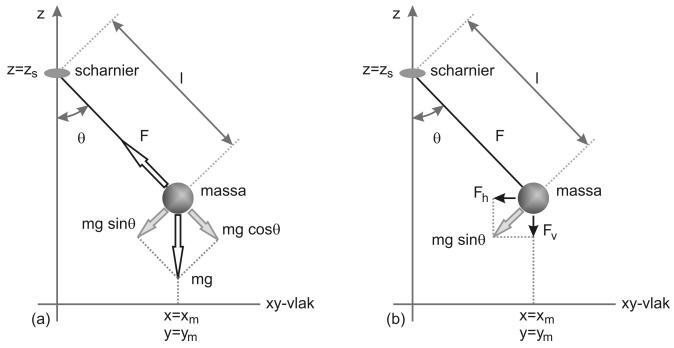
Op de slinger van Foucault kun je letterlijk de klok gelijk zetten en die slinger is te zien als een museale verwijzing naar het Coriolis effect, of Coriolis afbuiging zoals het vaak in de literatuur wordt genoemd: bescheiden maar persistent en daardoor al gauw van belang. Net als zo veel slingers bestaat ook die van Foucault uit een massa die met een staaf of draad is opgehangen aan een scharnier. De Franse natuurkundige Leon Foucault (1819-1868) gebruikte de slinger om aan te tonen dat de aarde draait. De beweging van een slinger kan niet beperkt zijn tot een verticaal vlak omdat de heen en weer bewegende massa onderhevig is aan het Coriolis effect. Tijdens die beweging moet de massa continu naar rechts afbuigen (althans op het noordelijk halfrond). Dat zie je echter in vrijwel geen enkele praktische toepassing van een slinger. Vaak komt dat omdat het scharnier waar de slinger aan hangt rotatie om slechts één (horizontale) as toelaat. Bij slingeruurwerken is dat bijvoorbeeld het geval. Bij een scharnier dat deze beperking niet heeft, is de Coriolis afbuiging wel zichtbaar te maken. Eenvoudig is dat echter niet. De afbuiging wordt immers veroorzaakt door een relatief zwakke (schijn-)kracht die zich alleen kan manifesteren bij een voldoende lage wrijving in het scharnier. Daarnaast zijn er heel wat slingerbewegingen nodig voordat de afbuiging met het ongewapend oog kan worden waargenomen. Ook dat vraagt een geringe wrijving in het scharnier, zodat wordt voorkomen dat de slinger vroegtijdig stilvalt.

Voor een mathematische beschrijving kijken we naar een slinger in de vorm van een massa m die met een massaloze, oneindig stijve (dus vormvaste) draad met lengte l is opgehangen aan een scharnier (zie figuur K.1) De beweging van deze slinger beschrijven we ten opzichte van een assenstelsel met horizontale assen x en y en verticale as z. Voorts kiezen we dit assenstelsel zo dat het scharnier op de z-as ligt (bij $z = z_s$). We beginnen met een inventarisatie van de krachten die op de slinger werken. De schijnkrachten die verband houden met een eventuele rotatie van het assenstelsel laten we in eerste instantie buiten beschouwing. We doen dus alsof het xyz-stelsel een vast assenstelsel is.

Op enig moment tijdens z'n beweging bevindt de slinger zich in een verticaal vlak. Omdat het scharnier op de z-as ligt, ligt deze as in dat verticale vlak. In figuur



Figuur K.1: Schematische weergave van een slinger en het assenstelsel ten opzichte waarvan de beweging van de massa onderaan die slinger wordt beschreven.



Figuur K.2: Op de massa onderaan de slinger werken de zwaartekracht (mg) en de kracht F in de draad. De zwaartekracht wordt ontbonden in componenten in het verlengde van de draad en daar loodrecht op (a). De loodrechte component wordt vervolgens ontbonden in een horizontale en een verticale component (b).

K.1 is een deel van dat vlak met grijs aangegeven. Het maakt een hoek ϕ met de x-as en in het vlak maakt de slinger een hoek θ met de z-as.

Er werken op dat moment twee krachten op de massa (wrijving verwaarlozen we gemakshalve). Eén daarvan is de zwaartekracht. Deze werkt in negatieve z-richting en heeft een grootte mg (met g de versnelling van de zwaartekracht). De andere kracht is de trekkracht in de draad, in figuur K.1 aangegeven met F.

In het vlak van de slinger (het grijze vlak in figuur K.1)) kunnen we de zwaartekracht ontbinden in een component in de richting van de draad en een component daar loodrecht op. Dit is geschetst in figuur K.2a. Omdat we de draad oneindig stijf hebben verondersteld, kan de massa alleen loodrecht op die draad bewegen. Dat wil echter niet zeggen dat de resultante kracht langs de draad gelijk is aan nul. Deze resultante, gelijk aan $F - mg\cos\theta$, is de centripetaalkracht die nodig is om de massa een gekromde baan te laten doorlopen.

De component $mg\sin\theta$ in de bewegingsrichting van de massa ontbinden we in een horizontale component $F_h = -mg\sin\theta\cos\theta$ en een verticale component $F_v = -mg\sin^2\theta$ (zie figuur K.2b). Vervolgens ontbinden we F_h in componenten langs de beide horizontale assen: $F_{h,x} = F_h\cos\phi$ en $F_{h,y} = F_h\sin\phi$. Met deze ontbindingen

kunnen we de kracht die voor de beweging van de massa zorgt, schrijven als een vector $\vec{F}$, gegeven door

$$\vec{F} = -mg \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\theta\sin\phi \\ \sin^2\phi \end{pmatrix} = -mg \begin{pmatrix} \frac{x_m}{l}\cos\theta \\ \frac{y_m}{l}\cos\theta \\ \frac{x_m^2+y_y^2}{l^2} \end{pmatrix} \tag{K.1}$$

Zonder daarvoor argumenten aan te dragen, beperken we ons tot een slinger waarbij de horizontale uitwijking klein is in vergelijking tot de lengte l. In dat geval is $\cos\theta$ ongeveer gelijk aan 1. Met deze benadering en na delen door de massa m wordt uitdrukking (K.1)

$$\frac{1}{m}\vec{F} \approx -\frac{g}{l} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ (x_m^2 + y_y^2)/l \end{pmatrix} \tag{K.2}$$

Bovenstaande uitdrukking relateert de versnellingen F/m van de massa onderaan de slinger aan z'n positie. Voor (K.2) kunnen we dus schrijven

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} = -\frac{g}{l} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ (x_m^2 + y_y^2)/l \end{pmatrix} \tag{K.3}$$

Voor bijpassende randvoorwaarden (beginwaarden) kunnen we deze 2^{e} orde differentiaalvergelijking integreren en dat levert ons de positie van de massa onderaan de slinger als functie van de tijd. Deze randvoorwaarden zouden betrekking kunnen hebben op het in beweging zetten van de slinger. Denk daarbij aan het loslaten vanuit een opgelegde uitwijking. Op het moment van loslaten is de positie van de slinger voorgeschreven en de snelheid is dan nog juist gelijk aan nul. Een andere mogelijkheid is dat de slinger in beweging wordt gebracht door het ding een zetje te geven. In dat geval is de initiële snelheid niet gelijk aan nul.

In uitdrukking (K.3) is het Coriolis effect niet begrepen. Dat hadden we even geparkeerd en moet alsnog gebeuren. Daarvoor maken we gebruik van de generieke, kwantitatieve beschrijving die we in paragraaf 5.2.2 van dat effect in het horizontale vlak hebben opgesteld. Uitdrukking (5.9) is daarvan het resultaat. Als we deze uitdrukking vergelijken met (K.3) , dan zien we dat het linker lid van (K.3) overeenkomt met $\mathrm{d}^2p/\mathrm{d}t^2$ en het rechter lid met $\mathbf{U}^{-1}\mathrm{d}^2\mu/\mathrm{d}t^2$. De term die in (K.3) niet voorkomt maar wel in (5.9), is de Coriolis term. Toevoegen van deze term geeft voor (K.3)

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} + 2\Omega \begin{pmatrix} 0 & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} = -\frac{g}{l} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ (x_m^2 + y_y^2)/l \end{pmatrix} \tag{K.4}$$

(met Ω de hoeksnelheid van de rotatie van de aarde) wat zonder gebruik te maken van vectoren kan worden geschreven als

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 x_m}{\mathrm{d}t^2} - f\frac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}t} &= -\frac{g}{l}x_m \\ \frac{\mathrm{d}^2 y_m}{\mathrm{d}t^2} + f\frac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}t} &= -\frac{g}{l}x_m \\ \frac{\mathrm{d}^2 z_m}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{g}{l}\frac{x_m^2 + y_y^2}{l} \end{aligned} \tag{K.5}$$

(waarin f de Coriolis parameter).

Kennelijk zijn x_m en y_m onderling gekoppeld en is z_m afhankelijk van x_m en y_m. Dat maakt het mogelijk om eerst x_m en y_m te bepalen en pas daarna z_m te berekenen, alle als functie van de tijd.

De vorm van de bovenste twee vergelijkingen van (K.5) komt nauw overeen met die van de impulsvergelijkingen (voor horizontale componenten van de stroomsnelheid) zoals die vaak worden gebruikt in waterloopkundige berekeningen. Traagheid en het Coriolis effect (in het linker lid) balanceren samen met aandrijving (rechter lid).

Voor de volledigheid gaan we uit de bovenste twee vergelijkingen van (K.5) x_m en y_m oplossen met randvoorwaarden die overeenkomen met het loslaten van de slinger op tijdstip $t = 0$ precies boven het punt $(x_0, y_0, 0)$. Op het moment van loslaten is de snelheid van de massa onderaan de slinger gelijk aan nul. Deze randvoorwaarden (beginwaarden) schrijven we als

$$\begin{aligned} x_m(0) = x_0 \quad ; \quad \left.\frac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 \\ y_m(0) = x_0 \quad ; \quad \left.\frac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 \end{aligned} \tag{K.6}$$

Een methode om x_m en y_m op te lossen begint met de introductie van de complexe variabele u_m, gedefinieerd als

$$u_m = x_m + iy_m \quad ; m \quad i^2 = -1 \tag{K.7}$$

waarmee de eerste twee vergelijkingen van (K.5) en de bijbehorende randvoorwaarden (K.6) achtereenvolgens kunnen worden geschreven als

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_m}{\mathrm{d}t^2} - if\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{l}u_m = 0 \tag{K.8}$$

en

$$u_m(0) = u_0 = x_0 + iy_0 \quad ; \quad \left.\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 \tag{K.9}$$

Hierbij zoeken we een oplossing van de vorm $u_m \propto \exp(i\lambda t)$. Substitutie in (K.8) geeft, na vereenvoudigen,

$$-\lambda^2 - f\lambda + g/l = 0 \tag{K.10}$$

en dat heeft als oplossingen λ_1 en λ_2 volgens

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\left(-f - \sqrt{f^2 + 4g/l}\right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\left(-f + \sqrt{f^2 + 4g/l}\right) \end{aligned} \tag{K.11}$$

Hiermee vinden we voor u_m dat

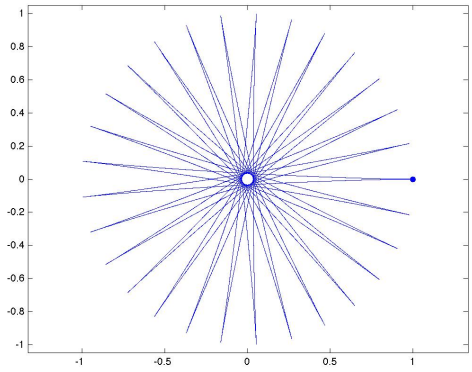
$$u_m = C_1 e^{i\lambda_1 t} + C_2 e^{i\lambda_2 t} \tag{K.12}$$

waarin C_1 en C_2 integratieconstanten zijn die afhangen van de randvoorwaarden (K.9). Met deze randvoorwaarden vinden we

$$u_m(t) = \frac{u_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(-\lambda_2 e^{i\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{i\lambda_2 t}) \tag{K.13}$$

Het reële deel van deze oplossing is de x-component van de beweging van de massa onderaan de slinger en het imaginaire deel de y-component. Met bovenstaande uitdrukking kunnen we de projectie van de beweging van de massa onderaan de slinger op het xy-vlak berekenen. Een visualisatie daarvan is te vinden in figuur K.3. In die figuur gaat het om een zuiver theoretisch geval. De lengte van de slinger is 4671,4km (in welk geval de eerdere aanname $\cos\theta \approx 1$ inderdaad opgaat). Er is voor zo'n grote lengte gekozen om te voorkomen dat f verwaarloosbaar is ten opzichte van $2\sqrt{g/l}$ en het Coriolis effect dus een wezenlijke (zichtbare) invloed heeft op de beweging van de slinger. Bovendien is gezocht naar een lengte waarbij de slinger periodiciteit vertoont bij een beperkt (in dit geval 29) aantal bewegingen. Zo'n lange slinger is volstrekt irreëel, maar het draagt wel bij aan de aantrekkelijkheid van de visualisatie.

Uit (K.13) blijkt dat zowel het reële als het imaginaire deel van u_m de som is van twee oscillaties met frequenties λ_1 en λ_2. Het resultaat is een zweving: een trilling waarbij de amplitude periodiek toe- en afneemt. Dat geldt voor beide delen. Omdat de amplitudes van beide oscillaties niet gelijk zijn, is de zweving niet zuiver. Dat wil zeggen dat de amplitude van de som van de oscillaties nooit helemaal gelijk aan nul wordt. Dat zien we terug in figuur K.3. De baan van de massa onderaan de slinger blijft steeds op enige afstand van de het centrum van de figuur. Dat centrum is de projectie van het scharnier op het xy-vlak. Rondom dit centrum is er een kleine cirkel waar de massa kennelijk nooit overheen beweegt. De straal van deze cirkel is de minimale amplitude die in de zweving optreedt. De maximale amplitude is gelijk aan de straal van de cirkel door alle uitersten van het pad van de massa onderaan de slinger. Merk voor de volledigheid nog even op dat de grootte van die massa in dit hele verhaal (impliciet) irrelevant is gebleken.



Figuur K.3: Projectie van het pad van de massa onderaan de slinger van Foucault op het horizontale vlak. De slinger, met een lengte van 4671,4km, is losgelaten boven de stip midden-rechts in de grafiek. Na 29 slingerbewegingen komt de massa daar weer terug.

Bibliografie

M Abramowitz and IA Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, New York, 1970.

JA Battjes. Surf similarity. *Proc. 14th Conf. Coastal Eng.*, 1:466–480, 1974. doi: 10.9753/icce.v14.26.

JA Battjes, N Booij, and MA Hooimeijer. *Modelvorming*. Technische Universiteit Delft, 1999.

WG Bligh. Dams, barrages and weirs on porous foundations. *Engineering News*, 64(26):708–710, 1910.

P Bruun. Sea-level rise as a cause of shore erosion. *American Society of Civil Engineers Journal of the Waterways and Harbours Division*, 88:117–130, 1962.

Centraal Bureau voor de Statistiek, 2022. URL https://www.cbs.nl/nl-nl.

CF Colebrook. Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between smooth and rough pipe laws. *Journal of the Institution of Civil Engineers*, 11:133–156, 1939. doi: 10.1680/ijoti.1939.13150.

JW Cooley and JW Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90):297–301, 1965.

H Cross. Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, pages 919–928, 1930.

H Cross. Analysis of flow in networks of conduits or conductors. Technical Report Bulletin 286, University of Illinois, 1936.

Deltacommissie. Samen werken met water, 2008. URL https://http://www.deltacommissie.com/doc/2008-12-10%20publieksversie.pdf.

N Draper and H Smith. *Applied regression analysis*. John Wily & sons, NY, 1966.

FF Escoffier. The stability of tidal inlets. *Shore and beach*, 8(4):114–115, 1940.

JR Garratt. Review of drag coefficients over oceans and continents. *Monthly weather review*, 105:915–929, 1977.

G Geerts and H Heestermans. *Van Dale groot woordenboek der Nederlandse taal*. Van Dale Lexicografie, 12 edition, 1992.

EJ Gumbel. *Statistics of extremes*. Columbia University press, NY, 1958.

K Hasselmann, TP Barnet, E Bouws, H Carlson, DE Cartwright, K Enke, JA Ewing, H Gienapp, DE Hasselmann, P Kruseman, A Meerburg, P Muller, DJ Olbers, K Richter, W Sell, and H Walden. Measurement of wind-wave growth and swell decay during the joint north-sea wave project. *Deutches Hydrographisches Zeitschrift*, Erganzungsheft 12:95, 1973.

R Henderson. Design, simulation, and testing of a novel hydraulic power take-off system for the pelamis wave energy converter. *Renewable Energy*, 31(2):271–283, 2006. doi: doi.org/10.1016/j.renene.2005.08.021.

LH Holthuijsen. *Waves in oceanic and coastal waters*. Cambridge University Press, 2007. doi: 10.1017/CBO9780511618536.

RY Hudson. Wave forces on breakwaters. *Transactions ASCE*, 118:653–6 74, 1953.

CR Iribarren and C Nogales. Protection des ports. *Proc. 17th Int. Navigation Congress*, 4:31–80, 1949.

JW Kamphuis. Alongshore sediment transport rate. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 117:624–640, 1991.

EW Lane. Security from under-seapage-masonry dams on earth foundations. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 100, 1935. doi: doi.org/10.1061/TACEAT.0004655.

M. Longuet-Higgins. Mass transport in water waves. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A 245(903):535–581, 1953.

R Miche. Mouvements ondulatoires des mers en profondeur constante ou décroissante. *Annales des ponts et chaussées*, 114:369–406, 1944.

Milieu Centraal, 2022. URL https://www.milieucentraal.nl/klimaat-en-aarde/energiebronnen/waterkracht/.

LF Moody. Friction factors for pipe flow. *Transactions ASME*, 66, 1944.

JA Nelder and R Mead. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7:308–313, 1965.

HO Peitgen and P.H. Richter. *The Beauty of Fractals*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1986. ISBN isbn 3-540-15851-0.

R Pelnard-Considère. Essai de théorie de l'évolution des formes de rivage en plages de sable et de galets. *Les Energies de la Mer: Compte Rendu Des Quatriemes Journees de L'hydraulique*, Question III, rapport 1, 74-1-10, 1956.

C Petruskas and PM Aagaard. Extrapolation of historical storm data for estimating design wave height. *Journal of Petroleum Engineering*, 11, 1971.

WJ Pierson and L Moskowitz. A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the simiularity theory of s.a.kitaigorodskii. *J. Geophys. Res.*, 69 (24):5181–5190, 1966.

Rijksdient voor het Cultureel Erfgoed, TNO, and Deltares. Paleografische kaart 500 v. chr., 2022. URL https://www.cultureelerfgoed.nl/onderwerpen/bronnen-en-kaarten/documenten/publicaties/2019/01/01/paleogeografische-kaarten-pdf.

Rijkswaterstaat. Richtlijnen vaarwegen. Technical report, 2020.

Rijkswaterstaat. Kustonderhoud, 2023. URL https://www.rijkswaterstaat.nl/water/waterbeheer/bescherming-tegen-het-water/maatregelen-om-overstromingen-te-voorkomen/kustonderhoud/doelen-en-resultaten.

GJ Schiereck. *Introduction to bed, bank and shore protection.* Delft University Press, 2004. ISBN 90-407-1683-8.

JB Schijf. Protection of embankments and bed in inland and maritime waters, and in overflows or weirs. *PIANC*, 1949.

A Shields. Anwendung der Aehlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung. *Mitteilungen der Preussische Versuchsanstalt fur Wasserbau und Schiffbau*, Heft 26, 1936.

CIRIA, CUR, CETMEF. *The Rock Manual. The use of rock in hydraulic engineering.* C683, CIRIA, London, 2 edition, 2007.

STOWA. Hydraulisch ontwerp en beheer afvalwatertransportsystemen. Technical report, 2012.

TAW. Invloedsfactoren voor de ruwheid van toplagen bij golfoploop en overslag. Technical report, Rijkswaterstaat, 2002a.

TAW. Technisch rapport golfoploop en golfoverslag bij dijken. Technical report, Rijkswaterstaat, 2002b.

USACE. Revision of thrust block criteria in tm 5-813-5/afm 88-10, vol 5 appendix c. Technical Report 1110-3-446, USACE, 1992.

A Valsamidis and DE Reeve. A new approach to analytical modelling of groyne fields. *Continental Shelf Research*, 211:104288, 2020. doi: doi.org/10.1016/j.csr.2020.104288.

J Van de Kreeke and RL Brouwer. *Tidal Inlets: Hydrodynamics and Morphodynamics.* Cambridge University Press, 2017. doi: 10.1017/9781108157889.

JW Van der Meer. *Rock slopes and gravel beaches under wave attack*. PhD thesis, Delft University of Technology, 1988.

JW Van der Meer, NWH Allsop, T Bruce, J De Rouck, A Kortenhaus, T Pullen, H Schüttrumpf, P Troch, and B Zanuttigh. Manual on wave overtopping of sea defences and related structures. Technical report, 2018. URL https://www.overtopping-manual.com.

HJ Verhagen, K d'Angremond, and FC van Roode. *Breakwaters and closure dams*. Delft University Press, 2009. ISBN 978-90-6562-173-3.

P Visser. *Breach growth in sand-dikes*. PhD thesis, Delft University of Technology, 1998.

Wikipedia. Marianentrog, Januari 2020. URL https://nl.wikipedia.org/wiki/Marianentrog.

Wikipedia. Coastline paradox, 2024. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Coastline_paradox.

IR Young and LA Verhagen. The growth of fetch-limited waves in water of finite depth. part i. total energy and peak frequency. *Coastal Engineering*, 29:47–78, 1996.

Voorts is dankbaar gebruik gemaakt van Wikipedia, de encyclopedie van de Wikimedia Foundation, met name voor achtergronden bij historische wetenschappers die in dit boek worden genoemd.

Grasduinen in waterbouw

Tjerk Zitman

Dit boek is bedoeld als een eerste kennismaking met het vakgebied waterbouwkunde, zonder de pretentie volledig te zijn. Het is gemotiveerd vanuit de ervaring van de auteur dat het heerlijk is om in het vakgebied te grasduinen. Er is gegrasduind in enkele fundamentele aspecten van het vakgebied met verwijzingen naar de huidige praktijk en hier en daar de historie. De nadruk ligt op fysische processen en de mathematische beschrijving daarvan. Daarnaast is er aandacht voor het schetsmatig ontwerpen van enkele waterbouwkundige constructies.



Tjerk Zitman

Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering and Geosciences

Fascinatie voor bruggen was voor Tjerk Zitman de drijfveer om civiele techniek te gaan studeren. Tijdens die studie ontwikkelde zich een grotere fascinatie voor waterbouwkunde. Met circa 15 jaar ervaring in de adviespraktijk in dit vakgebied, heeft hij een overstap gemaakt naar de TU Delft waar hij zich ruim 25 jaar in het bijzonder heeft toegelegd op academisch onderwijs en de organisatie daarvan, waaronder in de rol van senior docent en directeur van de bachelor en master opleidingen civiele techniek.

© 2025 TU Delft OPEN Publishing
ISBN 978-94-6518-151-6
DOI https://doi.org/10.59490/mt.234
textbooks.open.tudelft.nl

Cover image: Tjerk Zitman